SUR LES INVARIANTS DE LA TRANSFORMATION INTÉGRALE DE S. C. MEIJER

B. STANKOVIĆ (Novi Sad)

La transformation intégrale

$$\int_0^\infty K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,f(t)\,dt = F(z), \quad -1 < \nu < 1, \tag{1}$$

est définie par S. C. Meijer [3]. Le noyau $K_\nu(z)$ satisfait à la relation connue $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ ce qui nous permet de ne traiter la transformation (1) que pour $0 \leqslant \nu < 1$.

Dans cet article nous allons démontrer trois théorèmes sur le problème des invariants de la transformation (1), c'est-à-dire sur les solutions de l'équation intégrale:

$$\lambda \int_0^\infty K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,f(t)\,dt = f(z) \tag{2}$$

pour $0 < \nu < 1$. Le cas spécial $\nu = 0$ doit être traité un peu différemment à cause du comportement de la fonction $K_0(z)$ pour $z \to 0$.

THÉORÈME I. *Les fonctions:*

$$f(z) = C\left[z^{\alpha-1} + \lambda z^{-\alpha} Q(\alpha)\right], \tag{3}$$

où C est une constante arbitraire, α la racine de l'équation

$$\sin \alpha\pi = \frac{\pi^2 \lambda^2}{2} - \cos \nu\pi, \quad \nu - 1/2 < \operatorname{Re}\alpha < 3/2 - \nu, \tag{4}$$

et

$$Q(\alpha) = \int_0^\infty K_\nu(t)\sqrt{t}\,t^{\alpha-1}\,dt = 2^{\alpha-3/2}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+\nu+1/2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-\nu+1/2}{2}\right)$$

sont les invariants de la transformation (1).

Pour chaque λ *réel et* $\neq 0$ *l'équation* (4) *a des solutions* α *symétriques par rapport à la droite* $\operatorname{Re}\alpha = 1/2$. *Si* $\lambda^2 < \left(\frac{2}{\pi}\cos\frac{\nu\pi}{2}\right)^2$, *les solutions sont réelles et pour* $\lambda^2 > \left(\frac{2}{\pi}\cos\frac{\nu\pi}{2}\right)^2$ *elles sont imaginaires avec* $\operatorname{Re}\alpha = 1/2$. *Dans le cas* $\lambda^2 = \left(\frac{2}{\pi}\cos\frac{\nu\pi}{2}\right)^2$ *et* λ *positif la fonction* (3) *est* $f(x) = Cz^{-\frac{1}{2}}$, *et pour* λ *négatif:*

$$f(z) = z^{-1/2}[Q'(1/2) + (1 - \lambda\, Q(1/2)\, ln\, z].$$

THÉORÈME II. *Un invariant* $f(z)$ *de la transformation* (1) *qui satisfait aux deux conditions:*

1. *Dans chaque intervalle fini* $0 \leqslant x \leqslant \omega$ *la fonction* $f(x)$ *a au plus un nombre fini de discontinuités dans lesquelles l'intégrale:*

$$\int_0^\omega K_\nu(x_0 t)\sqrt{x_0 t}\,|f(t)|\,dt = F_\omega(x_0), \qquad 0 < \nu < 1,$$

converge pour tout $x_0 > 0$.

2. $$f(x) = O(x^{1/2 - \nu - \varepsilon}), \qquad x \to \infty,$$

peut être prolongé par la fonction analytique $\varphi(z)$ *régulière pour tout* $z \neq 0$. *La fonction* $\varphi(z)$ *satisfait aussi aux conditions:*

$$\varphi(z) = O(z^{1/2 - \nu - \varepsilon}),\ z \to \infty; \qquad \varphi(z) = O(z^{\nu - 3/2 + \varepsilon}),\ z \to 0.$$

THÉORÈME III. *Dans l'ensemble des fonctions qui satisfont aux conditions du théorème* II, *les invariants de la transformation* (1), *donnés par le théorème* I, *sont les seuls.*

Nous pouvons nous demander l'ensemble des fonctions, dans lequel nous affirmons l'unicité des invariants, est-il un ensemble „naturel" pour ce problème.

La condition 1. du théorème II n'est pas en question. C'est la condition 2. qui doit être analysée. Le théorème I nous donne la réponse; là nous allons démontrer que:

$$\int_0^\infty K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,f(t)\,dt = O(z^{1/2 - \nu}),\ z \to \infty,\ |\arg z| < \pi/2.$$

Démonstration du théorème I. — D'après un de mes articles antérieurs [4] les fonctions de la forme (3) sont les invariants de la transformation (1), où α satisfait à l'équation:

$$\lambda^2 Q(\alpha) Q(1-\alpha) - 1 = 0, \quad \nu - 1/2 < \operatorname{Re} \alpha < 3/2 - \nu.$$

En utilisant la relation connue $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$, cette dernière équation devient:

$$1 - \frac{\lambda^2 \pi^2}{1\,[\sin \alpha\pi + \cos \nu\pi]} = 0, \quad \nu - 1/2 < \operatorname{Re} \alpha < 3/2 - \nu.$$

Le dénominateur dans cette équation ne s'annule pas pour $\nu - 1/2 < \operatorname{Re} \alpha < 3/2 - \nu$ et nous pouvons la ramener à la relation (4).

La fonction $\sin \alpha\pi$ et l'intervalle $\nu - 1/2 < \operatorname{Re} \alpha < 3/2 - \nu$ sont symétriques par rapport à la droite $\operatorname{Re} \alpha = 1/2$; il s'ensuit qu'avec une solution α du problème (4) nous avons toujours aussi $1 - \alpha$.

La deuxième partie de ce théorème est une conséquence des propriétés de la fonction $\sin z$.

Pour faciliter la démonstration des théorèmes II et III nous allons d'abord traiter quelques théorèmes et lemmes qui peuvent aussi être intéressants indépendamment de la démonstration de ces deux théorèmes en question.

LEMME 1. *Soit $f(x)$ une fonction tel que:*

1. *Dans chaque intervalle fini $0 \leqslant x \leqslant \omega$ elle a au plus un nombre fini de discontinuités dans lesquelles l'intégrale:*

$$\int_0^\omega K_\nu(x_0 t) \sqrt{x_0 t}\, |f(t)|\, dt = F_\omega(x_0)$$

converge, où $x_0 > 0$;

2. *Il existe pour $z = x_0$*

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega K_\nu(zt) \sqrt{zt}\, f(t)\, dt = \int_0^\infty K_\nu(zt) \sqrt{zt}\, f(t)\, dt. \tag{5}$$

Alors l'intégrale (5) *converge uniformément dans chaque domaine borné O appartenant au demi-plan* $\operatorname{Re} z > 0$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que d'après la supposition 1. et la propriété*) 4. de la fonction $K_\nu(z)$ l'intégrale

$$\int_0^a t^{1/2-\nu}\,|f(t)|\,dt$$

converge.

Soit maintenant δ un nombre positif tel que l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant \delta$ ne contienne pas de discontinuités $\neq 0$ de la fonction $f(x)$; alors on peut trouver un nombre η tel que $\eta < \delta$ et:

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} K_\nu(zt)\,\sqrt{zt}\,f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{\eta'}^{\eta''} |K_\nu(zt)|\,\sqrt{|zt|}\;|f(t)|\,dt$$

$$\leqslant \frac{2^{\nu-1}\,\Gamma(\nu)+\mu^2}{|z|^{\nu-1/2}} \int_{\eta'}^{\eta''} t^{1/2-\nu}\,|f(t)|\,dt < \varepsilon$$

pour tous $0 < \eta' < \eta'' \leqslant \eta$ et $z \in \overline{O}$

Soit encore (δ', δ'') l'intervalle qui contient le seul point de discontinuité t_0 de la fonction $f(t)$; alors

$$\left|\int_{t_0 \mp \eta'}^{t_0 \mp \eta''} K_\nu(zt)\,\sqrt{zt}\,f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{t_0 \mp \eta'}^{t_0 \mp \eta''} |K_\nu(zt)|\,\sqrt{|zt|}\;|f(t)|\,dt$$

$$\leqslant A \int_{t_0 \mp \eta'}^{t_0 \mp \eta''} |f(t)|\,dt < \varepsilon$$

où $A = \sup |K_\nu(zt)|\,\sqrt{|zt|}$; $z \in \overline{O}$, $t \in (t_0 \mp \eta', t_0 \mp \eta'')$.

Enfin on peut trouver un nombre ω indépendant de $z \in \overline{O}$, tel que

$$\left|\int_{\omega'}^{\omega''} K_\nu(zt)\,\sqrt{zt}\,f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

pour tout $\omega'' > \omega' \geqslant \omega$ et $\varepsilon > 0$.

---

*) Voir la fin de cet article.

D'après la propriété 5. et 6. de $K_\nu(z)$

$$\int_{\omega'}^{\omega''} K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,f(t)\,dt = \sqrt{\frac{z}{x_0}}\,\frac{K_\nu(zt)}{K_\nu(x_0 t)}\,J(t)\Big|_{\omega'}^{\omega''} -$$

$$-\int_{\omega'}^{\omega''} \sqrt{\frac{z}{x_0}}\left[\frac{K_\nu(zt)}{K_\nu(x_0 t)}\right]_t' J(t)\,dt = O\left(e^{-\omega'(\mathrm{Re}\,z - x_0)}\right).$$

où $J(t) = \int_{\omega'}^{t} K_\nu(x_0\tau)\sqrt{x_0\tau}\,f(\tau)\,d\tau.$

THÉORÈME 1. *Soient les conditions du lemme* 1 *remplies, alors:*

$$\int_0^\infty K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,f(t)\,dt = o\left(z^{1/2-\nu}\right)$$

pour $z \to \infty$, $|\arg z| < \pi/2$.

Démonstration. — Du lemme 1 il s'ensuit la convergence de l'intégrale de cette transformation pour tout z, $\mathrm{Re}\,z > x_0$. Soit maintenant $\delta/\mathrm{Re}\,z$ un nombre positiv tel que l'intervalle $0 < x < \delta/\mathrm{Re}\,z$ ne contienne pas des discontinuités $\neq 0$ de la fonction $f(x)$, alors

$$\left|\int_0^{\delta/\mathrm{Re}\,z} K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^{\delta/\mathrm{Re}\,z} K_\nu(\mathrm{Re}\,z\,t)\sqrt{|zt|}\,|f(t)|\,dt$$

$$\leqslant \frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)+\mu^2}{|z|^{\nu-1/2}\cos^\nu\psi}\int_0^{\delta/\mathrm{Re}\,z} t^{1/2-\nu}|f(t)|\,dt$$

$$< \varepsilon\,|z|^{1/2-\nu}.$$

Il nous reste la deuxième partie de l'intégrale

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{\delta/\mathrm{Re}\,z}^{\omega} K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,f(t)\,dt =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{z}{x_0}}\,\frac{K_\nu(zt)}{K_\nu(x_0 t)}\,J(t)\Big|_{\delta/\mathrm{Re}\,z}^{\omega} - \int_{\delta/\mathrm{Re}\,z}^{\omega}\sqrt{\frac{z}{x_0}}\left[\frac{K_\nu(zt)}{K_\nu(x_0 t)}\right]_t' J(t)\,dt;\right.$$

d'après la propriété 6.,

$$\leqslant \frac{c}{\cos^{\nu}\psi} J\left(\frac{\delta}{\operatorname{Re} z}\right)|z|^{1/2-\nu} + \int_{\delta/\operatorname{Re} z}^{\infty} \sqrt{\frac{z}{x_0}} \left[\frac{K_\nu(zt)}{K_\nu(x_0 t)}\right]' J(t)\, dt = o(z^{1/2-\nu})$$

où $J(t) = \int_0^t K_\nu(x_0\tau)\sqrt{x_0\tau} f(\tau)\, d\tau$.

THÉORÈME 2. *Soient les conditions* 1. *et* 2. *du lemme* 1 *remplies pour tout* $x_0 > 0$ *et soit*

$$f(t) = O(t^\alpha), \quad t\to\infty,$$

ou $\qquad \alpha > \nu - 3/2$

$$f(t) = o(t^\alpha), \quad t\to\infty,$$

alors

$$F(z) = O(z^{-1-\alpha}), \quad z\to 0,$$

ou $\qquad |\arg z| < \pi/2$

$$F(z) = o(z^{-1-\alpha}), \quad z\to 0,$$

respectivement.

Démonstration. — Les suppositions nous permettent d'écrire la fonction $f(x)$ sous la forme $f(x) = x^\alpha g(x)$, où, dans le premier cas, $g(x)\to C$, $x\to\infty$ et dans le deuxième $g(x)\to 0$, $x\to\infty$,

Partageons l'intégrale de la transformation en deux parties:

$$\int_0^\infty K_\nu(zt)\sqrt{zt} f(t)\, dt = \int_0^\delta + \int_\delta^\infty K_\nu(zt)\sqrt{zt}\, t^\alpha g(t)\, dt.$$

Pour la première partie on a:

$$\left|\int_0^\delta K_\nu(zt)\sqrt{zt} f(t)\, dt\right| \leqslant A|z|^{1/2-\nu}\int_0^\delta t^{1/2-\nu}|f(t)|\, dt = O(z^{1/2-\nu}) = o(z^{-1-\alpha}).$$

Quant à la deuxième partie, d'après la propriété 9 et 7

$$\left|\int_\delta^\infty K_\nu(zt)\sqrt{zt}\, g(t)\, t^\alpha\, dt\right| \leqslant \int_\delta^\infty K_\nu(\operatorname{Re} zt)\sqrt{|zt|}\,|g(t)|\, t^\alpha\, dt$$

$$\leqslant \operatorname*{Max}_{\delta\leqslant t\leqslant\infty} g(t)\int_{\delta \operatorname{Re} z}^\infty K_\nu(\tau)\frac{|z|^{1/2}}{(\operatorname{Re} z)^{3/2+\alpha}}\tau^{\alpha+1/2}\, d\tau$$

$$\leqslant \frac{\operatorname*{Max}_{\delta\leqslant t\leqslant\infty} g(t)}{(\cos\psi)^{\alpha+3/2}}\,\frac{1}{|z|^{\alpha+1}}\int_0^\infty K_\nu(\tau)\,\tau^{\alpha+1/2}\, d\tau.$$

Nous avons supposé $\alpha > \nu - 3/2$; pour ces valeurs de α: $1/2 - \nu > - \alpha - 1$. Le théorème 2 est ainsi démontré.

THÉORÈME 3. *Supposons les conditions du lemme* 1 *remplies pour tout* $x_0 > 0$, *alors un invariant* $f(z)$ *de la transformation* (1) *tel que* $f(x) = O(x^{1/2-\nu-\varepsilon})$, $x \to \infty$, $\varepsilon > 0$, *satisfait aussi à l'équation:*

$$f(s) = \frac{\lambda^2}{s}\int_0^\infty N\left(\frac{t}{s}\right) f(t)\,dt \tag{6}$$

pour $\operatorname{Re} s > 0$, *où*

$$N\left(\frac{t}{s}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi\nu}{2\sin\nu\pi}, & t = s \\ \dfrac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(\dfrac{t}{s}\right)^{1/2-\nu}\dfrac{1-(t/s)^{2\nu}}{1-(t/s)^2}, & t \neq s. \end{cases}$$

D é m o n s t r a t i o n. — D'après le lemme 1. l'intégrale de la transformation (1) converge uniformément dans chaque domaine borné $\overline{O}$ appartenant au demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$, donc nous avons le droit d'intervertir l'ordre des intégrations:

$$\begin{aligned}\int_\eta^\omega K_\nu(sy)\sqrt{sy}\, f(y)\,dy &= \lambda\int_\eta^\omega K_\nu(sy)\sqrt{sy}\,dy\int_0^\infty K_\nu(yt)\sqrt{yt}\, f(t)\,dt \\ &= \lambda\int_0^\infty f(t)\,dt\int_\eta^\omega K_\nu(sy)\sqrt{sy}\,K_\nu(yt)\sqrt{yt}\,dy.\end{aligned} \tag{7}$$

La première partie de cette équation a une limite $\frac{1}{\lambda} f(s)$ pour $\omega \to \infty$ et $\eta \to 0$ pour tout s, $\operatorname{Re} s > 0$. La deuxième partie l'a aussi et on peut écrire:

$$\int_0^\infty f(t)\,dt\int_\eta^\omega K_\nu(sy)\sqrt{sy}\,K_\nu(yt)\sqrt{yt}\,dy =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\,dt\left\{\int_\eta^\infty - \int_\omega^\infty K_\nu(sy)\sqrt{sy}\,K_\nu(yt)\sqrt{yt}\,dy.\right.$$

Nous allons d'abord démontrer que

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_0^\infty f(t)\, dt \int_\omega^\infty K_\nu(sy) \sqrt{sy}\, K_\nu(yt) \sqrt{yt}\, dy = 0. \tag{8}$$

Pour cela nous tenons comptes des propriétés 9. et 10. et de la formule de la moyenne:

$$\lim_{\omega \to \infty} \left| \int_0^\infty f(t)\, dt \int_\omega^\infty K_\nu(sy) \sqrt{sy}\, K_\nu(yt) \sqrt{yt}\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\infty |f(t)|\, dt \int_\omega^\infty K_\nu(\mathrm{Re}\, sy) \sqrt{|sy|}\, K_\nu(yt) \sqrt{yt}\, dy$$

$$\leqslant \lim_{\omega \to \infty} \int^\infty |f(t)|\, dt \lim_{\Omega \to \infty} K_\nu(t\omega)(t\omega)^\nu \int_\omega^{T(\Omega, t)} K_\nu(\mathrm{Re}\, sy) \sqrt{ys}\, (yt)^{1/2-\nu} dy$$

$$\leqslant \lim_{\omega \to \infty} \omega^{\nu - 1/2} \int_0^\infty |f(t)|\, dt\, K_\nu(t\omega) \sqrt{t\omega} \lim_{\Omega \to \infty} \int_\omega^{T(\Omega, t)} K_\nu(\mathrm{Re}\, sy) \sqrt{ys}\, y^{1/2-\nu}\, dy$$

$$\leqslant C(s) \lim_{\omega \to \infty} \omega^{\nu - 1/2} \int_0^\infty |f(t)|\, K_\nu(t\omega) \sqrt{t\omega}\, dt,$$

où $C(s)$ est donné par la relation

$$\int_\omega^\infty K_\nu(\mathrm{Re}\, sy) \sqrt{|sy|}\, y^{1/2-\nu}\, dy = C(s)$$

et ne dépend plus de t parce que $T(\Omega, t) \geqslant \omega$ pour tout $t > 0$.

Enfin d'après le théorème 1

$$\int_0^\infty |f(t)|\, K_\nu(t\omega) \sqrt{t\omega}\, dt = o(\omega^{1/2-\nu})$$

et la relation (8) est établie.

Démontrons maintenant que:

$$\lim_{\eta\to 0}\int_0^\infty f(t)\,dt\int_\eta^\infty K_\nu(sy)\sqrt{sy}\,K_\nu(yt)\sqrt{yt}\,dy=$$

$$=\int_0^\infty f(t)\,dt\lim_{\eta\to 0}\int_\eta^\infty K_\nu(sy)\sqrt{ys}\,K_\nu(yt)\sqrt{yt}\,dy\,;$$

pour cela il suffit de montrer que

$$\lim_{\eta\to 0}\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\eta K_\nu(sz)\sqrt{sz}\,K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,dz=0.$$

$$\left|\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\eta K_\nu(sz)\sqrt{sz}\,K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^\infty |f(t)|\,dt\int_0^\eta K_\nu(\mathrm{Re}\,sz)\sqrt{|sz|}\,K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,dz$$

$$\leqslant\frac{A\,|s|^{1/2}}{(\mathrm{Re}\,s)^\nu}\int_0^\infty |f(t)|\,dt\int_0^\eta z^{1/2-\nu}K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,dz$$

$$\leqslant\frac{A\,|s|^{1/2}}{(\mathrm{Re}\,s)^\nu}\int_0^a+\int_a^\infty |f(t)|\,dt\int_0^\eta z^{1/2-\nu}K_\nu(zt)\sqrt{zt}\,dz.$$

On peut trouver un nombre a indépendant de η tel que

$$\int_a^\infty |f(t)|\,dt\int_0^{\eta t}\tau^{1/2-\nu}t^{\nu-1/2}K_\nu(\tau)\,\tau^{1/2}\frac{d\tau}{t}\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^\infty |f(t)|\,t^{\nu-3/2}\,dt\int_0^\infty K_\nu(\tau)\,\tau^{1-\nu}\,d\tau<\varepsilon/2.$$

Le nombre a une fois fixé, déterminons η de manière que

$$\int_0^a |f(t)|\,dt \int_0^\eta z^{1/2-\nu} K_\nu(zt) \sqrt{zt}\,dz \leqslant$$

$$\leqslant A \int_0^a |f(t)|\, t^{1/2-\nu}\,dt \int_0^\eta z^{1-2\nu}\,dz < \varepsilon/2.$$

Maintenant nous pouvons passer à la limite dans la relation (7):

$$\frac{1}{\lambda} f(s) = \lim_{\omega\to\infty,\,\eta\to 0} \int_\eta^\omega K_\nu(sz) \sqrt{sz}\, f(z)\,dz$$

$$= \lambda \int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^\infty K_\nu(sz) \sqrt{sz}\, K_\nu(zt) \sqrt{zt}\,dz\,.$$

Compte tenu de la propriété 8. nous obtenons ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 2. *Supposons que la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions du théorème 3. pour un $x_0 < 0$; alors*

$$\int_0^\infty \frac{1}{s} N\left(\frac{t}{s}\right) f(t)\,dt = O\,(^{1/2-\nu-\varepsilon}),\quad s\to\infty,\ \mathrm{Re}\, s > 0.$$

Démonstration. — Partageons l'intervalle d'intégration de la transformation (6) en deux. Pour la première intégrale on peut déterminer le nombre a de manière que $a < \mathrm{Re}\, s$, alors

$$\left| s^{\nu-1/2+\varepsilon} \int_0^a \frac{1}{s} N\left(\frac{t}{s}\right) f(t)\,dt \right| \leqslant |s|^{\nu-1/2+\varepsilon} \int_0^a \frac{1}{|s|} \left| N\left(\frac{t}{s}\right)\right| |f(t)|\,dt$$

$$\leqslant |s|^{\varepsilon-1} \int_0^a t^{1/2-\nu} |f(t)|\,dt.$$

Pour la deuxième intégrale

$$\left| s^{\nu-1/2+\varepsilon} \int_a^\infty \frac{1}{s} N\left(\frac{t}{s}\right) f(t)\, dt \right| \leqslant |s|^{\nu-1/2+\varepsilon} \int_a^\infty \frac{1}{|s|} \left| N\left(\frac{t}{s}\right)\right| |f(t)|\, dt$$

$$\leqslant \int_0^\infty \left| N\left(\frac{\tau}{e^{\theta i}}\right)\right| \tau^{1/2-\nu-\varepsilon}\, d\tau,$$

ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 3. *$f_1(s)$ étant une solution de l'équation* (6), *la fonction* $s^{-1} f(s^{-1})$ *le sera aussi.*

Démonstration — Il suffit de faire un changement de variables: $t = 1/\tau$, $s = 1/\sigma$ et compte tenu de la relation $\frac{1}{s} N\left(\frac{t}{s}\right) = \frac{1}{t} N\left(\frac{s}{t}\right)$, on a

$$\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\tau} N\left(\frac{\sigma}{\tau}\right) f\left(\frac{1}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma} N\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) f\left(\frac{1}{\tau}\right) \frac{1}{\tau}\, d\tau.$$

Une conséquence immédiate de ce lemme et du lemme précédent est le comportement d'une solution de l'équation (6) pour $s \to 0$, $|\arg s| < \pi/2$.

COROLLAIRE. *Sous les conditions du théorème* 3 *on a*

$$\int_0^\infty \frac{1}{s} N\left(\frac{t}{s}\right) f(t)\, dt = O\left(s^{\nu-3/2+\varepsilon}\right), \quad s \to 0, \quad |\arg s| < \pi/2.$$

LEMME 4. *Soient les conditions du théorème* 3 *satisfaites, et $f_1(s)$ étant une solution de l'équation* (6), *la fonction $f(se^{\theta i})$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ le sera aussi.*

Démonstration. — Soit C le contour d'intégration (fig. 1) et s un point du demi-plan $\mathrm{Re}\, s > 0$, alors

$$\int_C \frac{1}{s} N\left(\frac{\sigma}{s}\right) f(\sigma)\, d\sigma = 0.$$

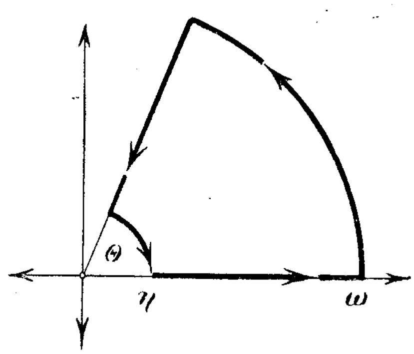

Fig. 1

On peut montrer que les intégrales prises le long des arcs du petit et du grand cercle sont nulles à la limite, c'est-à-dire

$$\left| \int_0^\theta \frac{1}{s} N\left(\frac{\omega e^{\varphi i}}{s}\right) f(\omega e^{\varphi i})\, \omega i e^{\varphi i}\, d\varphi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\theta |s^{1/2-\nu}|\, \omega^{\nu-1/2}\, |f(\omega e^{\varphi i})|\, d\varphi \to 0, \qquad \omega \to \infty,$$

d'après le lemme 2.

D'autre part

$$\left| \int_\theta^0 \frac{1}{s} N\left(\frac{\eta e^{\varphi i}}{s}\right) f(\eta e^{\varphi i})\, \eta i e^{\varphi i}\, d\varphi \right| \leqslant$$

$$\leqslant |s|^{1/2-\nu} \int_\theta^0 \eta^{3/2-\nu}\, |f(\eta e^{\varphi i})|\, d\varphi \to 0, \qquad \eta \to 0,$$

d'après le corollaire du lemme 3.

Il ne nous reste que les intégrales le long du segment (η, ω) et de la droite $\sigma = te^{\theta i}$, $\eta \leqslant t \leqslant \omega$,

$$\int_\eta^\omega \frac{1}{s} N\left(\frac{t}{s}\right) f(t)\, dt = \int_\eta^\omega \frac{1}{s} N\left(\frac{te^{\theta i}}{s}\right) f(te^{\theta i})\, e^{\theta i}\, dt;$$

à la limite, on a bien:

$$f(s) = \int_0^\infty \frac{1}{s} N\left(\frac{t}{s}\right) f(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{1}{s} N\left(\frac{te^{\theta i}}{s}\right) f(te^{\theta i})\, e^{\theta i}\, dt.$$

Remplaçons s par $\sigma e^{\theta i}$; on aura

$$f(\sigma e^{\theta i}) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma} N\left(\frac{t}{\sigma}\right) f(te^{\theta i})\, dt;$$

le lemme est donc établi.

LEMME 5. *Soit* $\varphi(z)$ *une fonction analytique, régulière pour tout* $z \neq 0$ *et soit:*

$$\varphi(z) = O(z^{1/2-\nu-\varepsilon}),\ z \to \infty;\ \varphi(z) = O(z^{\nu-3/2+\varepsilon}),\ z \to 0,$$

alors

$$|[e^{1/2\,z}\varphi(e^z)]^{(n)}| \leqslant \frac{A\,n!}{\pi\beta^n} e^{(1-\nu-\varepsilon)\beta}\mu(x),$$

où A *est une constante, et* $\mu(x)$ *est une fonction bornée pour* x *borné.*

Démonstration. — La fonction $e^{1/2\,z}\varphi(e^z)$ est régulière pour tout z. Partons d'une intégrale de Cauchy où de contour d'intégration C sert un rectangle (fig. 2):

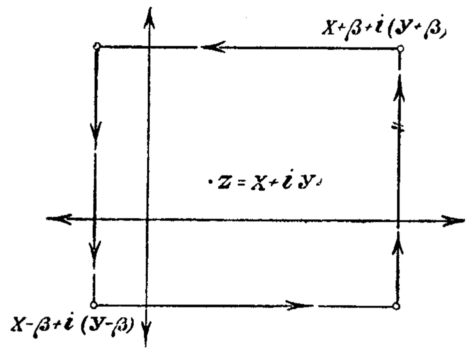

Fig. 2

$$[e^{1/2\,z}\varphi(e^z)]^{(n)} =$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{1/2\,w}\varphi(e^w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\left\{\int\limits_{x-\beta}^{x+\beta} \frac{e^{1/2[u+i(y-\beta)]}\varphi(e^{u+i(y-\beta)})}{[u+i(y-\beta)-z]^{n+1}}\,du + \right.$$

$$+\int\limits_{y-\beta}^{y+\beta} \frac{e^{1/2(x+\beta+iv)}\varphi(e^{x+\beta+iv})}{(x+i\beta+iv-z)^{n+1}}\,dv +$$

$$\left. +\int\limits_{x+\beta}^{x-\beta} \frac{e^{1/2[u+i(y+\beta)]}\varphi(e^{u+i(y+\beta)})}{[u+i(y+\beta)-z]^{n+1}}\,du + \int\limits_{y+\beta}^{y-\beta} \frac{e^{1/2(x-\beta+iv)}\varphi(e^{x-\beta+iv})}{(x-\beta+iv-z)^{n+1}}\,dv\right\}.$$

Le module de la fonction $\varphi(e^z)$, sous les conditions de l'énoncé, satisfait à l'inégalité:

$$|\varphi(e^z)| \leqslant A\,|e^{(1/2-\nu-\varepsilon)z} + e^{(\nu-3/2+\varepsilon)z}|.$$

Compte tenu de cette relation nous aurons

$$|[e^{1/2\,z}\varphi(e^z)]^{(n)}| \leqslant \frac{A\,n!}{\pi\beta^n} e^{(1-\nu-\varepsilon)\beta}\mu(x).$$

LEMME 6. *Pour* k *entier positif ou zéro*

$$\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty N(t)\,t^{-1/2}\,|\ln^k t|\,dt \leqslant \frac{2\,k!}{(1-\nu)^{k+1}}.$$

Démonstration. — Partageons l'intégrale de l'énoncé en deux:

$$\int_0^\infty N(t)\, t^{-1/2}\,|\ln^k t|\, dt = \int_0^1 + \int_1^\infty N(t)\, t^{-1/2}\,|\ln^k t|\, dt.$$

Considérons la première:

$$\left|\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^1 N(t)\, t^{-1/2}\ln^k t\, dt\right| \leqslant (-1)^k \int_0^1 t^{-\nu}\ln^k t\, dt.$$

Faisons le changement de variable: $t=e^{-\tau}$, on obtient:

$$(-1)^k \int_0^1 t^{-\nu}\ln^k t\, dt = \int_0^\infty e^{-(1-\nu)\tau}\tau^k\, d\tau$$

et puis en remplaçant $(1-\nu)\tau$ par x, il vient:

$$= \frac{1}{(1-\nu)^{k+1}}\int_0^\infty e^{-x} x^k\, dx = \frac{k!}{(1-\nu)^{k+1}}$$

d'où résulte la correspondance:

$$\left|\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^1 N(t)\, t^{-1/2u}\ln^k t\, dt\right| = \frac{k!}{(1-\nu)^{k+1}}.$$

Le procédé est le même pour l'autre intégrale.

LEMME 7. *Soit $f(z)$ un invariant de la transformation* (1) *qui satisfait aux conditions du lemme* 5, *alors*

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^z} N\left(\frac{t}{e^z}\right) f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} N(e^u)\, e^{1/2 u}\,\frac{u^n}{n!}\, du\, e^{-1/2 z}\,[e^{1/2 z} f(e^z)]^{(n)}. \tag{9}$$

Démonstration. — Dans l'intégrale de la transformation (6) faisons le changement de variables $t=e^\tau$, $s=e^z$, puis $\tau - x = u$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(e^u)\, f(e^{u+x})\, e^u\, du = f(e^x).$$

La fonction $e^{1/2(u+x)} f(e^{u+x})$ peut être développée en série de Taylor

$$e^{1/2(u+x)} f(e^{u+x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} [e^{1/2x} f(e^x)]^{(n)}$$

et la dernière intégrale nous donne:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(e^u) e^u f(e^{u+x}) du = \int_{-\infty}^{\infty} N(e^u) e^{1/2(u-x)} du \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} [e^{1/2x} f(e^x)]^{(n)}.$$

Nous pouvons montrer qu'on peut intégrer cette série terme à terme. Pour cela, comme l'on sait, il suffit de montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| N(e^u) e^{1/2(u-x)} \frac{u^n}{n!} \right| du \, | [e^{1/2x} f(e^x)]^{(n)} | . \tag{10}$$

Compte tenu des lemmes précédents nous avons

$$a_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| N(e^u) e^{1/2(u-x)} \frac{u^n}{n!} du \right| [e^{1/2x} f(e^x)]^{(n)} |$$

$$\leqslant \frac{2A\mu(x)\, n!}{\pi\beta^n (1-\nu)^{n+1}} e^{(1-\nu-\varepsilon)\beta} \sim \frac{2A(n+1)^{n+1/2} \mu(x)}{\pi\beta^n (1-\nu)^{n+1} e^{n+1}} e^{(1-\nu-\varepsilon)\beta},$$

où A est une constante indépendante de n et $\mu(x)$ une fonction bornée pour x borné.

La fonction $e^{1/2x} f(e^x)$ étant régulière pour tout z, nous pouvons poser $\beta = \frac{n}{1-\nu}$, d'où il s'ensuit que

$$a_n(x) \sim C\sqrt{n+1}\, e^{-\varepsilon n/(1-\nu)}$$

et la convergence de la série en question (10) est démontrée pour tout x.

Ainsi nous avons établi la relation (9) pour tout $z=x$ réel. La relation (9), comme l'on sait, reste valable aussi dans chaque domaine commun où ces deux fonction sont régulières.

Nous pouvons maintenant passer aux démonstrations des théorèmes II et III.

Démonstration du théorème II. — Du théorème 3 il s'ensuit que toute solution de l'équation intégrale (2) qui satisfait aux conditions du théorème II, satisfait aussi à l'équation (6) pour tout s, $\operatorname{Re} s > 0$, Il est facile à voir que, sous les conditions faites sur la fonction $f(x)$, la fonction

$$\lambda^2 \int_0^\infty \frac{1}{s} N\left(\frac{t}{s}\right) f(t)\, dt = g(s) \tag{11}$$

est une fonction analytique, régulière pour tout s, $\operatorname{Re} s > 0$. Le lemme 4 nous permet de prolonger une solution de l'équation (2) en dehors de $\operatorname{Re} s > 0$. D'après le lemme 2 et le corollaire du lemme 3 ce procédé peut être répété de manière qu'on obtient $s=0$ comme singularité unique de la fonction $\varphi(s)$. La deuxième partie de ce théorème, c'est-à-dire le comportement de la fonction $\varphi(s)$ est une conséquance immédiate du lemme 2, du corollaire du lemme 3 et du lemme 4.

Démonstration du théorème III. — La Théorie des opérateurs analytiques, dont les fondements sont donnés dans mon article antérieur [4], peut nous être très utile ici.

Le lemme (7) nous affirme

$$\int_0^\infty e^{-z} N(t e^{-z}) f(t)\, dt = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \frac{(D+1/2)^\nu}{\nu!} f(e^z) = \mathbf{A}(D) f(e^z)$$

où

$$A_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} N(e^u)\, e^{1/2 u}\, u^n\, du$$

et l'équation intégrale (6) prend la forme

$$[1 - \lambda^2 \mathbf{A}(D)] f(e^z) = 0.$$

Soient $z=\alpha$ et $z=1-\alpha$ les solutions de l'équation $1-\lambda^2 A(z)=0$, telles que $\nu-3/2 < \operatorname{Re} \alpha < 1/2 - \nu$, alors l'équation (12) s'écrit

$$[\mathbf{B}(D)(D-\alpha)(D-1+\alpha)] f(e^z) = 0,$$

où

$$\mathbf{B}(D) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B^{(\nu)}(-1/2)}{\nu}(D+1/2)^{\nu}$$

est un opérateur analytique tel que la fonction $B(z)$ ne s'annule pas dans le domaine $\nu-3/2<\operatorname{Re} z<1/2-\nu$. C'est pourquoi

$$\frac{1}{\mathbf{B}(D)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{2}{B(-1/2)}\right]^{(\nu)}\frac{(D+1/2)^{\nu}}{\nu!}$$

est aussi l'opérateur analytique.

Nous allons montrer que de la relation (13) il vient

$$\frac{1}{\mathbf{B}(D)}\{[\mathbf{B}(D)(D-\alpha)(D-1+\alpha)]f(e^{z})\}=[(D-\alpha)(D-1+\alpha)]f(e^{z})=0.$$

Le produit de l'opérateur $1/\mathbf{B}(D)$ et zéro est zéro. Il reste ainsi à montrer

$$\frac{1}{\mathbf{B}(D)}\{[B(D)(D-\alpha)(D-1+\alpha)]f(e^{z})\}=[(D-\alpha)(D-1+\alpha)]f(e^{z})\,. \qquad (14)$$

Posons $g(z)=(D-\alpha)(D-1+\alpha)f(e^{z})$, alors l'équation (14) prend la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{B(-1/2)}\right]^{(k)}\frac{(D+1/2)^{k}}{k!}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}B^{(\nu)}(-1/2)^{\nu}\frac{(D+1/2)^{\nu}}{\nu!\,k!}\,g(z)\right]=g(z).$$

Considérons la première partie de cette relation. La série qui est entre les crochets est uniformément convergente dans tout domaine borné et fermé et on a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{B(-1/2)}\right]^{(k)}\sum_{\nu=0}^{\infty}B^{(\nu)}(-1/2)\frac{(D+1/2)^{\nu}}{\nu!\,k!}\,g(z)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{B(-1/2)}\right]^{(k)}\sum_{j=k}^{\infty}B^{(j-k)}(-1/2)\,\frac{(D+1/2)^{j}}{k!\,(j-k)!}\,g(z)\,.$$

En posant

$$A_{jk}=\left[\frac{1}{B(-1/2)}\right]^{(k)}[B(-1/2)]^{(j-k)}\frac{(D+1/2)^{j}}{k!\,(j-k)!}\,g(z),\quad A_{jk}=0,\quad j<k;$$

$$y_{\mu}=\sum_{k=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{\infty}A_{jk};\quad z_{\nu}=\sum_{j=0}^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}A_{jk}\,,$$

nous voyons que notre but est de montrer la validité de la relation $\lim\limits_{\mu \to \infty} y_\mu = \lim\limits_{\nu \to \infty} z_\nu$. D'après un théorème de T. J. I'A. Bromwich [1], il suffit dans ce cas de montrer que pour tout $\eta > 0$ et tout m_0 on peut trouver $m \geqslant m_0$ et n de manière que

$$\left| \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} - \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{m} A_{jk} \right| < \eta,$$

pour tout $\nu \geqslant n$:

$$\left| \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} - \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{m} A_{jk} \right| = \left| \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{j} A_{jk} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{j} A_{jk} - \sum_{j=m+1}^{\nu} \sum_{k=0}^{m} A_{jk} \right|$$

$$= \left| \sum_{j=m+1}^{\nu} \sum_{k=0}^{j} A_{jk} - \sum_{j=m+1}^{\nu} \sum_{k=0}^{m} A_{jk} \right|.$$

Pour tout $j \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{j} j!\, A_{jk} = (D+1/2)^j g(z) \left[B(-1/2) \frac{1}{B(-1/2)} \right]^{(j)} = 0$$

et par suite, il ne nous reste à montrer que $\left| \sum\limits_{j=m+1}^{\nu} \sum\limits_{k=0}^{m} A_{jk} \right| < \eta$ pour tout $\nu \geqslant n$ et $m \geqslant m_0$

$$\left| \sum_{j=m+1}^{\nu} \sum_{k=0}^{m} A_{jk} \right| = \left| \sum_{j=m+1}^{\nu} \left[\frac{1}{B(-1/2)} \right]^{(k)} [B(-1/2)]^{(j-k)} \frac{1}{(j-k)!\, k!} (D+1/2)^j g(z) \right|$$

$$\leqslant \sum_{j=m+1}^{\nu} \left| \left[\frac{1}{B(-1/2)} \right]^{(k)} \right| \left| [B(-1/2)]^{(j-k)} \right| \frac{(j+2)!}{\pi \beta^{j+2} (j-k)!\, k!} e^{(1-\nu-\varepsilon)\beta}.$$

Compte tenu de l'inégalité de Cauchy

$$\leqslant \sum_{j=m+1}^{\nu} \frac{C}{R^j} \sqrt{j+3}\, e^{-(\varepsilon-\delta) j} (1-\nu+\delta)^j \leqslant C \sum_{j=m+1}^{\nu} \sqrt{j+3}\, e^{-(\varepsilon-\delta) j} < \eta$$

pour m_0 assez grand, et $\varepsilon - \delta > 0$.

Ainsi les invariants de la transformation (6), c'est-à-dire les invariants de la transformation (1) satisfont à l'équation

$$[(D-\alpha)(D-1+\alpha)]\, f(e^z) = 0.$$

Mais les solutions de cette équation ne nous donnent que les invariants précisés dans le théorème I.

Pour finir nous allons donner les propriétés de la fonction $K_\nu(z)$ dont nous nous sommes servi dans cet article. Ces propriétés ont été empruntées au livre bien connu [2] ou elles sont un peu modifiées.

1. $K_\nu(z) \neq 0, \ |\arg z| < \pi/2;$ 2. $K_{\nu-1}(z) + \frac{\nu}{z} K_\nu(z) = -K'_\nu(z);$

3. $K_\nu(z) \sim e^{-z}\sqrt{\frac{\pi}{2z}}, \ z \to \infty, \ -\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2};$

4. $K_\nu(z) \sim 2^{\nu-1}\frac{\Gamma(\nu)}{z^\nu}, \ z \to 0;$ 5. $\frac{K_\nu(zt)}{K_\nu(x_0 t)} = O(e^{-t(\operatorname{Re} z - x_0)}), \ t \to \infty;$

6. $\left[\frac{K_\nu(zt)}{K_\nu(x_0 t)}\right]'_t = O(e^{-t(\operatorname{Re} z - x_0)}), \ t \to \infty;$

7. $$\int_0^\infty t^{\rho-1} K_\nu(xt)\sqrt{xt}\,dt = 2^{\rho-3/2} x^{-\rho}\,\Gamma\left(\frac{\rho+\nu+1/2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu+1/2}{2}\right),$$
$$\operatorname{Re}\rho > \operatorname{Re}\nu - 1/2, \qquad \operatorname{Re} x > 0;$$

8. $$\int_0^\infty K_\nu(sx)\sqrt{sx}\,K_\nu(xt)\sqrt{x\,t}\,dx =$$
$$= \frac{1}{s} N\left(\frac{t}{s}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi\nu}{2\sin\nu\pi}\dfrac{1}{s}, & t = s \\[2ex] \dfrac{\pi}{2\sin\nu\pi}\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{t}{s}\right)^{1/2-\nu}\dfrac{(1-t/s)^{2\nu}}{1\,(t/s)^2}, & t \neq s \end{cases}$$

9. $$K_\nu(az) = \frac{a^\nu}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{z}{2}\left(t+\frac{a^2}{t}\right)} t^{-\nu-1}\,dt, \ \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re} a^2 z \geqslant 0$$
$$|K_\nu(az)| \leqslant K_\nu(\operatorname{Re} za), \ a \text{ réel}.$$

10. $[z^\nu K_\nu(z)]' = -z^\nu K_{\nu-1}(z)$, c'est-à-dire la fonction $xK(x)$ est une fonction monotone.

(Reçu le 23 april 1958)

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. J. I'A. Bromwich — Note on double limits and on the inversion of a repeated infinite integral, *Proc. London Math. Soc.* (2) **1** (1904), p. 176.

[2] A. Erdélyi — Higher Transcendental Functions, v. **2** (1953), pp. 78—106.

[3] C. S. Meijer — Über eine Erweiterung der Laplace-Transformation I, II, *Proc. Amsterdam Akad. Wet.* **43** (1940), 599—608, 702—711.

[4] B. Stanković — Invariante opšte klase singularnih integralnih transformacija, *Annuaire de la Fac. d. sci. Novi Sad* **2** (1957) 357—372 (en serbe).