GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE CARLEMANN

BOGDAN BAJŠANSKI (Sarajevo)

SOMMAIRE — Carlemann a donné des conditions suffisantes pour la fonction $f(z)$, sous lesquelles la convergence de la série entière de $F(z)$ au point $z=1$ implique la convergence de la série entière de $F(f(z))$ au même point. Dans cette note on donne des conditions suffisantes plus larges.

1. Carlemann [1][1] a démontré le théorème suivant:

Si la fonction $f(z)$ est

i) *régulière pour* $|z|<R$, $R>1$,

ii) $|f(z)|<1$ *pour* $|z|=1$, $z \neq 1$,

iii) $f(1)=1$ *et si*

iv') *le contact des courbes* $F(e^{ti})$ *et* e^{ti} *est de premier ordre,*

alors, pour toute fonction $F(z)$, *telle que la série entière de* $F(z)$ *converge au point* $z=1$, *la série entière de la fonction* $F(f(z))$ *converge au même point.*

M. Turán [2][2] a montré que l'on ne peut pas généraliser le théorème cité en substituant aux conditions ii) et iv') la seule condition $|f(z)| \leqslant 1$ pour $|z|=1$.

D'autre part, le théorème de Carlemann, comme nous allons le montrer, peut être généralisé par le

THÉORÈME. *Si la fonction $f(z)$ satisfait aux conditions* i), ii) *et* iii), *et si* iv) $\Re A \neq 0$, *où le nombre* A *est défini par*

$$f(z)-z^{\alpha}=A i^{p}(z-1)^{p}+o(1)(z-1)^{p}, \quad z \to 1, \quad \alpha=f'(1), \quad A \neq 0,$$

alors, pour toute fonction $F(z)$, *telle que sa série entière converge au point* $z=1$, *la série entière de* $F(f(z))$ *converge au même point.*

---

1) Cité d'après [2].

2) Ces Publications, p. 19.

Nous allons montrer que les conditions i – iv) sont plus générales que les conditions i – iv').

Soit

$$f(z)-z^{\alpha}=\beta(z-1)^2+o(1)(z-1)^2,\ z\to 1,\ \alpha=f'(1).$$

Alors

$$z^{-\alpha}f(z)=1+\beta(z-1)^2+o(1)(z-1)^2,\ z\to 1,$$

$$|f(e^{ti})|=1-\gamma t^2+o(t^2),\ t\to 0,\ \gamma=\Re\beta.$$

La condition de Carlemann étant équivalente à $\gamma>0$, elle implique évidemment la condition iv).

Pour voir que les conditions de notre théorème sont réellement plus générales que les conditions de Carlemann, il suffit d'envisager, par exemple, la fonction

$$f(z)=z^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^4,$$

qui satisfait aux conditions i – iv), mais non aux conditions i – iv').

Remarquons que si la fonction $f(z)$ a tous ses coefficients réels, on peut donner une forme plus simple à la condition iv); elle signifie alors que le zéro de la fonction $f(z)-z^{\alpha}$ au point $z=1$ est d'un ordre pair.

Enfin, on peut donner une interprétation géométrique de la condition iv): elle signifie que l'ordre de contact des courbes $f(e^{ti})$ et e^{ti} est égal à l'ordre de contact des courbes $M(r)$ et r^{α} au point $r=1$. ($M(r)=\text{Max}\,|f(z)|$ pour $|z|=r$.)

2. Dans notre travail [3] nous avons démontré le théorème suivant: *Si la fonction $f(z)$ satisfait aux conditions* i – iv) *et si*

$$f^n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}z^{\nu},$$

on aura alors

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|=O(1),\ n\to\infty.$$

Nous ne pourrons pas appliquer ce résultat pour obtenir la généralisation désirée du théorème de Carlemann, car, dans ce cas, la fonction $h(z)$, définie par (20), ne sera généralement régulière qu'au voisinage du point $z=1$. On peut cependant remarquer que, avec des changements évidents, la démonstration du théorème cité, donnée dans [3], fournit immédiatement le résultat suivant:

LEMME. *Supposons la fonction* $h(z)$

(i) *régulière pour* $||z|-1|<\varepsilon_1$, $|\arg z|<\varepsilon_2$;

(ii) $|h(z)|<1$ *pour* $|z|=1$, $z\neq 1$, $|\arg z|<\varepsilon_2$;

(iii) $h(1)=1$.

Soit en outre

(iv) $\Re A \neq 0$,

où le nombre A *est défini par*

$$h(z)-z^{\alpha}=Ai^{p}(z-1)^{p}+o(1)(z-1)^{p},\ z\to 1,\ \alpha=h'(1),\ A\neq 0.$$

Si la fonction $g(z)$ *est régulière pour* $|z-1|<\varepsilon_3$ *et si*

$$p_{n\nu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{|z|=1+n^{-1}\\ |\arg z|<\varepsilon}} g(z)\,h^{n}(z)\,z^{-\nu-1}\,dz,$$

(ε *suffisamment petit*), *alors*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|p_{n\nu}|=O(1),\ n\to\infty.$$

Ce lemme établi, il n'est plus difficile de démontrer le théorème de Carlemann dans sa forme généralisée.

3. Démonstration du théorème.

3.1. Soit

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{\nu}z^{\nu},\qquad f^{\nu}(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}d_{\nu\mu}z^{\mu}.$$

Alors

$$F(f(z))=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{\nu}\sum_{\mu=0}^{\infty}d_{\nu\mu}z^{\mu}=\sum_{\mu=0}^{\infty}z^{\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{\nu}d_{\nu\mu}.$$

Nous allons employer les notations suivantes

$$s_m=\sum_{\nu=0}^{m}c_{\nu},$$

$$\sigma_n=\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{\nu}d_{\nu\mu}=\sum_{\mu=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}(s_{\nu}-s_{\nu-1})\,d_{\nu\mu}.$$

La suite s_m étant supposée convergente, on aura $s_m=O(1)$, $m\to\infty$.

Comme aussi

$$|d_{\nu\mu}|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|z|=1/2} f^{\nu}(z)\, z^{-\mu-1}dz\right| \leqslant 2^{\mu} M^{\nu} \to 0,$$

lorsque $\nu \to \infty$, μ fixe, car d'après (iii),

$$M=\operatorname*{Max}_{|z|=1/2}|f(z)|<1,$$

on peut appliquer à la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(s_{\nu}-s_{\nu-1})\, d_{\nu\mu}$$

la sommation d'Abel, de sorte que

(1)
$$\sigma_n=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\, s_{\nu},$$

où

(2)
$$a_{n\nu}=\sum_{\mu=0}^{n} d_{\nu\mu}-d_{\nu+1,\,\mu}.$$

Comme $d_{\nu\mu}$ est le coefficient de z^{μ} dans la série entière de $f^{\nu}(z)$, $a_{n\nu}$ sera, d'après (2), le coefficient de z^n dans la série entière de

$$f^{\nu}(z)\,\frac{1-f(z)}{1-z},$$

de sorte que

(3)
$$a_{n\nu}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{1-f(z)}{1-z}\, f^{\nu}(z)\, z^{-n-1}\, dz,$$

où C est une courbe autour de l'origine, située dans le domaine de régularité de la fonction $f(z)$.

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que la convergence de la suite s_m entraîne celle de la suite σ_n, c'est-à-dire que le procédé de sommation défini par (1) et (3) est permanent. A cet effet il faut montrer — d'après le théorème bien-connu de Toeplitz-Schur — que les trois conditions suivantes sont satisfaites:

(4)
$$a_{n\nu}\to 0, \text{ lorsque } n\to\infty,\ \nu \text{ fixe},$$

(5)
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\to 1, \text{ lorsque } n\to\infty,$$

(6)
$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|=O(1), \text{ lorsque } n\to\infty,$$

où $a_{n\nu}$ est défini par (3).

La fonction

$$\frac{1-f(z)}{1-z} f^{\nu}(z)$$

étant, d'après i) et iii), une fonction régulière pour $|z|<R$, $R>1$, les coefficients de sa série entière doivent tendre vers zéro, de sorte que la condition (4) est satisfaite.

La condition (5) est aussi satisfaite, car

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1/2} \frac{1-f(z)}{1-z} f^{\nu}(z)\, z^{-n-1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1/2} \frac{1-f(z)}{1-z} z^{-n-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} f^{\nu}(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1/2} \frac{z^{-n-1}\, dz}{1-z} = 1\,.$$

3.2. Pour montrer que la condition (6) est aussi satisfaite, nous avons besoin d'une estimation assez précise des coefficients $|a_{n\nu}|$. A cet effet nous choisissons dans (3) un contour d'intégration C_n, constitué des arcs L_n, R_n^+, R_n^- et P_n, définis de la manière suivante:

$$L_n:\ |f(z)| = \frac{n}{n+1} \quad \text{pour} \quad -\varepsilon \leqslant \arg f(z) \leqslant \varepsilon$$

$$R_n^+:\ \arg z = \delta_{1n} \quad \text{pour} \quad 1+\beta \leqslant |z| \leqslant \rho_{1n}$$

$$R_n^-:\ \arg z = \delta_{2n} \quad \text{pour} \quad 1+\beta \leqslant |z| \leqslant \rho_{2n}$$

$$P_n:\ |z| = 1+\beta \quad \text{pour} \quad \delta_{1n} \leqslant \arg z \leqslant 2\pi + \delta_{2n}\,,$$

où

$$f^{-1}\left(\frac{n}{n+1} e^{\varepsilon i}\right) = \rho_{1n}\, e^{\delta_{1n} i}, \quad f^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\, e^{-\varepsilon i}\right) = \rho_{2n}\, e^{\delta_{2n} i}.$$

Nous devons montrer qu'ils existent $\varepsilon>0$, $\beta>0$ et $N>0$ tels que, pour chaque $n>N$,

(7) l'arc L_n soit defini; la fonction $f^{-1}(z)$ soit régulière pour $z = \dfrac{n}{n+1} e^{\theta i}$, $-\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \varepsilon$;

(8) l'arc L_n soit situé dans le domaine de régularité de la fonction $f(z)$;

(9) les arcs R_n^+ et R_n^- soient situés dans le domaine de regularité de la fonction $f(z)$;

(10) la fonction $|f(z)|$ soit une fonction monotone de $|z|$, lorsque $|z|$ parcourt R_n^+ et R_n^-;

(11) $$\mathrm{Min}\,(\delta_{1n}, -\delta_{2n}) \geqslant \delta > 0;$$

(12) $$\mathrm{Min}\,(\rho_{1n}, \rho_{2n}) \geqslant 1+\beta, \quad \beta > 0;$$

(13) $$|f(z)| \leqslant 1-\gamma, \quad \gamma > 0 \text{ pour } |z| = 1+\beta, \quad |\arg z| \geqslant \delta.$$

D'après i), ii) et iii) on aura

(14) $$f'(1) > 0.$$

Il résulte de (14) que la fonction $f^{-1}(z)$ est régulière au voisinage du point $z=1$. Donc, la courbe $f^{-1}\left(\frac{n}{n+1}e^{\theta i}\right)$, $-\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \varepsilon$ est définie pour $n \geqslant N_1$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, de sorte que dans ce cas la condition (7) est satisfaite.

La fonction $f(z)$ étant régulière au point $z=1$, les conditions (8) et (9) seront satisfaites si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, $n \geqslant N_2$.

Soit

$$\psi(r_1, r_2, t) = \begin{cases} \dfrac{|f(r_2 e^{ti})| - |f(r_1 e^{ti})|}{r_2 - r_1}, & r_2 \neq r_1, \\[2ex] \dfrac{\partial |f(re^{ti})|}{\partial r}, & r_2 = r_1 = r. \end{cases}$$

Il s'ensuit de (14) qu'il existe un $r_3 > 1$ tel que $\psi(r_1, r_2, 0) > 0$ pour $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$. Il faut montrer qu'il existe un $\varepsilon_3 > 0$ tel que $\psi(r_1, r_2, \varepsilon) > 0$ pour $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_3$. A cet effet il suffit de remarquer qu'il existe un $r' > 1$ et un $\varepsilon' > 0$ tels que, pour $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant r'$ et pour $|t| \leqslant \varepsilon'$, la fonction $\psi(r_1, r_2, t)$ est continue, donc uniformément continue. Alors, la condition (10) sera satisfaite si $n \geqslant N_2$ et $\varepsilon \leqslant \varepsilon_3$.

D'après (14) $\arg f^{-1}(e^{\varepsilon i})$ et aussi $\arg f^{-1}(e^{-\varepsilon i})$ seront non nuls pour $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_4$. Soit

(15) $$\varepsilon = \mathrm{Min}\,(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

et soit

$$2\delta = \mathrm{Min}\,(\arg f^{-1}(e^{\varepsilon i}), -\arg f^{-1}(e^{-\varepsilon i})).$$

Alors, pour $n \geqslant N_4$, on aura $\left|\arg f^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\, e^{\pm\varepsilon i}\right)\right| \geqslant \delta > 0$, et la condition (11) sera satisfaite.

D'après ii) et (15) $|f^{-1}(e^{\pm\varepsilon i})| \geqslant 1+2\beta_1$, $\beta_1 > 0$, de sorte que, pour $n \geqslant N_5$, on aura $\left|f^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\, e^{\pm\varepsilon i}\right)\right| \geqslant 1+\beta_1$, c'est-à-dire la condition (12) sera satisfaite. Si $\beta < \beta_1$.

D'après ii) $|f(z)| \leqslant 1-2\gamma$, $\gamma > 0$, pour $|z| = 1$, $|\arg z| \geqslant \delta$. La fonction

$$\operatorname{Max}|f(z)| \quad \text{pour} \quad |z| = r, \quad |\arg z| \geqslant \delta,$$

étant une fonction continue de r au voisinage du point $r=1$, il existe un β_2, $0 < \beta_2 < R-1$ tel que $|f(z)| \leqslant 1-\gamma$ pour $|z| \leqslant 1+\beta_2$, $|\arg z| \geqslant \delta$. Ainsi la condition (13) sera satisfaite. Si $\beta < \beta_2$. De cette manière, en définissant ε par (15) et en posant $\beta = \operatorname{Min}(\beta_1, \beta_2)$ et $N = \operatorname{Max}(N_1, N_2, N_3, N_4, N_5)$, on obtient un contour pour lequel toutes les conditions (7)–(13) sont satisfaites.

3.3. D'après iii) et d'après le choix du contour d'intégration, on aura

$$|a_{n\nu}| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{P_n} \frac{f(z)^\nu (1-f(z))}{z^{n+1}(1-z)}\, dz\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{R_n^+} \cdots dz\right| + \tag{16}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{R_n^-} \cdots dz\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{L_n} \cdots dz\right|.$$

Il résulte de (11) et de (13) que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{P_n} \frac{f^\nu(z)}{z^{n+1}}\, \frac{1-f(z)}{1-z}\, dz\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{P_n} \frac{|f(z)|^\nu}{|z|^{n+1}} \left|\frac{1-f(z)}{1-z}\right| |dz| \leqslant \tag{17}$$
$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\substack{|z|=1+\beta \\ |\arg z| \geqslant \delta}} \frac{|f(z)|^\nu}{|z|^{n+1}} \left|\frac{1-f(z)}{1-z}\right| |dz| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} (1-\gamma)^\nu \frac{K}{(1+\beta)^n} =$$
$$= \frac{K}{\gamma(1+\beta)^n} = o(1), \quad n \to \infty.$$

D'après (9), (10) et (12) nous avons

(18)
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{R_n^{\pm}} \frac{f^{\nu}(z)}{z^{n+1}} \frac{1-f(z)}{1-z} dz \right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R_n^{\pm}} \frac{|f(z)|^{\nu}}{|z|^{n+1}} \left| \frac{1-f(z)}{1-z} \right| |dz| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{K}{2\pi} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\nu} \frac{1}{(1+\beta)^{n+1}} \leqslant \frac{Ln}{(1+\beta)^n} =$$
$$= o(1), \ n \to \infty .$$

Soit

(19)
$$p_{n\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_n} \frac{f^{\nu}(z)}{z^{n+1}} \frac{1-f(z)}{1-z} dz$$

D'après (7) on peut poser

(20)
$$z = f^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{h(s)},$$

de sorte que
$$p_{n\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|s|=1+n^{-1} \\ |\arg s| \leqslant \varepsilon}} \frac{h^n(s)}{s^{\nu+1}} \frac{s-1}{h(s)-1} h'(s)\, ds$$

On vérifie aisément que si la fonction $f(z)$ satisfait aux conditions i - iv) du théorème, la fonction $h(z)$, définie par (20), satisfait aux conditions i - iv) du lemme. Puisque $h(1)=1$, la fonction $\frac{s-1}{h(s)-1} h'(s)$ est régulière sur le chemin d'intégration de sorte que le lemme peut être appliqué. On obtient

(21)
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |p_{n\nu}| = O(1), \ n \to \infty$$

De (16), (17), (18), (19) et (21) il résulte que la condition (6) est satisfaite, ce qu'il fallait démontrer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Carlemann, T. — Some theorems concerning the convergence of power-series on the circle of convergence, *Arkiv för Math. Astr. och Fys.* **15** (1920), p. 1—13.

[2] Turán, P. — A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence-circle, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **12** (1958), p. 19—25.

[3] Bajšanski, B. M. — Sur une classe générale de procédés de sommation du type d'Euler—Borel, *Publ. Inst. Math. Ac. Serbe Sc.* **10** (1956), 131—152.