SUR LES POLYNÔMES DE FEJÉR[1]

M. TOMIĆ (Belgrade)

SOMMAIRE — On donne une suite de propriétés des polynômes de la forme (1.1). Ces propriétés sont connues dans le cas des polynômes de Fejér, c. à. d. dans le cas où $a_\nu = 1/\nu$ (voir [3]). On établit ici les propriétés analogues sous les conditions plus générales imposées aux a_ν.

1. On entend par le polynôme de Fejér le polynôme réciproque

$$p_n(z) = a_n + a_{n-1}z + \ldots + a_1 z^{n-1} - a_1 z^n - a_2 z^{n+1} - \ldots - a_n z^{2n-1} \tag{1.1}$$

avec $a_\nu = 1/\nu$. Dans une note [3], Herzog et Piranian ont donné une suite de propriétés de ces polynômes. Dans la présente note on établit les propriétés analogues pour des classes de polynômes plus généraux. Dans ce qui suit, nous désignerons les polynômes de Fejér par $p_n^*(z)$. Le § 2 contient les démonstrations de certains résultats relatifs aux polynômes $p_n(z)$ à savoir:

I. $p_n(e^{i\theta})$ *donné par* (1.1) *est uniformément borné si* 1) $a_\nu \downarrow 0$ et 2) $\nu a_\nu < M$ (§ 2.1).

Si $a_\nu \downarrow 0$, la condition 2) du théorème précédent c. à. d. $\nu a_\nu < M$ sera aussi nécessaire pour que $p_n(e^{i\theta})$ soit uniformément borné. Ceci résulte de

II. *Si* 1) $a_\nu \downarrow 0$, 2) $\nu a_\nu \equiv \lambda_\nu \uparrow \infty$;

3) *soit* λ_ν *une suite convexe ou concave, c. à. d.*

$$\Delta^2 \lambda_\nu = \lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2} \geqq 0 \text{ ou bien } \leqq 0 \text{ et}$$

---

[1]) Les résultats de cette note sont publiés en serbe sous le même titre dans *Glas de l'Acad. serbe des sciences*, t. **CCXXXII**, № 15 (1958), p. 29.

4) $n\,|\lambda_n - \lambda_{n+1}| = o(\lambda_n)$, *alors, lorsque* $n \to \infty$, *on aura*

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} 2\lambda_n \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt - \pi\,|\lambda_{n-1} - \lambda_0| + o(\lambda_n) &\leqq \operatorname*{Max}_\theta |p_n(e^{i\theta})| \leqq \\ &\leqq 2\lambda_n \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt + \pi\,|\lambda_{n-1} - \lambda_0| + o(\lambda_n), \end{aligned}$$

λ_0 *étant choisi de telle manière que*

$$\Delta^2 \lambda_0 = \lambda_0 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \geqq 0 \text{ ou bien } \leqq 0.$$ [2]

§ 2.2.1 contient une inégalité (2.10) d'où il résulte pour les polynômes de Fejér l'inégalité plus précise

$$(*)\qquad M_n = \operatorname*{Max}_\theta |p_n^*(e^{i\theta})| < 2\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Cette inégalité se trouve, sans preuve, dans [3].

III. *Dans chacun des secteurs*

$$z = re^{i\theta}, \qquad \frac{(2k-1)\pi}{n} < \theta < \frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1,$$

se trouvent exactement deux zéros de $p_n(z)$ *si* $\{a_\nu\}$ *est absolument monotone* (§ 2.3)[3] Dans [3] le même résultat est démontré pour $p_n^*(z)$.

IV. *Soit* n *pair et* a_ν *absolument monotone, satisfaisant en outre aux conditions*

$$1)\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

$$2)\ (a_n)^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{\rho(n)}{n}, \quad \rho(n) \to \infty,$$

---

[2]) Remarquons l'inégalité connue $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt > \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

[3]) C'est-à-dire si toutes les différences

$\Delta^k a_n = a_n - \binom{k}{1} a_{n+1} + \ldots + (-1)^k a_{n+k}$ sont positives, $k, n = 0, 1, 2, \ldots$.

alors pour deux zéros réels négatifs de $p_n(z)$ on a asymptotiquement (§ 2.4).

$$r = -1 \pm \frac{\rho(n)}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dans [3] le résultat semblable est obtenu pour $p_n^*(z)$.

V. § 2.5 contient l'extension suivante d'une inégalité de Rogosinski—Szegö [4].

Pour tout θ, *et* $n \geqq 2$ *on a*

$$T_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{2} + \cdots + \frac{\cos n\theta}{n+1} > K > \frac{1}{168}. \tag{1.3}$$

Dans [4] on constate qu'on a $T_n(\theta) \geqq 0$ pour tout n et θ. L'inégalité de Young [4]

$$R_n(\theta) = 1 + \frac{\cos\theta}{1} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \cdots + \frac{\cos n\theta}{n} > 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.3}$$

qui intervient dans la démonstration de la proposition II, se déduit aisément de ce qui précède. On donne dans § 2.5.1 la démonstration d'une inégalité un peu plus précise, à savoir $R_n(\theta) \geqq K' > 1/20$, $n \geqq 2$.

2.1. Démonstration de I. De (1.1) on a

$$p_n(e^{i\theta}) = -2ie^{i(n-1/2)\theta} C(n, \theta) \tag{2.1}$$

où l'on a posé

$$0 < C(n, \theta) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\theta = A_n \cos\frac{\theta}{2} - B_n \sin\frac{\theta}{2} \tag{2.2}$$

avec

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin k\theta, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta.$$

Le fait que $C(n, \theta)$ défini par (2.2), est positif si $\{a_\nu\}$ est strictement décroissant, c. à. d. si $\{a_\nu\}$ satisfait à la condition 1), est aussi un résultat de Fejér [2]. À cause de 1) l'estimation connue nous donne $|B_n| \leq a_1/\sin(\theta/2)$, autrement dit le dernier membre dans (2.2) sera uniformément borné pour tout θ. De la condition 1) on déduit aussi $|A_n| \leq a_1/\sin(\theta/2)$, c. à. d. A_n

sera borné pour $\theta > 0$, fixe. Quelque soit θ, prenons un entier p tel que $p \leqq \pi/\theta < p+1$. On a alors

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sin \nu\theta + \sum_{\nu=p+1}^{n} a_\nu \sin \nu\theta = J_1 + J_2 .$$

De $\sin\theta < \theta$ résulte

$$|J_1| = \left| \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu \sin \nu\theta \right| \leqq \theta \sum_{\nu=1}^{p} \nu a_\nu \leqq \theta \cdot p \cdot M \leqq M\pi . \tag{2.3}$$

D'autre part

$$|J_2| = \left| \sum_{\nu=p+1}^{n} a_\nu \sin \nu\theta \right| \leqq a_{p+1}/\sin(\theta/2).$$

En tenant compte de $\sin\theta > 2\theta/\pi$, $0 \leqq \theta < \pi/2$ il vient

$$|J_2| \leqq \pi \frac{1}{\theta} a_{p+1} \leqq (p+1)\, a_{p+1} \leqq M . \tag{2.4}$$

Les inégalités (2.3) et (2.4) démontrent la proposition I.

2.2. D é m o n s t r a t i o n de II. À cause de

$$A_n \cos\frac{\theta}{2} - B_n \sin\frac{\theta}{2} = A_n - 2A_n \sin^2\frac{\theta}{4} - B_n \sin\frac{\theta}{2} ,$$

en tenant compte de la condition 1) du théorème I, il s'ensuit que les deux derniers membres dans cette expression sont uniformément bornés. Or, si $\lambda_n \to \infty$, il faut trouver la borne supérieure de

$$A_n = a_1 \sin\theta + a_2 \sin 2\theta + \ldots + a_n \sin n\theta , \tag{2.2'}$$

où a_ν satisfont aux conditions 1)—4) du théorème II. Le polynôme (2.2') peut se mettre sous la forme

$$A_n = -\frac{\lambda_0 \theta}{2} + \int_0^\theta \left(\frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos t + \ldots + \lambda_n \cos nt\right) dt ,$$

λ_0 étant choisi de telle manière que la suite $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ soit convexe ou concave. Une sommation double par partie sous le signe de l'intégrale nous donne

$$A_n = -\frac{\lambda_0 \theta}{2} + \int_0^\theta \left(\sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_k \frac{\sin^2 (k+1)\, t/2}{2 \sin^2 t/2} + \right. \tag{2.5}$$

$$\left. + \Delta \lambda_{n-1} \frac{\sin^2 nt/2}{2 \sin^2 t/2} + \lambda_n \frac{\sin (n+1/2)\, t}{2 \sin t/2} \right) dt.$$

De là il vient

$$A_n \leqq \operatorname*{Max}_{0 \leqq \theta \leqq \pi} \left| \int_0^\theta \lambda_n \frac{\sin (n+1/2)\, t}{2 \sin t/2}\, dt \right| + \frac{\lambda_0 \theta}{2} +$$

$$+ \int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_k \frac{\sin^2 (k+1)\, t/2}{2 \sin^2 t/2} \right| dt + |\Delta \lambda_{n-1}| \int_0^\pi \frac{\sin^2 nt/2}{2 \sin^2 t/2}\, dt \leqq$$

$$\leqq \frac{\lambda_0 \theta}{2} + \frac{\pi}{2} \Big\{ |\lambda_{n-1} - \lambda_0| + (2n-1)\, |\lambda_{n-1} - \lambda_n| \Big\} +$$

$$+ \lambda_n \operatorname*{Max}_{0 \leqq \theta \leqq \pi} \left| \int_0^\theta \frac{\sin (n+1/2)\, t}{2 \sin t/2}\, dt \right|.$$

On aura maintenant

$$\int_0^\theta \frac{\sin (n+1/2)\, t}{2 \sin t/2}\, dt = \int_0^\theta \frac{\sin (n+1/2)\, t}{2\, t/2}\, dt +$$

$$\int_0^\theta \left\{ \frac{1}{2 \sin t/2} - \frac{1}{2\, t/2} \right\} \sin (n+1/2)\, t\, dt = \int_0^{(n+1/2)\,\theta} \frac{\sin t}{t}\, dt + \rho_n(\theta),$$

$\rho_n(\theta)$ tend vers zéro pour tout θ, lorsque $n \to \infty$, tandis que la dernière intégrale prend sa valeur maximum pour $(n+1/2)\,\theta = \pi$; par conséquent

$$\operatorname*{Max}_{\theta} \left| \int_0^\theta \frac{\sin (n+1/2)\, t}{2 \sin t/2}\, dt \right| = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\, dt + o(1), \quad n \to \infty.$$

La condition 4) de la proposition II donne

$$\operatorname*{Max}_{\theta} |A_n| \leqq \frac{\pi}{2} |\lambda_{n-1} - \lambda_0| + \lambda_n \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\, dt + o(\lambda_n),$$

et le fait que le premier membre dans (2.3) reste borné démontre la seconde partie de l'inégalité (1.2).

Le premier membre de l'inégalité (1.2) s'obtient d'une manière analogue, en partant de la minorante suivante, valable pour $0 < \theta < \pi$

$$|A_n| \geqq \lambda_n \left| \int_0^\theta \frac{\sin(n+1/2)\,t}{2\sin t/2}\,dt \right| -$$

$$-\frac{\lambda_0 \pi}{2} - \int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_k \frac{\sin^2 (k+1)\,t/2}{2\sin^2 t/2}\,dt \right| - |\Delta\lambda_{n-1}| \int_0^\pi \frac{\sin^2 nt/2}{2\sin^2 t/2}\,dt,$$

et, en observant que $|A_n(\theta)|$ et $\lambda_n\,|\ldots|$ sont les fonctions continues de θ.

2.2.1. Dans le cas $\lambda_\nu \equiv 1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, c. à. d. dans le cas du polynôme de Fejér $p_n^*(e^{i\theta})$, les estimations obtenues ne sont pas suffisamment précises. Dans ce cas, pour $0 < \theta < \pi$, nous écrirons

$$C(n,\theta) \equiv C_n(\theta) = A_n \cos\frac{\theta}{2} - B_n \sin\frac{\theta}{2} = A_n \cos\frac{\theta}{2} - B_n^* \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}, \tag{2.2'}$$

avec

$$A_n = \sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \cdots + \frac{\sin n\theta}{n},$$

$$B_n^* = 1 + \frac{\cos\theta}{1} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \cdots + \frac{\cos n\theta}{n},$$

et, comme nous allons montrer dans § 2.5, $B_n^* \geqq 0$ pour $n \geqq 0$.

En désignant maintenant par

$$A_n^* = \operatorname*{Max}_\theta \left| \int_0^\theta \frac{\sin(n+1/2)\,t}{2\sin t/2}\,dt \right| = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt + \rho_n(\theta), \tag{2.6}$$

on aura de (2.2') et (2.5) en tenant compte encore du fait que dans ce cas $\Delta^2\lambda_k = \Delta\lambda_{n-1} = 0$,

$$0 < C_n(\theta) \leqq A_n^* \cos\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} - B_n^* \sin\frac{\theta}{2}. \tag{2.7}$$

D'une part on a

$$A_n^* = \operatorname*{Max}_{\theta} \left| \int_0^{\theta} \frac{\sin (n+1/2)\, t}{2 \sin t/2}\, dt \right| \geqq \int_0^{\pi} \frac{\sin (n+1/2)\, t}{2 \sin t/2}\, dt = \frac{\pi}{2} \cdot$$

c. à. d. pour $0 < \theta < \pi$, on aura

$$A_n^* \cos \frac{\theta}{2} < A_n^* - \pi \sin^2 \frac{\theta}{4} \cdot$$

Substituons cette majorante dans (2.7) en tenant compte de (2.6) il vient

$$(2.8) \qquad 0 < C_n(\theta) < \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt - \pi \sin^2 \frac{\theta}{4} - \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} -$$

$$- B_n^* \sin \frac{\theta}{2} + \rho_n(\theta),$$

avec

$$|\rho_n| = \frac{1}{2} \left| \int_0^{\theta} \left\{ \frac{1}{\sin t/2} - \frac{1}{t/2} \right\} \sin (n + 1/2)\, t\, dt \right| \cdot$$

De

$$|\rho_n| \leqq \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \frac{|t/2 - \sin t/2|}{(t/2) \sin t/2}\, dt, \qquad 0 < \theta < \pi,$$

en développant $\sin t/2$ en sa série de Taylor, usant alors dans le nominateur de l'inégalité $\sin (t/2) > t/\pi$ nous obtenons

$$(2.9) \qquad |\rho_n| \leqq \frac{\theta^2\, \pi}{96}, \qquad 0 < \theta \leqq \pi.$$

D'autre part on a

$$s(\theta) \equiv - \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} - \pi \sin^2 \frac{\theta}{4} = - \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} + (\theta - \pi) \sin^2 \frac{\theta}{4}$$

$$< - \frac{\theta^3}{96} + (\theta - \pi) \sin^2 \frac{\theta}{4}.$$

Par conséquent, en tenant compte de (2.9) il vient de (2.8) en définitive

$$(2.10)\qquad C_n(\theta) < \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + \frac{\theta^2(\pi-\theta)}{96} + (\theta-\pi)\sin^2\frac{\theta}{4} - B_n^*\sin\frac{\theta}{2}\,.$$

Évidemment, la somme des deuxième et troisième membres de la dernière inégalité sera négative, d'où, en vertu de $B_n^* \geqq 0$ (§ 2,5.1), résulte l'inégalité assignée (*).

2.3. Démonstration de III. La relation

$$p_n(z^{-1}) = -z^{-2n+1}\,p_n(z)$$

et le fait que a_n sont réels, montre que la valeur réciproque et conjuguée d'un zéro de $p_n(z)$ sera aussi le zéro de $p_n(z)$. La règle de Descartes montre que $z=1$ est l'unique zéro positif de $p_n(z)$. À l'exception de $z=1$, le polynôme $p_n(z)$ n'a pas de zéro sur $|z|=1$. Ceci résulte, par exemple, du résultat mentionné de Fejér, d'après lequel on a

$$C_n(\theta) = C(n,\theta) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(k-1/2)\,\theta > 0, \quad 0 < \theta < \pi$$

si la condition 1) est remplie.

2.3.1. LEMME. *Le polynôme $p_n(z)$ n'a pas de zéros sur les rayons*

$$(2.11)\qquad z = re^{i\theta},\ \theta = \frac{(2k\pm1)\pi}{n},\quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1,$$

si les a_ν sont absolument monotones.

D'après le théorème connu de F. Hausdorff, on aura dans ce cas

$$(2.12)\qquad a_{\nu+1} = \int_0^1 t^\nu\,d\varphi(t),\quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

où $\varphi(t)$ représente une fonction bornée et non décroissante dans $0 < t < 1$ avec $\lim\ \varphi(t) < \varphi(1)$, $t \to 0$. De 1) et (2.12) il vient

$$(2.13)\qquad p_n(z) = \int_0^1 \frac{t^n - z^n}{t-z}\,d\varphi(t) - z^n \int_0^1 \frac{t^n z^n - 1}{tz-1}\,d\varphi(t).$$

Posons $z = re^{i\theta}$, où θ appartient à la suite (2.11). On a alors $\mathfrak{J}(z^n) = 0$, $\mathfrak{R}(z^n) = -r^n$ et la formule (2.13) se réduit à

$$p_n(re^{i\theta}) = \int_0^1 \frac{t^n + r^n}{t - re^{i\theta}} d\varphi(t) - r^n \int_0^1 \frac{t^n r^n - 1}{tre^{i\theta} - 1} d\varphi(t).$$

La partie imaginaire de $p_n(re^{i\theta})$ est

$$\mathfrak{J}(p_n) = \int_0^1 \frac{(t^n + r^n) r \sin\theta}{t^2 + r^2 - 2tr\cos\theta} d\varphi(t) + \int_0^1 \frac{(t^n r^{2n} + r^n) tr \sin\theta}{1 - 2tr\cos\theta + t^2 r^2} d\varphi(t). \tag{2.14}$$

Pour $r < 1$ nous avons

$$1 - 2tr\cos\theta + t^2 r^2 \geqq t^2 + r^2 - 2tr\cos\theta = (t - r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta > 0,$$

c. à. d. $\mathfrak{J}(p_n)$ donné par (2.14) est $\neq 0$, pour $\theta \neq k\pi$ et $r < 1$. Étant donné que $p_n(z)$ est le polynôme réciproque, ceci a lieu aussi pour $r > 1$, ce qui démontre le lemme. Nous remarquons que la démonstration de ce lemme (la positivité de $\mathfrak{J}(p_n)$) est indépendante de la forme de $\varphi(t)$, autrement dit, le lemme a lieu pour *toute* suite $\{a_\nu\}$ absolument monotone.

2.3.2. Posons [3]

$$W_n(z) = z^{-n}(1 - z)\, p_n(z) = \tag{2.15}$$

$$= a_n(z^n + z^{-n}) - 2a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + a_{k+1})(z^k + z^{-k}).$$

Pour r suffisamment petit ou assez grand, de (2.15) résulte que $W_n(z)$ c. à. d. que $p_n(z)$ n'a pas de zéros pour $re^{i\theta}$ quel que soit θ. De là, et du lemme il s'ensuit que $p_n(z)$ n'a pas de zéros sur le contour du domaine D_k défini par

$$D_k = \begin{cases} z = re^{i\theta},\ \theta = \dfrac{(2k \mp 1)\pi}{n},\ k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ z_0 = r_0 e^{i\theta},\ z_1 = r_1 e^{i\theta},\ r_0 < r < r_1. \end{cases}$$

2.3.3. Supposons maintenant que tous les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ varient d'une manière continue telle que $a_i \to a_1 \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, restant constamment absolument monotones. Il est facile de former de telles suites. Posons, par exemple, pour $k = 1,2,\ldots, m$, et en prenant m assez grand

$$(S_0) \equiv a_1, a_2, \ldots, a_n$$

$$\ldots \quad \ldots\ldots$$

$$(S_k) \equiv a_1, a_2 + \frac{k}{m}\Delta a_1, a_3 + \frac{k}{m}(\Delta a_1 + \Delta a_2), \ldots, a_l + \frac{l}{m}\left(\sum_{i=1}^{l-1}\Delta a_i\right), \ldots,$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots$$

Les termes de la suite (S_k) ainsi obtenue forment évidemment une suite absolument monotone. D'autre part la différence entre deux termes correspondants des suites (S_k) et (S_{k+1}) sera arbitrairement petite pour m assez grand. Ceci montre que les coefficients $a_\nu^{(k)}$ varient d'une manière continue en passant par (S_k). Enfin, pour $m \to \infty$ tous les termes de la suite (S_m) deviennent égales à a_1. D'après un théorème bien connu d'algèbre élémentaire, les zéros d'un polynôme sont les fonctions continues de ses coefficients. En vertu de la monotonie absolue de

$$a_\nu^{(k)} \equiv a_\nu + \frac{\nu}{m}(\Delta a_1 + \ldots + \Delta a_{\nu-1}), \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

et en tenant compte du lemme précédent, aucun des zéros de $W_n(z)$ c. à. d. de $p_n(z)$, $z \neq 1$ ne peut traverser pendant ces variations le contour du domaine (D_k) défini dans 2.3.2. Dans le cas limite, $a_i \equiv a_1$ d'après (2.15) dans le domaine (D_k) se trouve la racine double de l'équation

$$z^{2n} - 2z^n + 1 = (z^n - 1)^2 = 0,$$

c. à. d. $z = e^{2k\pi i/n}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

En vertu du lemme, $p_n(z)$ aura aussi dans la position initiale (S_0) deux zéros dans ce domaine, ce qui prouve la proposition III.

2.4. Démonstration de IV. Pour $a_\nu = 1/\nu$ on a $\rho(n) = \lg n$ et $\varepsilon_n = 1/(n+1)$. Évidemment à cause de 1) résulte $\rho(n)/n \to 0$, pour $n \to \infty$, puisque $\lim a_{n+1}/a_n = 1$ entraîne $\lim (a_n)^{1/n} = 1$. Nous envisagerons le zéro réel, negatif entre 0 et -1. Nous allons montrer d'abord que $p_n(-r) \neq 0$ pour n pair et $r \leq 1/2$. En effet de

$$p_n(-r) = a_n - a_{n-1}r + \cdots + a_1 r^{n-1} - a_1 r^n + a_2 r^{n-1} - \cdots + a_n r^{2n+1},$$

il s'ensuit, à cause de $a_\nu \downarrow 0$, en tenant compte de la condition 1) du théorème IV

$$p_n(-r) \geqq a_n - a_{n-1} r + (a_{n-2} r^2 - a_{n-3} r^3) + (a_{n-4} r^4 - a_{n-5} r^5) + \cdots$$
$$+ (a_{n-\nu+2} r^{\nu-2} - a_{n-\nu+1} r^{\nu-1}) - a_1 r^\nu (1 + r + \cdots) - a_1 r^n (1 + r + \cdots),$$

où l'on a posé $\nu = n/2$.

Pour n suffisamment grand, en vertu de la condition 1), on aura

$$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} > r, \qquad \frac{a_{n-4}}{a_{n-3}} > r, \cdots, \quad \frac{a_{n-\nu+2}}{a_{n-\nu+1}} > r,$$

ce qui entraîne que toutes les parenthèses dans (2.16) sont positives, d'où

$$p_n(-r) \geqq a_n - a_{n-1} r - a_1 r^\nu \frac{1}{1-r} - a_1 r^n \frac{1}{1-r},$$

c. à. d. pour $r \leqq 1/2$

$$p_n(-r) \geqq a_n - \frac{a_{n-1}}{2} - 2a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^\nu.$$

La condition 2) avec $\nu = n/2$ nous donne

$$2\, a_1 (1/2)^\nu = o(a_n),$$

et, en tenant compte de la condition 1), ceci implique que

$$p_n(-r) \geqq \frac{a_n}{2} - o(a_n) > 0, \ r \leqq 1/2.$$

En posant dans (2.11) $z = -r$ il vient

$$p_n(-r) = \int_0^1 \frac{t^n - r^n}{t + r}\, d\varphi - r^n \int_0^1 \frac{1 - t^n r^n}{tr + 1}\, d\varphi.$$

Vu que $t^n > 0$ et que $(t+r)^{-1}$ est continu, monotone et décroissant pour $0 < t < 1$, l'équation $p_n(-r) = 0$, avec $1/2 < r < 1$, peut se mettre sous la forme

$$(2.17) \qquad \xi_1(r, n) \int_0^1 t^n\, d\varphi = r^n [\xi_2(r) + \xi_3(r, n)],$$

avec

$$\frac{1}{2} < (r+1)^{-1} < \xi_1(r,n) < r^{-1} \leqq 2,$$

$$0 < \xi_2(r) = \int_0^1 \frac{d\varphi}{t+r}, \quad \xi_3(r,n) = \int_0^1 \frac{1-t^n r^n}{1-tr}\, d\varphi,$$

$$0 < \int_0^1 \frac{1-tr}{1+tr}\, d\varphi \leqq \xi_3(r,n) < \int_0^1 \frac{d\varphi}{1+tz}.$$

Du fait que $\xi_1(r,n)$, $\xi_2(r)$ et $\xi_3(r,n)$ sont positifs et bornés pour $1/2 < r < 1$ et $n \to \infty$, on conclut aussi que l'expression

$$0 < X_1 < x(r,n) = \frac{\xi_1(r,n)}{\xi_2(r) + \xi_3(r,n)} < X_2$$

reste, pour tout $1/2 < r < 1$ et $n \to \infty$, positive et bornée. De (2.17) résulte alors

$$(a_{n+1})^{\frac{1}{n}} (X_1)^{\frac{1}{n}} \leqq r \leqq (a_{n+1})^{\frac{1}{n}} (X_2)^{\frac{1}{n}}.$$

La condition 2) du théorème IV et l'inégalité élémentaire

$$\lim n\, \{\sqrt[n]{a} - 1\} \to \lg a, \quad n \to \infty$$

valable pour $a > 1$ ou bien $a < 1$, donne définitivement la valeur absolue de zéro réel négatif entre 0 et -1

$$r = \left(1 - \frac{\rho(n)}{n}\right)\left(1 - \frac{C}{n}\right) = 1 - \frac{\rho(n)}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

et la proposition IV résultera du fait que l'autre zéro réel négatif est réciproque.

2.5. Démonstration de V. Soit $n \geqq 3$, $0 < \theta < \pi$.

On obtient par deux transformations abeliennes

$$S_n(\theta) = \frac{1}{2\sin^2\theta/2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2\lambda_k \sin^2(k+1)\,\theta/2 + \right. \tag{2.18}$$

$$\left. + \Delta\lambda_{n-1} \sin^2 n\,\theta/2 + \lambda_n \frac{\sin(n+1/2)\,\theta}{2\sin\theta/2} \right\},$$

avec

$$\lambda_\nu = 1/(\nu+1),\ \Delta\lambda_\nu = \lambda_\nu - \lambda_{\nu+1},\ \Delta^2\lambda_\nu = \Delta\,(\Delta\lambda_\nu).$$

De (2.18) résulte que $S_n(\theta)$ est positif pour $\theta \in J_1 \equiv (0, \pi/(n+1/2))$. Or, pour $\theta \in J_1$ en prenant le premier terme sous le signe de Σ, on a $S_n(\theta) > 1/6, \theta \in J_1$. En prenant les deux premiers termes de Σ dans (2.18) on en déduit l'inégalité suivante

$$S_n(\theta) \geqq \frac{1}{6}(1 - \cos^2/2) - \frac{\lambda_n}{2\sin\theta/2} \equiv \varphi(\theta).$$

On a maintenant

$$\frac{\varphi'(\theta)}{\cos\theta/2} 4(n+1)\sin^2\theta/2 = 1 - k^3\sin^3\theta/2 = (1 - k\sin\theta/2)(1 + k\sin\theta/2 + k^2\sin^2\theta/2)$$

avec

$$k = \sqrt[3]{2(n+1)/3},$$

d'où on conclut que $\varphi(\theta)$ possède dans $J_2 = (\pi/(n+1/2), \pi)$ seulement un maximum. Donc, $\varphi(\theta)$ peut prendre ses valeurs minimum à l'extrémité de l'intervale J_2. $\dfrac{\sin\theta/2}{\theta/2}$ étant décroissant dans $(0, \pi/6)$, on a pour $n \geqq 3$,

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2(n+1/2)} \leqq \frac{\pi}{6},$$

$$\frac{\sin\theta/2}{\theta/2} > \frac{1/2}{\pi/2(n+1/2)} \geqq \frac{7}{2\pi}.$$

De là, il vient

$$\varphi\left(\frac{\pi}{n+1/2}\right) \geqq \frac{1}{6}\left(1 + \cos^2\frac{\pi}{6}\right) - \frac{2(n+1/2)}{2(n+1)(7/2\pi)\pi} \geqq \frac{7}{24} - \frac{2}{7} = \frac{1}{168},$$

et

$$\varphi(\pi) = \frac{1}{6}\left(1 + \cos^2\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2\cdot(3+1)} = \frac{1}{24}.$$

Enfin (Rogosinski—Szegö [4]) pour $n = 0, 1, 2$ on a évidemment

$$S_0 = 1/2,\quad S_1 = (1 + \cos\theta/2),\quad S_2 = \frac{2}{3}\left(\cos\theta + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{96} \geqq \frac{7}{96},$$

ce qui démontre l'inégalité (1.3).

2.5.1. Pour $\theta \neq 0$ nous avons

$$R_n(\theta) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu\vartheta}{\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\cos \nu\theta}{\nu}. \tag{2.19}$$

En remplaçant la première somme dans (2.19) par sa valeur exacte, et usant de l'estimation connue

$$\sum_{\nu=p}^{q} \cos \nu\theta/\nu < \frac{1}{p \sin \theta/2}$$

on obtient de (2.19)

$$R_n(\theta) > 1 - \lg 2 \sin \theta/2 - \frac{1}{(n+1) \sin \theta/2} \equiv F(\theta).$$

Il est évident que $R_n(\theta)$ donné par (1.3) n'a pas de zéros dans $(0, \pi/(n+1/2))$. La fonction $F(\theta)$ décroît d'une façon monotone dans $(\pi/(n+1/2), \pi)$, puisque de $\sin \theta/2 > (2/\pi)\,\theta/2$ on a

$$2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} F'(\theta) = \frac{1}{(n+1) \sin \theta/2} - 1 < \frac{n+1/2}{n+1} - 1 < 0.$$

De là, pour $\pi/(n+1/2) \leqq \theta \leqq \pi$, il vient

$$R_n(\theta) \geqq F(\theta) \geqq F(\pi) = 1 - \lg 2 - \frac{1}{n+1};$$

cette expression est positive pour $n \geqq 3$. Finalement, on a

$$\frac{1}{2} + \cos \theta + \cos^2 \theta = \left(\cos \theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geqq \frac{1}{4}.$$

On peut prendre donc pour $K' = 1/20$.

(Reçu le 22 janvier 1958)

RÉFÉRENCES

[1] L. Fejér — Einige Sätze die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen,... *Monatsh. f. Math.* **35** (2) (1928), p. 305–344.

[2] ———— Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. *Trans. Amer. Math. Soc.* **39** (1) (1936), p. 18–59.

[3] F. Herzog and G. Piranian — Some Properties of the Fejér Polynominals. *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (3) (1956), p. 379–386.

[4] W. Rogosinski und G. Szegö — Über die Abschnitte von Potenzreihen die in einem Kreise beschränkt bleiben. *Math. Zeitschr.* **28** (1) (1928), p. 73–94.