GÉNÉRALISATIONS DE DEUX THÉORÈMES DE ZYGMUND — B. SZ.-NAGY

DUŠAN ADAMOVIĆ (Belgrade)

SOMMAIRE — On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité de la somme d'une série trigonométrique (des sinus ou des cosinus), celle-ci étant supposée monotone et bornée inférieurement.

1. Dans la suite les fonctions $g(x)$ et $f(x)$ sont *non croissantes* et *inférieurement bornées* dans l'intervalle $(0, \pi)$ et

$$xg(x) \in L(0, \pi), \quad f(x) \in L(0, \pi).$$

Soient b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ les coefficients de la série des sinus de $g(x)$ et a_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ les coefficients de la série des cosinus de $f(x)$, c'est-à-dire

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x) \sin nx\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \cos nx\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ici les b_n ne sont pas nécessairement les coefficients de Fourier de $g(x)$.

Alors on a:

(A) *Pour que la série*

$$\sum n^{-\gamma} b_n, \quad 0 < \gamma \leqslant 1,$$

soit absolument convergente il faut et il suffit que

$$x^{\gamma-1} g(x) \in L(0, \pi).$$

(B) *Pour que la série*

$$\sum n^{-\gamma} a_n \tag{1}$$

soit absolument convergente il faut et il suffit que

$$x^{\gamma-1} f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi) \tag{2}$$

ou

$$f(x) \log x \in \mathrm{L}(0, \pi) \tag{3}$$

suivant que l'on a $0 < \gamma < 1$ *ou* $\gamma = 1$.

Ces résultats pour $\gamma = 1$ sont dus à Zygmund [1] et dans le cas général à B. Sz.-Nagy [2]. De plus, B. Sz.-Nagy a démontré que *déjà la sommabilité* $-C^{(1)}$ *de la série* (1) *entraîne* (2) *ou* (3) *selon le cas.*

Soit dans ce qui suit $L(x)$ une *fonction à croissance lente de Karamata* [8], c.-à-d. positive et continue pour $x \geqslant 0$ et telle que pour tout $t \geqslant 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1.$$

Dans cette note nous allons montrer que l'on peut remplacer dans les énoncés (A) et (B), ainsi que dans la remarque supplémentaire de B. Sz. — Nagy, les facteurs $n^{-\gamma}$, $x^{\gamma-1}$ et $\log x$ par $n^{-\gamma} L(n)$, $x^{\gamma-1} L(1/x)$ et $L(1/x) \log x$ respectivement. Plus précisément, nous allons généraliser ces résultats par les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1[1]. *Soit* $0 < \gamma < 2$. *La série*

$$\sum n^{-\gamma} L(n) b_n$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in \mathrm{L}(0, \pi).$$

THÉORÈME 2[1]. *Soit* $0 < \gamma < 1$. *La série*

$$\sum n^{-\gamma} L(n) a_n \tag{4}$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi). \tag{5}$$

---

[1]) Voir la remarque à la fin de cet article (p. 98).

THÉORÈME 3. *Soit* $0 < \gamma < 1$.

Si

$$x^{-1-\gamma} L(x)$$

ne décroît pas pour x suffisamment grand, de la convergence de la série (4) *résulte* (5).

Si

$$x^{-\gamma} L(x)$$

ne décroît pas pour x suffisamment grand, de la sommabilité - $C^{(1)}$ *de la série* (4) *résulte* (5).

THÉORÈME 4. *Soit*

$$0 < AL(x) \log x < \int_1^x t^{-1} L(t)\, dt < BL(x) \log x, \quad x > 1 \tag{6}$$

(A et B constants). Alors la série

$$\sum n^{-1} L(n)\, a_n \tag{7}$$

converge absolument si et seulement si

$$L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x} f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi).$$

THÉORÈME 5. *Soit*

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\, dt > AL(x) \log x > 0, \quad x > 1.$$

Alors

$$L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x} f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$$

résulte de la convergence ou de la sommabilité - $C^{(1)}$ *de la série* (7) *suivant que, pour x suffisamment grand, la fonction* $x^{-2} L(x)$ *seulement ou déjà la fonction* $x^{-1} L(x)$ *est non croissante.*

Pour $L(x) \equiv 1$ (une constante positive est évidemment une fonction à croissance lente) le théorème 1 se réduit à (A), où l'intervalle $0 < \gamma \leqslant 1$ est remplacé par l'intervalle plus large $0 < \gamma < 2$, les théorèmes 2 et 4 se réduisent à (B) et les théorèmes 3 et 5 à la remarque supplémentaire de B. Sz.-Nagy. Les théorèmes 1—5 ont un sens analogue à celui des généralisations des résultats de Boas, Heywood et Young [3, 4, 5], données par Aljančić, Bojanić et Tomić dans [6]. Nos résultats, avec ceux de Aljančić, Bojanić et Tomić, montrent que la notion de fonction à croissance lente, introduite d'abord dans les théorèmes abéliens et tauberiens, est aussi féconde dans la théorie des séries trigonométriques.

Notons que la condition (6) du théorème 4 est par ex. satisfaite par les fonctions

$$L(x) = (\log_k x)^\alpha, \; k \geqslant 2, \text{ pour } x \text{ suffisamment grand,}$$

et

$$L(x) = (\log x)^\alpha, \; \alpha > -1, \text{ pour } x \text{ suffisamment grand;}$$

elle n'est pas satisfaite par les fonctions

$$L(x) = (\log x)^\alpha, \; \alpha \leqslant -1, \text{ pour } x \text{ suffisamment grand.}$$

Nous ajoutons aux résultats précédents le théorème suivant, qui en est proche bien qu'il ne généralise aucun des résultats cités de Zygmund — B. Sz.-Nagy:

THÉORÈME 6.[2]) *Soit $L(x)$ convexe et tel que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) < +\infty .$$

Alors la série

$$\sum b_n L(n)$$

converge absolument si et seulement si

$$x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) g(x) \in \mathrm{L}(0, \pi) .$$

Pour les démonstrations des théorèmes ci-dessus nous avons besoin du

LEMME. *Soit la fonction $\varphi(x)$ non croissante et inférieurement bornée dans l'intervalle $(0, \alpha)$, $\alpha > 0$, et soit $s > 0$. Alors l'existence de l'une des intégrales*

$$\int_0^\alpha x^s L\left(\frac{1}{x}\right) d\varphi(x) \quad et \quad \int_0^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx \tag{8}$$

[2]) Loc. cit. 1)

entraîne l'existence de l'autre et que

$$\varphi(x)\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \to 0, \quad x \to +0.$$

Pour $L(x) \equiv 1$ ce lemme se réduit au cas particulier du lemme de B. Sz.-Nagy [2].

2. L'exposé qui suit est fondé sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente, à savoir:

(I) $\dfrac{L(tx)}{L(x)} \to 1, \; x \to +\infty$ *uniformément pour* $0 < a \leqslant t \leqslant b < +\infty$.

(II) *Si la fonction* $\varphi(x)$ *est positive et continue pour* $x \geqslant 0$ *et* $\varphi(x) \sim L(x)$, $x \to +\infty$, $\varphi(x)$ *est une fonction à croissance lente.*

(III) *Pour tout* $\alpha > 0$

$$x^{\alpha} L(x) \to +\infty \quad \text{et} \quad x^{-\alpha} L(x) \to 0, \quad x \to +\infty.$$

(IV) *Si* $\alpha > 0$ *et si l'on pose*

$$\overline{L}_1(x) = x^{-\alpha} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{\alpha} L(t)\}, \quad \overline{L}_2(x) = x^{\alpha} \operatorname*{Max}_{x \leqslant t < +\infty} \{t^{-\alpha} L(t)\},$$

$$\underline{L}_1(x) = x^{\alpha} \operatorname*{Min}_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{\alpha} L(t)\}, \quad \underline{L}_2(x) = x^{-\alpha} \operatorname*{Min}_{x \leqslant t < +\infty} \{t^{\alpha} L(t)\},$$

on a

$$\overline{\underline{L}}_k(x) \sim L(x), \qquad x \to +\infty, \qquad k = 1, 2,$$

de sorte que, d'après (II), *les fonctions* $\overline{\underline{L}}_k(x)$, $k = 1, 2$, *continues pour* $x \geqslant 0$, *sont à croissance lente.*

3. Démonstration du lemme. On démontre d'abord que, pour $0 < x \leqslant \alpha$, $s > 0$,

$$0 < P x^s L\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \leqslant Q x^s L\left(\frac{1}{x}\right) \tag{9}$$

(P et Q constants), où l'existence de l'intégrale envisagée est assurée par (III).

Si l'on pose $s = s' + s''$, $0 < s' < 1$, $s'' > 0$ et $t = 1/u$, on aura, d'après (IV),

$$\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_0^x t^{s'-1} u^{-s''} L(u)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{1/x \leqslant u < +\infty} \{u^{-s''} L(u)\} \int_0^x t^{s'-1} dt = \left(\frac{1}{x}\right)^{-s''} \overline{L}_2\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x^{s'}}{s'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Q'}{s'} x^s L\left(\frac{1}{x}\right) = Q x^s L\left(\frac{1}{x}\right)$$

et aussi

$$\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \geqslant \operatorname*{Min}_{1/x \leqslant u < +\infty} \{u^{1-s'} L(u)\} \int_0^x t^{s''} dt =$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^{1-s'} \underline{L}_2\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x^{s''+1}}{s''+1} \geqslant \frac{P'}{s''+1} x^s L\left(\frac{1}{x}\right) = P x^s L\left(\frac{1}{x}\right), \; P > 0.$$

De (9) on déduit d'une part l'équiconvergence des intégrales

$$\int_0^\alpha x^s L\left(\frac{1}{x}\right) d\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^\alpha \left[\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d\varphi(x).$$

D'autre part $(0 < \varepsilon < \alpha)$,

$$\int_\varepsilon^\alpha \left[\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt\right] d[-\varphi(x)] =$$

$$-\varphi(\alpha) \int_0^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx + \varphi(\varepsilon) \int_0^\varepsilon x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_\varepsilon^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx - \varphi(\alpha) \int_0^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx;$$

on en déduit l'équiconvergence des intégrales

$$\int_0^\alpha \left[\int_0^x t^{s-1} L\left(\frac{1}{t}\right) dt \right] d[-\varphi(x)] \qquad \text{et} \qquad \int_0^\alpha x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx,$$

donc, en vertu du résultat précédent, l'équiconvergence des intégrales (8) Il s'ensuit enfin que de l'existence de l'une de ces deux intégrales résulte

$$0 < \varphi(\varepsilon) \int_0^\varepsilon x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) dx \leqslant \int_0^\varepsilon x^{s-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \varphi(x)\, dx \to 0, \ \varepsilon \to +0.$$

4. Démonstration du théorème 1. On peut supposer sans réstriction que

$$g(\pi-0)=0.$$

Dans le cas contraire il suffit de considérer la fonction $g(x)-g(\pi-0)$, car une constante additive ne peut rien changer, les deux conditions dont le théorème 1 établit l'équivalence étant automatiquement satisfaites pour $g(x) = \text{const}$. On a alors

$$b_n = -\frac{2}{\pi n} \int_0^\pi (1-\cos n\, x)\, dg(x) \geqslant 0. \tag{10}$$

En effet, d'après le lemme (avec $L(x) \equiv 1$),

$$xg(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$$

entraîne l'existence de l'intégrale

$$\int_0^\pi x^2\, dg(x)$$

et que

$$x^2 g(x) \to 0, \ x \to +0,$$

et par conséquent l'existence de

$$\int_0^\pi (1-\cos nx)\, dg(x)$$

et que

$$(1-\cos nx)\, g(x) \to 0, \ x \to +0.$$

Donc, en tenant compte de $g(\pi-0)=0$, une intégration par parties donne

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi n}\left[-\lim_{x\to+0}g(x)(1-\cos nx)-\int_0^\pi(1-\cos nx)\,dg(x)\right]=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi(1-\cos nx)\,dg(x).$$

D'après (10), la série

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-\gamma}L(n)\,b_n=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty L(n)\,n^{-1-\gamma}\int_0^\pi(1-\cos nx)\,dg(x)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sum_{n=1}^\infty n^{-1-\gamma}(1-\cos nx)\,L(n)\,dg(x)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi A(x)\,dg(x)$$

converge si et seulement si cette dernière intégrale existe. Cependant, comme nous allons le montrer,

$$0<M'x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant A(x)\leqslant M'x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right), \tag{11}$$

de sorte que l'intégrale mentionnée existe en même temps que l'intégrale

$$\int_0^\pi x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right)dg(x),$$

d'où, d'après le lemme, résulte le théorème 1.

Nous n'avons donc qu'à prouver les inégalités (11). Si l'on pose

$$A(x)=\sum_{n=1}^\infty n^{-1-\gamma}(1-\cos nx)\,L(n)=\sum_{n\leqslant 1/x}+\sum_{n>1/x}=A^{(1)}(x)+A^{(2)}(x)$$

et si l'on a

$$\operatorname{Max}\{0,1-\gamma\}<\delta<2-\gamma,\ \gamma=\gamma'+\gamma'',\ \gamma'>0,\ \gamma''>0,$$

on obtient, en vertu de l'inégalité

$$1-\cos u\leqslant\operatorname{Min}\left\{2,\frac{u^2}{2}\right\}$$

et d'après (IV), pour x suffisamment petit,

$$A^{(1)}(x) \leqslant \frac{x^2}{2} \sum_{n \leqslant 1/x} n^{1-\gamma-\delta} n^{\delta} L(n) \leqslant \frac{x^2}{2} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant 1/x} \{t^{\delta} L(t)\} \sum_{n \leqslant 1/x} n^{1-\gamma-\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta} \overline{L}_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^{1/x} t^{1-\gamma-\delta}\, dt \leqslant M''' x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$A^{(2)}(x) \leqslant 2 \sum_{n > 1/x} n^{-1-\gamma'} n^{-\gamma'} L(n) \leqslant 2 \operatorname*{Max}_{1/x \leqslant t < +\infty} \{t^{-\gamma''} L(t)\} \sum_{n > 1/x} n^{-1-\gamma'} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left(\frac{1}{x}\right)^{-\gamma''} \overline{L}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_{1/x-1}^{+\infty} t^{-1-\gamma'}\, dt \leqslant M^{\mathrm{IV}} x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

donc

$$A(x) \leqslant M'' x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'autre part, comme

$$1 - \cos u \geqslant 2 \left(\frac{u}{\pi}\right)^2 \text{ pour } |u| \leqslant \pi,$$

on a, si l'on prend

$$\delta > \operatorname{Max}\{0, \gamma - 1\},$$

pour x suffisamment petit,

$$A(x) \geqslant 2 \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \sum_{n \leqslant 1/x} n^{1-\gamma+\delta} n^{-\delta} L(n) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} x^2 \operatorname*{Min}_{0 \leqslant t \leqslant 1/x} \{t^{-\delta} L(t)\} \sum_{n \leqslant 1/x} n^{1-\gamma+\delta} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^{-\delta} \underline{L}_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^{1/x-1} t^{1-\gamma+\delta}\, dt \geqslant M' x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right).$$

5. Démonstration des théorèmes 2 et 3. De la même façon qu'au début du § 3, on peut déduire, en utilisant le lemme, la formule

$$a_n = -\frac{2}{\pi n} \int^{\pi} \sin nx \, df(x), \tag{12}$$

valable sans restriction.

Nous allons montrer d'abord que (5) entraîne la convergence absolue de la série (4). Nous démontrerons ensuite la seconde, puis la première assertion du théorème 3 et, enfin, que la convergence absolue de la série (4) entraîne (5).

D'après (12), la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n) \, |a_n| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma} L(n) \, |\sin nx| \, d[-f(x)] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} B(x) \, d[-f(x)]$$

converge si la fonction

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma} L(n) \, |\sin nx|$$

est intégrable par rapport à $f(x)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$. Comme on a, en posant

$$\gamma < \gamma + \delta < 1, \quad \gamma = \gamma' + \gamma'', \quad \gamma' > 0, \quad \gamma'' > 0,$$

pour x suffisamment petit,

$$B(x) \leqslant x \sum_{n \leqslant 1/x} n^{-\gamma} L(n) + \sum_{n > 1/x} n^{-1-\gamma} L(n) = B^{(1)}(x) + B^{(2)}(x),$$

$$B^{(1)}(x) = x \sum_{n \leqslant 1/x} n^{-\gamma-\delta} n^{\delta} L(n) \leqslant x \max_{0 \leqslant t \leqslant 1/x} \{t^{\delta} L(t)\} \sum_{n \leqslant 1/x} n^{-\gamma-\delta} \leqslant$$

$$\leqslant x \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta} \bar{L}_1\left(\frac{1}{x}\right) \int_0^{1/x} t^{-\gamma-\delta} \, dt \leqslant M_1 x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$B^{(2)}(x) = \sum_{n > 1/x} n^{-1-\gamma'} n^{-\gamma''} L(n) \leqslant \max_{1/x \leqslant t < +\infty} \{t^{-\gamma''} L(t)\} \sum_{n > 1/x} n^{-1-\gamma'} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{x}\right)^{-\gamma''} \bar{L}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_{1/x-1}^{+\infty} t^{-1-\gamma'} \, dt \leqslant M_2 x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

on obtient

$$B(x) \leqslant M_3\, x^{\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en conclut, d'après le lemme, que (5) entraîne la convergence absolue de la série (4).

Supposons que la série soit sommable $-C^{(1)}$, c.-à-d. que la suite

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-\gamma} L(\nu)\, a_\nu = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1-\gamma} L(\nu) \sin \nu x\, df(x) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} P_n(x)\, df(x)$$

tende vers une limite finie lorsque $n \to \infty$, et que $x^{-\gamma} L(x)$ ne croisse pas pour $x \geqslant m$, m entier positif. Soit

$$s_\nu(x) \overset{def}{=} \frac{1-\cos(2\nu+1)x/2}{2\sin x/2}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Alors

$$P_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1-\gamma} L(\nu) \sin \nu x =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1-\gamma} L(\nu) - \left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1)\right][s_\nu(x) - s_0(x)] =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1-\gamma} L(\nu) - \left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1)\right] s_\nu(x) -$$

$$-\left(1-\frac{1}{n}\right)L(1)\, s_0(x) \geqslant \sum_{\nu=m}^{n-1} + \left[\sum_{\nu=1}^{m-1} - L(1)\, s_0(x)\right] = P_n^{(1)}(x) + P^{(1)}(x). \tag{13}$$

La suite

$$\omega_{n,\nu} = \left(1-\frac{\nu}{n}\right)\nu^{-1-\gamma} L(\nu) - \left(1-\frac{\nu+1}{n}\right)(\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1) =$$

$$= [\nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1)] -$$

$$-\frac{1}{n}[\nu^{-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-\gamma} L(\nu+1)], \quad \nu \leqslant n-1,$$

est positive pour $\nu \geqslant m$, et, pour un $\nu \geqslant m$ fixe, non décroissante par rapport à n; de plus,

$$\omega_{n,\nu} \to \omega_\nu = \nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1), \quad n \to \infty .$$

En utilisant le fait que

$$s_\nu(x) \geqslant 0, \quad 0 < x \leqslant \pi ,$$

on en conclut que les fonctions de la suite $P^{(1)}_{(n)}(x)$ sont non négatives et que cette suite tend vers

$$P(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=m}^{n-1} \omega_{n,\nu} s_\nu(x) = \sum_{\nu=m}^{\infty} \omega_\nu s_\nu(x).$$

On obtient de (13)

$$\int_0^\pi P^{(1)}_n(x)\, d[-f(x)] \leqslant \left| \int_0^\pi P_n(x)\, d f(x) \right| + \left| \int_0^\pi P^{(1)}(x) d f(x) \right| . \tag{14}$$

Comme, d'après l'hypothèse,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi P_n(x)\, d f(x)$$

est fini et que la fonction $P^{(1)}(x)$ est, d'après le lemme, intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$, on déduit de (14), tenant compte de la non-négativité des fonctions $P^{(1)}_n(x)$, que la fonction $P(x)$ est intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$.

Or, comme nous allons le démontrer tout de suite,

$$P(x) \geqslant M x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right) > 0 , \tag{15}$$

ce qui entraîne l'existence de l'intégrale

$$\int_0^\pi x^\gamma L\left(\frac{1}{x}\right) df(x) ,$$

donc, d'après le lemme,

$$x^{\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi).$$

Il reste à démontrer (15). Pour $\nu+1/2 \leqslant \pi/x$ on a

$$s_\nu(x) \geqslant \frac{2}{x}\left(\frac{2\nu+1}{2\pi}\,x\right)^2 = \frac{2}{\pi^2}\,x\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2$$

et, pour x suffisamment petit, d'après (I) et (IV),

$$P(x) = \sum_{\nu=m}^{\infty} s_\nu(x)\left[\nu^{-1-\gamma}L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma}L(\nu+1)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2}\,x \sum_{m+1/2 \leqslant \nu+1/2 \leqslant \pi/x} (\nu+1/2)^2\left[\nu^{-1-\gamma}L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma}L(\nu+1)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2}\,x \int_m^{\pi/x-1} (t-1/2)^2\, d\left[-t^{-1-\gamma}L(t)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\,x\left[(t-1/2)^2 t^{-1-\gamma}L(t)\Big|_{\pi/x-1}^{m} + 2\int_m^{\pi/x-1}(t-1/2)\,t^{-1-\gamma}L(t)\,dt\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2}\,x\Bigg[(m-1/2)^2 m^{-1-\gamma}L(m) - \left(\frac{\pi}{x}-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{-1-\gamma}L\left(\frac{\pi}{x}-1\right) +$$

$$+ 2M_4 \operatorname*{Min}_{0\leqslant t\leqslant \pi/x}\{t^{-\gamma/2}L(m)\}\int_m^{\pi/x-1} t^{-\gamma/2}\,dt\Bigg] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi^2}\,x\Bigg\{2M_5 L\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{\gamma/2}\pi^{-\gamma/2}}{1-\gamma/2}\left[\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{1-\gamma/2} - m^{1-\gamma/2}\right] -$$

$$- \left(\frac{\pi}{x}-\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{-1-\gamma}L\left(\frac{\pi}{x}-1\right)\Bigg\} \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(\frac{2M_6}{1-\gamma/2} - M_7\right)\pi^{-1-\gamma}x^{\gamma}L\left(\frac{1}{x}\right) = M\,x^{\gamma}L\left(\frac{1}{x}\right),\quad M>0.$$

Ici les constantes M_4, M_5 et M_6 sont positives et plus petites que 1 et la constante M_7 est plus grande que 1; elles peuvent toutes être aussi proches de l'unité que l'on veut.

Si l'on suppose que la série (4) converge, c.-à-d. que la suite

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} L(\nu)\, a_\nu = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1-\gamma} L(\nu) \sin \nu x\, df(x)$$

tende vers une limite finie lorsque $n \to \infty$ et que $\nu^{-1-\gamma} L(\nu)$ ne croisse pas pour $\nu \geqslant l$, l entier positif, on obtient, d'une manière analogue que ci-dessus, que

$$Q_n(x) \overset{def}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1-\gamma} L(\nu) \sin \nu x =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} [\nu^{-1-\gamma} L(\nu) - (\nu+1)^{-1-\gamma} L(\nu+1)]\, s_\nu(x) - L(1)\, s_0(x) + n^{-1-\gamma} L(n)\, s_n(x) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\nu=l}^{n} + \left[\sum_{\nu=1}^{l-1} - L(1)\, s_0(x)\right] = Q_n^{(1)}(x) + Q^{(1)}(x),$$

où $Q_n^{(1)}(x)$ est une suite de fonctions non négatives, et l'on en déduit l'intégrabilité de la fonction $P(x)$ par rapport à $f(x)$ dans $(0, \pi)$. On en obtient de nouveau (5).

Soit enfin

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} L(n)\, |a_n| = K < +\infty .$$

Alors

$$K \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} L(\nu)\, |a_\nu| \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname*{Min}_{0 \leqslant t < \nu} \{t^{-\gamma} L(t)\}\, |a_\nu| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} \underline{L_1}(\nu)\, |a_\nu| = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma} \underline{L_1}(\nu) \left| \frac{2}{\pi\nu} \int_0^\pi \sin \nu x\, d[-f(x)] \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi \left[\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-\gamma-1} \underline{L_1}(\nu) \sin \nu x\right] d[-f(x)] \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi R_n(x)\, d[-f(x)] \right| .$$

Ici la fonction $x^{-\gamma}L_1(x)$ ne croît pas pour $x>0$. Or,

$$R_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-1-\gamma}\underline{L}_1(\nu)\sin\nu x \geqslant$$

$$\geqslant\sum_{\nu=1}^{n-1}[\nu^{-1-\gamma}\underline{L}_1(\nu)-(\nu+1)^{-1-\gamma}\underline{L}_1(\nu+1)]\,s_\nu(x)-\underline{L}(1)\,s_0(x)=$$

$$=R_n^{(1)}(x)-\underline{L}_1(1)\,s_0(x),$$

où $R_n^{(1)}(x)$ est une suite de fonctions non négatives et la fonction $s_0(x)$ est intégrable par rapport à $f(x)$ dans $(0,\pi)$. Par un procédé semblable à celui employé ci-dessus on obtient

$$R(x)\geqslant M_8\,x^{\gamma}\underline{L}_1\left(\frac{1}{x}\right)>0,\ R(x)=\lim_{n\to\infty}R_n^{(1)}(x),$$

d'où, d'après (IV),

$$R(x)\geqslant M_9\,x^{\gamma}L\left(\frac{1}{x}\right)>0.$$

On en obtient (5) en utilisant le lemme.

6. Démonstration des théorèmes 4 et 5. Le plan général de cette démonstration étant le même que celui de la précédente, nous n'en donnerons qu'une esquisse, en soulignant quelques points caractéristiques.

1° On majore l'expression

$$B(x)=B^{(1)}(x)+B^{(1)}(x),$$

où ces trois fonctions sont définies (avec $\gamma=1$) de la même façon qu'auparavant, comme il suit:

$$B^{(1)}(x)=x\sum_{n\leqslant 1/x}n^{-1}L(n)\leqslant x\sum_{n\leqslant 1/x}n^{-1/2}\operatorname*{Max}_{n\leqslant t<+\infty}\{t^{-1/2}L(t)\}\leqslant$$

$$\leqslant x\sum_{n\leqslant 1/x}n^{-1}\overline{L}_2(n)\leqslant x\left[\overline{L}_2(1)+\int_1^{1/x}t^{-1}\overline{L}_2(t)\,dt\right]\leqslant$$

$$\leqslant x\left[\overline{L}_2(1)+M_{10}\int_1^{1/x}t^{-1}L(t)\,dt\right]\leqslant x\left[\overline{L}_2(1)+M_{11}L\left(\frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x}\right]\leqslant$$

$$\leqslant M_{12}\,x\,L\left(\frac{1}{x}\right)\log\frac{1}{x},$$

$$B^{(2)}(x)=\sum_{n>1/x} n^{-2} L(n) \leqslant \operatorname*{Max}_{1/x\leqslant t<+\infty} \{t^{-1/2} L(t)\} \sum_{n>1/x} n^{-3/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{x}\right)^{-1/2} \bar{L}_2\left(\frac{1}{x}\right) \int_{1/x-1}^{+\infty} t^{-3/2}\, dt \leqslant M_{13}\, xL\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant M_{14}\, xL\left(\frac{1}{x}\right) \log\frac{1}{x},$$

$$B(x) \leqslant M_{15}\, xL\left(\frac{1}{x}\right) \log\frac{1}{x},$$

où l'on a utilisé la condition (6) et sa conséquence immédiate: il existe un $T>0$ tel que, pour x suffisamment grand,

$$\bar{L}_2(1) < TL(x) \log x.$$

2° On déduit de l'inégalité obtenue, en appliquant le lemme, où le rôle de $L(x)$ est joué par la fonction à croissance lente $L(x) \log x$, que

$$L\left(\frac{1}{x}\right) \log\frac{1}{x} f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi) \tag{16}$$

entraîne la convergence absolue de la série (7).

3° Si la condition

$$\int_1^x t^{-1} L(t)\, dt > A \log x > 0, \quad x > 1$$

est satisfaite, de même que les conditions que

$x^{-2} L(x)$ ne croît pas pour x suffisamment grand, ou que

$x^{-1} L(x)$ ne croît pas pour x suffisamment grand

respectivement, en partant des hypothèses correspodantes sur la série (7), on aboutira, de la même façon que dans la démonstration précédente, à l'expression

$$\frac{2}{\pi^2} x \left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 m^{-2} L(m) - \left(\frac{\pi}{x}-\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{-2} L\left(\frac{\pi}{x}-1\right) + 2\int_m^{\pi/x-1} t^{-1} L(t)\, dt\right], \tag{17}$$

que l'on peut minorer maintenant par ($M_{16} > 0$, $M_{17} > 0$)

$$\frac{2}{\pi^2} x \left[2 M_{16} L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x} - M_{17} L\left(\frac{1}{x}\right) \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \left(2 M_{16} - \frac{M_{17}}{\log 1/x} \right) x L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x} \geqslant$$

$$\geqslant M_{18}\, x L\left(\frac{1}{x}\right) \log \frac{1}{x}, \qquad M_{18} > 0. \tag{18}$$

4° En supposant la convergence absolue de la série (7), on obtient l'expression (17) où $L(x)$ est remplacé par $L_1(x)$. Cette expression peut être alors de nouveau minorée par l'expression (18).

5° L'application du lemme, de la même façon qu'à 2°, d'après les résultats 3° et 4°, prouve alors que l'hypothèse correspondante sur la série (7) entraîne (16).

7. Démonstration du théorème 6. Nous remarquons que des propriétés supposées de la fonction $L(x)$ résulte que $L(x)$ ne croît pas pour x suffisamment grand et tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$ et aussi que

$$x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathrm{L}(0, \pi).$$

On en conclut que les deux conditions dont le théorème 6 établit l'équivalence sont satisfaites pour $g(x) = \text{const}$, et l'on peut, comme dans la démonstration du théorème 1, supposer, sans restreindre la généralité, que $g(\pi - 0) = 0$, d'où, d'après (10), la non-négativité des coefficients b_n. Par conséquent, pour que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} L(n) \sin nx \right] dx$$

converge (absolument), il faut et il suffit que l'intégrale écrite existe.

Or, Aljančić, Bojanić et Tomić [7] ont démontré que, si $L(x)$ est convexe et $L(x) \to 0$, $x \to +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(n) \sin nx \sim x^{-1} L\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \to +0.$$

Donc, d'après la conclusion précédente et les propriétés de notre fonction $L(x)$, le théorème 6 est vrai.

(Reçu le 18 juin 1958)

Remarque faite pendant l'épreuve de la présente note — Récemment Chen-Yung-Ming ([10], p. 110) a démontré que

$$(C) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n\psi(n^{-1})} < +\infty \text{ si et seulement si } \frac{f(x)}{\psi(x)} \in L(0,\pi),$$

$$(D) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n\psi(n^{-1})} < +\infty \text{ si et seulement si } \frac{g(x)}{\psi(x)} \in L(0,\pi),$$

où la fonction $\psi(x)$ est définie dans $(0,\pi)$ et telle que

1° $\psi(x)(x) > 0$ pour $0 < x < \pi$,

2° $\psi(x)$ croît strictement pour $0 < x < \pi$,

3° $\dfrac{\psi(x)}{x^{1-\delta}}$ décroît strictement pour $0 < x < \pi$, si $\delta > 0$ est suffisamment petit.

En posant

$$\psi(x) = x^{1-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

les théorèmes (C) et (D) se réduisent respectivement à (B) et (A), avec $0 < \gamma < 1$. Nous allons montrer que les théorèmes (C) et (D) ne contiennent pas nos théorèmes 2 et 1 respectivement, avec $0 < \gamma < 1$. En effet, pour qu'ils les contiennent, il faut (et il suffit) que la fonction

$$h(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{L\left(\dfrac{1}{x}\right)}, \quad 0 < \gamma < 1,$$

satisfasse aux conditions 1°—3° dès que $L(x)$ est une fonction à croissance lente. Ce n'est pas cependant le cas, comme le montre l'exemple de la fonction à croissance lente

$$L(x) = \log x + \sin x, \text{ pour } x \text{ suffisamment grand.}$$

En effet, si x est suffisamment grand, en posant,

$$\omega(x) \overset{def}{=} \frac{1}{h\left(\frac{1}{x}\right)} = x^{1-\gamma}(\sin x + \log x),$$

on a

$$\omega'(x) = x^{1-\gamma}\left[\cos x + \frac{1+(1-\gamma)(\sin x + \log x)}{x}\right] = x^{1-\gamma}[\cos x + o(1)],$$

et, par conséquent, $h(x)$ n'est monotone dans aucun intervalle à droite de la valeur $x=0$.

De même, notre théorème 6 n'est pas contenu dans (D). En effet, la fonction à croissance lente

$$L(x) = \frac{1}{\log^2 x}, \quad \text{pour } x \text{ suffisamment grand},$$

satisfait aux conditions que lui impose le théorème 6, tandis que

$$h(x) = \frac{x}{L\left(\frac{1}{x}\right)} = x \log^2 x$$

ne satisfait pas à la condition 3°.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Zygmund — Sur les fonctions conjuguées. *Fundamenta Math.* **13** (1929), p. 284—303, en particulier p. 299—301.

[2] Béla Sz.-Nagy — Séries et intégrales de Fourier des fonctions non bornées. *Acta. sc. matematicarum* (Szeged), **XIII** (1949), p. 118—135.

[3] R. P. Boas — Integrability of trigonometric series (III). *Quart. J. of Math.* (Oxford) (2), **5** (1954), p. 71—76.

[4] P. Heywood — On the integrability of functions defined by trigonometric series. *Quart. J. of Math.* (Oxford) (2), **5** (1954), p. 71—76.

[5] W. H. Young — On the Fourier series of bounded functions. *Proc. London. Math. Soc.* **12** (1913), p. 41—70.

[6] S. Aljančić, R. Bojanić, M. Tomić — Sur l'intégrabilité de certaines séries trigonométriqus. *Publ. Inst. Math. Acad Serbe sci.* **VIII** (1955), p. 67—84.

[7] S. Aljančić, R. Bojanič, M. Tomić — Deux théorèmes relatifs au comportement asymptotique des séries trigonométriques. *Zbornik radova SAN* **4** (1955), p. 15—26 (en serbe, sommaire en français)

[8] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière. *Bull. Soc. Math. France* **LXI** (1933), p. 55—62.

[9] Chen Yung-Ming — Some Asymptotic Properties of Fourier Constants and Integrability Theorems. *Math. Zeitschr.* **68** (1957), p. 227—244.

[10] Chen Yung-Ming — Some Further Asymptotic Properties of Fourier Constants, *Math. Zeitschr.* **69** (1958), p. 105—120.