SUR UNE GÉNÉRALISATION DE CERTAINES SUITES ITÉRÉES

M. BAJRAKTAREVIĆ (Sarajevo)

SOMMAIRE — Dans cette note on étudie quelques propriétés de certaines suites itérées dont les limites représentent des solutions du système (20) d'équations fonctionnelles pouvant, dans certains cas, être ramenées à l'équation fonctionnelle d'A b e l ou à celle de S c h r ö d e r [1] avec $|p|>1$. Généralisation d'un problème analogue ($p=2$) traité par l'auteur antérieurement [2]

1. *NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES.* — Soit:

a) p un nombre réel, $|p|>1$;

b) $[p]$ le plus petit entier qui n'est pas dépassé par $|p|-1$;

c) $G_k = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[p]}{|p|^{k+i}}$;

d) $\{n_i\}$ une suite de nombres entiers, $0 \leqslant n_i < n_{i+1}$;

e) $\{\delta_{n_i}\}$ une suite de nombres $\delta_{n_i}=1, 2, \ldots, [p]$;

f) $\{\delta_k\}$ la suite des nombres $\delta_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq n_i, \\ \delta_{n_i} & \text{pour } k = n_i; \end{cases}$

g) $\{d_k\}$ la suite des nombres

$$d_k = \begin{cases} \delta_k & \text{pour } p > 1, \\ (-1)^k \delta_k + \frac{1}{2}[1-(-1)^k][p] & \text{pour } p < -1; \end{cases}$$

h) $J = \begin{cases} [0, G_0], \\ [a, ap], \end{cases} \quad \bar{J} = \begin{cases} (0, G_0], & (p>1), \\ (a, ap], \quad a = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[p]}{p^{2\nu+1}}, & (p<-1); \end{cases}$

i) $i=1, 2, \ldots;$ $\qquad k=0, 1, 2, \ldots$.

À tout nombre $z \in \bar{J}$ correspond univoquement une suite $\{n_i\}$ et une suite $\{\delta_{n_i}\}$ et, par conséquent, une suite $\{\delta_k\}$ et une suite $\{d_k\}$ telles que:

$$1^0 \ \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_{n_i}}{|p|^{n_i}} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_{n_i}}{|p|^{n_i}} - \frac{1}{|p|^{n_N}} + G_{1+n_N} < \zeta \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_{n_i}}{|p|^{n_i}} + G_{1+n_N}$$

$$\left(N=1, 2, \ldots;\ \zeta = \begin{cases} z & \text{pour } p < 1, \\ z-a & \text{pour } p > -1, \end{cases}\right)$$

$$2^0 \ z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{p^k}. \text{ même pour tout } z \in J,$$

l'égalité dans 1^0 à gauche n'étant valable que pour $|p| = 1 + [p]$.

En introduisant les notations

$$(1) \qquad z^{(0)} = z, \quad z^{(n+1)} = \left(z - \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{p^k}\right) p^{n+1} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

on a

$$(1a) \qquad z^{(m+n)} = [z^{(m)}]^{(n)} = [z^{(n)}]^{(m)} \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Soit

$$(2) \qquad f_\nu(x) \qquad (x \in I_\nu = [A_\nu, B_\nu],\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

une suite de fonctions telle que

$$(3) \qquad A_{\nu-1} \leqslant \varepsilon(i) f_\nu(x) \leqslant B_{\nu-1} \ (i=0, 1, \ldots, [p];\ x \in I_\nu)$$

$$(4) \qquad -\infty \leqslant A_\nu < B_\nu \leqslant +\infty \ (\nu = -1, 0, 1, 2, \ldots),$$

$A_\nu, B_\nu, \varepsilon(i)$ étant des constantes avec

$$(5) \qquad 0 < |\varepsilon(i)| \leqslant 1,\ \varepsilon(i) \neq \varepsilon(j) \ (i, j = 0, 1, \ldots, [p];\ i \neq j).$$

Il est évident qu'à chaque suite $\{d_\nu\}$ correspond univoquement une suite

$$(6) \qquad \varepsilon_\nu = \varepsilon(d_\nu) \ (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

et, inversement, à chaque suite (6) correspond univoquement une suite $\{d_\nu\}$. Par conséquent, à tout nombre $z \in I$ correspond univoquement une suite (6).

Considérons, maintenant, la suite

(7) $x_{\nu}^{(\mu)}(z, t) = \varepsilon_0 f_{\mu} \{\varepsilon_1 f_{\mu+1} [\ldots (\varepsilon_{\nu} f_{\mu+\nu}(t))\ldots]\} \quad (\nu \geqslant \nu_0(t);\ t \in X),$

$\nu_0(t)$ étant un entier suffisamment grand, X l'ensemble limite restreint des J_{ν}, c'est-à-dire

$$X = \varliminf_{\nu \to \infty} J_{\nu} = \bigcup_{n} \{\bigcap_{\nu = n} J_{\nu}\}.$$

En introduisant les suites $\{\bar{\varepsilon}_{\nu}\}$ et $\{\bar{d}_{\nu}\}$ définies par

(8) $$\bar{\varepsilon}_{\nu} = \varepsilon(\bar{d}_{\nu}) = \varepsilon(d_{k+\nu+1}) = \varepsilon_{k+\nu+1}$$

on obtient

(9) $$\bar{d}_{\nu} = d_{k+\nu+1},$$

d'où, d'après (1),

(10) $$z^{(k+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\bar{d}_{\nu}}{p^{\nu}}.$$

Posant, dans (7), $\nu+1$ à la place de ν, vu (7), (8), (9) et (10), on a

(11) $x_{\nu+1}^{(\mu)}(z, t) = x_k^{(\mu)} \{z, x_{\nu-k}^{(\mu+k+1)} [z^{(k+1)}, t]\} \quad (0 \leqslant k \leqslant \nu;\ \nu \geqslant \nu_0(t);\ \mu \geqslant 0),$

et, en particulier, pour $k=0$,

(12) $x_{\nu+1}^{(\mu)}(z, t) = \varepsilon_0 f_{\mu} \{x_{\nu}^{(\mu+1)} [(z-d_0)p, t]\} \quad (\nu \geqslant \nu_0(t);\ \mu \geqslant 0;\ t \in X;\ z \in J).$

On démontre facilement que l'équation (12) est équivalente au système

(12a) $$x_{\nu+1}^{(\mu)}(z, t) = \varepsilon(0) f_{\mu} [x_{\nu}^{(\mu+1)}(pz, t)], \quad z \in \begin{cases} [0, G_1] & (p>1), \\ \left[a, \dfrac{a}{p}\right] & (p<-1), \end{cases}$$

(13) $$\varepsilon(0)\, x_{\nu}^{(\mu)}(z, t) = \varepsilon_0\, x_{\nu}^{(\mu)}(z-d_0, (t) \quad (\nu > \nu_0(t),\ z \in J,\ t \in X).$$

L'équation (11) peut être écrite dans une forme plus générale (11a). Pour la démontrer remarquons que la suite

$$a_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_{n_i}}{|p|^{n_i}} - \frac{1}{|p|^{n_N}} + G_{1+n_N} + \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn} p)\, a$$

est presque monotone croissante et que la suite

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta_k}{|p|^k} + G_{1+n} + \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn} p)\, a$$

est décroissante. Donc, on peut former une suite partielle strictement croissante de la suite $\{a_N\}$ en prenant tous les termes a_N satisfaisant à la condition

$$a_\nu < a_N \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N-1).$$

ν_i étant les indices des termes ainsi choisis, posons

$$\bar{a}_i = a_{\nu_i} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

En introduisant la notation

$$l_k = (\bar{a}_N, b_k] \qquad (z \in \bar{J};\ k = \lambda + n_{\nu_N};\ \lambda = 0, 1, \ldots, n_{\nu_{N+1}} - n_{\nu_N} - 1),$$

il est évident qu'à tout nombre $u_k \in l_k$ correspondent les mêmes nombres d_ν, ε_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, k)$ respectivement égaux à ceux correspondant au nombre z, et, d'après (11), on peut écrire

$$\text{(11a)} \quad \begin{gathered} x_{\nu+1}^{(\mu)}(u_k, t) = x_k^{(\mu)}\{z, x_{\nu-k}^{(\mu+k+1)}[u_k^{(k+1)}, t]\} \\ (0 \leqslant n_1 \leqslant k \leqslant \nu;\ \nu \geqslant \nu_0(t);\ \mu \geqslant 0;\ z \in \bar{J};\ t \in X). \end{gathered}$$

Le nombre $u_k^{(k+1)}$ est une fonction linéaire de $u_k \in l_k$ avec

$$u_k^{(k+1)} \in \begin{cases} J_k^* = (a_k^*, G_0] & (k \geqslant n_1 \geqslant 0;\ p > 1); \\ J'_k = [a, a'_k) & (k = 2q \geqslant n_1 \geqslant 0), \\ J''_k = (a''_k, ap] & (k = 2q+1 \geqslant n_1 \geqslant 0), \end{cases} \quad \Bigg\} \ (p < -1),$$

où

$$a_k^* = \Bigl(-p + G_0 - \sum_{\nu=1+n_{\nu_N}}^{k} \frac{d_\nu}{p^{\nu-1-n_{\nu_N}}}\Bigr) p^\lambda \qquad (p > 1),$$

$$a'_k = a - p + (1 - |p|^\lambda)(p + G_0) - p^{k+1} \sum_{\nu=1+n_{\nu_N}}^{k} \frac{\delta_\nu}{|p|^\nu} \qquad (p < -1),$$

$$a''_k = (p + ap)|p|^\lambda + (1 - |p|)^\lambda a - p^{k+1} \sum_{\nu=1+n_{\nu_N}}^{k} \frac{\delta_\nu}{|p|^\nu} \qquad (p < -1).$$

Enfin posons

$$J^* = \bigcap_k J_k^*, \quad J' = \bigcap_k J_k', \quad J'' = \bigcap_k J_k''.$$

2. *RÉSULTATS.* — On a d'abord le théorème suivant.

THÉORÈME[1]. *Soit:*

1° $g_i(z)$ $(z \in J;\ i=0,1,2,\ldots)$ *une suite de fonctions avec*

$$\text{(i)} \qquad g_i(z) \in J_{i-1} \quad (i=0,1,2\ldots),$$

$$\text{(ii)} \qquad g_{i+1}[(z'-d_0')\,p] = g_{i+1}[(z''-d_0'')\,p] \ \textit{entraîne}\ \frac{g_i(z')}{\varepsilon_0'} = \frac{g_i(z'')}{\varepsilon_0''}$$

$$\{z', z'' \in J;\quad \varepsilon_0' = \varepsilon(d_0'),\ \varepsilon_0'' = \varepsilon(d_0'')\}$$

d_0', d_0'' *étant les chiffres initiaux des nombres* z', z'' *respectivement représentés dans le système de base* p;

2° $\varphi_\mu(t)$ $(t \in S_\mu = g_{\mu+1}(J);\ \mu=0,1,2,\ldots)$ *une suite de fonctions, d'après* (ii), *univoquement définies par les équations*

$$\text{(14)} \qquad g_\mu(z) = \varepsilon_0\, \varphi_\mu\{g_{\mu+1}[(z-d_0)\,p]\} \quad (z \in J).$$

3° *Soit* $E_\mu = g_{\mu+1}(J^*)$ *pour* $p>1$; *pour* $p<-1$, $E_\mu = E_\mu' \cup E_\mu''$ *avec* $E_\mu' = g_{\mu+1}(J')$, $E_\mu'' = g_{\mu+1}(J'')$.

4° *Soit* $E = \underline{\lim}\, E_\mu$ *pour* $p>1$, *respectivement* $E = \underline{\lim}\, F_\mu$ *pour* $p<-1$ *avec* $F_\mu = E_\mu' \cap E_\mu''$. *On suppose que* E *ne soit pas vide.*

Dans ces conditions on a:

a) *Pour que la suite*[2]

$$x_\nu^{(\mu)}(z,t) \qquad (\nu=0,1,2,\ldots;\ z \in \bar{J};\ t \in E)$$

soit convergente, il faut et il suffit que $g_\mu(u_k^*)$, *pour chaque solution* u_k^* *de l'équation*

$$\text{(15)} \qquad g_{\mu+k+1}(u_k^{(k+1)}) = t \qquad (k \textit{ suffisamment grand})$$

---

[1]) Une application de ce théorème est donnée dans [3] (p. 15 et 21) où il est désigné par le „Théorème VI“ conformément au nombre que ce théorème portait dans une rédaction antérieure de la présente note.

[2]) La suite $x_\nu^{(\mu)}(z,t)$ ici est définie par (7) avec φ_μ au lieu de f_μ.

par rapport à l'inconnue $u_k \in I_k$, *tende vers une même valeur limite* $L_\mu(z, t)$ *lorsque* $k \to \infty$ *et alors on a*

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu^{(\mu)}(z, t) = L_\mu(z, t) \qquad (z \in \bar{J},\ t \in E).$$

b) *Pour que la suite*

$$x_\nu^{(\mu)}(z, t) \qquad \left(\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ t \in E;\ \bar{z} = \begin{cases} 0 \text{ pour } p > 1, \\ a \text{ pour } p < -1, \end{cases}\right)$$

soit convergente, il faut et il suffit que $g_\mu(z_k)$, *pour chaque solution* z_k *de l'équation*

$$g_{\mu+k}(z^{(k)}) = t \qquad (z \in [\bar{z}, \bar{z} + G_k],\ k \text{ suffisamment grand})$$

par rapport à l'inconnue z, *tende vers une même valeur limite* $L^\mu(\bar{z}, t)$ *lorsque* $k \to \infty$, *et alors*

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu^{(\mu)}(\bar{z}, t) = L_\mu(\bar{z}, t) \ \ (t \in E).$$

c) $$\varepsilon(0)\, g_\mu(z) = \varepsilon_0\, g_\mu(z - d_0) \ \ (\mu = 0, 1, 2, \ldots;\ z \in J).$$

Conséquence du Théorème. — *Si* $g_\mu(z)$ *est continue ou monotone sur* J *on a pour tout* $t \in E$ *et (dans le cas de la monotonie presque) pour tout* $z \in J$,

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu^{(\mu)}(z, t) = g_\mu(z).$$

Les hypothèses (2), (3), (4), (6) sur f_μ restant les mêmes, supposons:

a)

$$f_\mu(t_1) \leqslant f_\mu(t_2) \ \ (t_1 < t_2;\ t_1, t_2 \in J_\mu;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

$$0 < \varepsilon(i) \leqslant 1,\ \varepsilon(i) \neq \varepsilon(j) \ \ (i, j = 0, 1, \ldots, [p];\ i \neq j), \tag{5a}$$

b) l'existence de deux intervalles

$$C = (C_1, C_2] \subset X,\ D = [D_1, D_2) \subset X,\ C_2 < D_1,$$

les plus proches possible entre eux, tels que

$$\varepsilon(i)\, f_\nu(t) \begin{cases} \geqslant t & (t \in C), \\ \leqslant t & (t \in D), \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \ldots, [p];\ \nu \geqslant n_0(t) \geqslant \nu_0(t)) \tag{17a}$$

et tels que, pour chaque $\varepsilon > 0$, on puisse trouver au moins une valeur de $t \in X$ et au moins une valeur de i telles que, pour ces valeurs et pour un nombre infini de valeurs de ν, on a

$$(17b)\quad \varepsilon(i) f_\nu(t) \begin{cases} < t \text{ avec } C_1-\varepsilon < t \leqslant C_1 \text{ respectivement } C_2 < t < C_2+\varepsilon, \\ > t \text{ avec } D_1-\varepsilon < t < D_2 \text{ respectivement } D_2 \leqslant t < D_2+\varepsilon' \end{cases}$$

$n_0(t)$ étant un entier suffisamment grand.

L'ensemble des conditions (2), (3), (4), (5*a*), (6), (16) *complété par les hypothèses faites sur les intervalles C et D, nous désignerons, pour plus de simplicité, par R.*

Les conditions R supposées remplies, on a:

A. *La suite*

$$(18)\qquad x_\nu^{(\mu)}(z, t)\ \{\nu \geqslant N(t) = \mathrm{Max}\,[n_0(t), n_0(C_2), n_0(D_1)];\ t \in C \cup D;\ z \in J\},$$

étant monotone et bornée, est convergente avec

$$(19)\qquad A_{\mu-1} \leqslant \xi_\mu(z, t) = \lim_{\nu\to\alpha} x_\nu^{(\mu)}(z, t) \leqslant B_{\mu-1} \qquad (z \in J,\ t \in C \cup D).$$

B. *Les* $\xi_\mu(z, t)$ *satisfont aux équations fonctionnelles*

$$(20)\quad \xi_\mu(z, t) = \varepsilon_0 f_\mu\{\xi_{\mu+1}[(z-d_0)p, t]\}\ (t \in C \cup D, \text{ presque pour tout } z \in J)$$

dont chacune est équivalente au système correspondant

$$(21)\qquad \xi_\mu(z, t) \Rightarrow \varepsilon(0) f_\mu\{\xi_{\mu+1}(pz, t)\}$$

$$\left(t \in C \cup D, \text{ presque pour tout } z \in \begin{cases} [0, G_1] & si\ p > 1, \\ \left[a, \dfrac{a}{p}\right] & si\ p < -1, \end{cases}\right)$$

$$(22)\qquad \varepsilon(0)\, \xi_\mu(z, t) = \varepsilon_0\, \xi_\mu(z-d_0, t) \qquad (z \in J,\ t \in C \cup D).$$

C. *Si les* $\xi_\mu(z, \bar{t})\ (z \in J)$ *pour un* $\bar{t} \in C \cup D$ *sont continues ou monotones par rapport à z et si*

$$T = \begin{cases} [\bar{t}, T_2) & pour\ \bar{t} \leqslant T_1 \\ (T_1, T_2) & pour\ T_1 < \bar{t} < T_2, \\ (T_1, \bar{t}] & pour\ T_2 \leqslant \bar{t}, \end{cases} \quad avec \begin{cases} T_1 = \overline{\text{borne}}\ \overline{E}, \\ T = \underline{\text{borne}}\ \overline{E}, \end{cases}$$

$\bar{E}$ étant l'ensemble E qui, d'après le théorème correspond aux $g_i(z)=\xi_i(z,\bar{t})$, alors on a (dans le cas de la monotonie des $\xi^{\mu}(z,\bar{t})$ presque) partout dans J

$$\xi_{\mu}(z,t)=\xi^{\mu}(z,\bar{t}) \quad (t\in T,\ z\in J). \tag{23}$$

Dans certains cas, comme nous le verrons dans D, $[C_2, D_1]\cap\bar{E}$ respectivement $[C_2, D_1]\cap T$ n'est pas vide. *Si, dans ce cas, on désigne T par T_C respectivement par T_D suivant que $\bar{t}\in C$ ou $\bar{t}\in D$, on a la*

Conséquence de C:

$$t_0\in T_C\cap T_D \neq \{0\} \quad \textit{entraîne} \quad \xi_{\mu}(z,t)=\xi_{\mu}(z,t_0) \quad (t\in T_C\cap T_D).$$

D. *Si:*

1° $\quad m_1=\varepsilon(k_1)=\operatorname{Min}\varepsilon(i),\quad m_2=\varepsilon(k_2)=\operatorname{Max}\varepsilon(i)\quad (i=0,1,\ldots,[p]);$

2° $\quad z_i=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k_i}{p^{\nu}}=\frac{pk_i}{p-1}\qquad (i=1,2);$

3° $\quad \varphi^1(t)=\underline{\text{borne}}\ f_{\mu}(t),\quad \varphi^2(t)=\overline{\text{borne}}\ f_{\mu}(t),\quad (\mu=0,1,2,\ldots);$

4° $$m_1\varphi^1(t)\begin{cases}>t\ (C_1<t<C_2),\\ =t \qquad (t=C_2),\\ <t\ (C_2<t<D_2);\end{cases}\qquad m_2\varphi^2(t)\begin{cases}>t\ (C_1<t<D_1),\\ =t \qquad (t=D_3),\\ <t\ (D_1<t<D_2),\end{cases}$$

alors

a) $$\bar{E}\subset[C_2,\ D_1].$$

Dans le cas particulier où $f_{\mu}(t)\equiv f(t)$ pour tous les μ, on a

$$\bar{E}\subset[C_2,\ D_1]\quad \textit{avec}\quad C_2, D_1\in\bar{E}.$$

b) *Les $\xi_{\mu}(z,t)$ sont croissants respectivement décroissants par rapport à z si*

$$\left.\begin{array}{ll}(24a) & \operatorname{Min}\left\{\frac{\varepsilon(i)}{\varepsilon(j)}\right\}\geqslant\overline{\text{borne}}\ \frac{f_{\mu}(D_{\lambda})}{f_{\mu}(C_{\lambda})}\\ & \textit{respectivement si}\\ (24b) & \operatorname{Max}\left\{\frac{\varepsilon(i)}{\varepsilon(j)}\right\}\leqslant\underline{\text{borne}}\ \frac{f_{\mu}(C_{\lambda})}{f_{\mu}(D_{\lambda})}\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} f_{\mu}(C_{\lambda})>0,\qquad \mu=0,1,2,\ldots,\\ 0\leqslant j<i\leqslant[p],\quad p>1,\\ \lambda=\begin{cases}1\ (t\in C),\\ 2\ (t\in D).\end{cases}\end{array}$$

3. *DÉMONSTRATIONS.* — (14), d'après (10), peut être écrit dans la forme

$$(14a) \qquad g_\mu(z) = x_0^{(\mu)}\{z, g_{\mu+1}[z^{(1)}]\} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, z \in J),$$

d'où, d'après (8) et (1a), on obtient par l'induction

$$(25) \qquad g_\mu(z) = x_k^{(\mu)}\{z, g_{\mu+k+1}[z^{(k+1)}]\} \qquad (z \in J).$$

Dans le cas $z \in \bar{J}$, u_k étant un nombre quelconque de I_k, (25), d'après (15), devient

$$g_\mu(u_k^*) = x_k^{(\mu)}(z, t) \quad (z \in \bar{J},\ t \in E,\ k \text{ suffisamment grand}),$$

d'où a) du théorème résulte immédiatement. En outre on a (à cause de $u_k \in I_k$) $u_k^* \to z$ $(k \to \infty)$.

D'une manière analogue on démontre b) du théorème. On a encore $z_k \to \bar{z}$ $(k \to \infty)$.

En posant $z - d_0 = z'$ et en appliquant (14) à z' on tire c) du théorème.

Ainsi le théorème est complètement démontré.

Démonstrations des propriétés $A - D$. D'abord, on démontre facilement les inégalités

$$(26) \qquad x_\nu^{(\mu)}(z, t_1) \leqslant x_\nu^{(\mu)}(z, t_2) \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots;\ t_1 < t_2;\ t_1, t_2 \in J_{\mu+\nu})$$

$$(27) \qquad x_{\nu+1}^{(\mu)}(z, t) \begin{cases} \geqslant x_\nu^{(\mu)}(z, t) & (t \in C), \\ \leqslant x_\nu^{(\mu)}(z, t) & (t \in D), \end{cases} \qquad \nu \geqslant n_0(t).$$

Pour démontrer que la suite (18) est bornée, on a à distinguer deux cas.

Premier cas: $t \in C$. D'après (16) et (17a, b) on a, pour chaque $z \in J$,

$$t \leqslant \varepsilon_{\nu+k} f_{\mu+\nu+k}(t) \leqslant \varepsilon_{\nu+k} f_{\mu+\nu+k}(D_1) \leqslant D_1$$
$$(\nu \geqslant N(t); \quad k = 0, 1, 2, \ldots),$$

d'où l'on tire

$$t \leqslant \varepsilon_{\nu+k-1} f_{\mu+\nu+k-1}[\varepsilon_{\nu+k} f_{\mu+\nu+k}(t)] \leqslant D_1.$$

En procédant ainsi on obtient

$$t \leqslant x_k^{(\mu+\nu)}\{z^{(\nu)}, t\} \leqslant D_1 \quad (\nu \geqslant N(t);\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

d'où, d'après (3), (26), (11) et (17),

$$A_{\mu-1} \leqslant x_{\nu-1}^{(\mu)}(z, t) \leqslant x_{\nu+k}^{(\mu)}(z, t) \leqslant x_{\nu-1}^{(\mu)}(z, D_1) \leqslant B_{\mu-1} \tag{28a}$$

$$(t \in C,\ z \in J,\ \nu \geqslant N(t)),$$

ce qui démontre la proposition dans ce cas.

Deuxième cas: $t \in D$. Par un procédé analogue on arrive aux inégalités

$$A_{\mu-1} \leqslant x_{\nu-1}^{(\mu)}(z, C_2) \leqslant x_{\nu+k}^{(\mu)}(z, t) \leqslant x_{\nu-1}^{(\mu)}(z, t) \leqslant B_{\mu-1}, \tag{28b}$$

ce qui prouve la proposition dans ce cas aussi.

A. D'après (27), on tire (19) de (28a, b) pour $\nu \to \infty$.

B. Une conséquence immédiate de A. est que (12), (12a) et (13), pour $\nu \to \infty$, deviennent respectivement (20), (21) et (22). Ainsi B. est démontré.

C. Il est à remarquer que la fonction

$$\underline{f}_\mu(x) = f_\mu(x-0) \text{ respectivement } \overline{f}_\mu(x) = f_\mu(x+0)$$

satisfait à l'équation (20) pour tout $z \in J$ et pour tout $t \in C$ respectivement D.

Il est évident, maintenant, que les

$$\xi_\mu(z, \bar{t}) \quad (z \in J,\ \bar{t} \in C \cup D)$$

remplissent toutes les conditions du théorème relatives aux $g_i(z)$. Par conséquent, on peut à la suite des $\xi_\mu(z, \bar{t})$ appliquer le théorème avec

$$\varphi_\mu(t) = \begin{cases} \underline{f}_\mu(t) \text{ pour } \bar{t} \in C, \\ \overline{f}_\mu(t) \text{ pour } \bar{t} \in D. \end{cases}$$

Cette relation montre que la nature des φ_μ ne dépend pas de la valeur particulière du paramètre $\bar{t} \in C$ respectivement $\bar{t} \in D$.

D'après la conséquence du théorème on a, puisque $\bar{t} \in C \cup D$, (et, dans le cas de la monotonie de $\xi_\mu(z, \bar{t})$, presque) partout

$$\xi_\mu(z, t) = \xi_\mu(z, \bar{t}) \quad (t \in \bar{E}). \tag{29}$$

Soit, d'abord, $\bar{t} \leqslant T_1$. On a à distinguer deux cas.

a) T_2 non $\in \bar{E}$. Si l'on prend $\bar{t} \leqslant t < t_1 \in \bar{E}$, t et t_1 quelconques, on aura $\bar{t}, t, t_1 \in X$ puisque $\bar{t} \in C \cup D \subset X$, $t_1 \in \bar{E} \subset X$, par conséquent $\bar{t}, t, t_1 \in J_\mu$ pour tous les μ suffisamment grands. D'après (26), on a

$$x_\nu^{(\mu)}(z, \bar{t}) \leqslant x_\nu^{(\mu)}(z, t) \leqslant x_\nu^{(\mu)}(z, t_1)$$

d'où, pour $\nu \to \infty$, d'après (29), résulte (23).

b) $T_2 \in \bar{E}$. Ce cas se ramène au précédent avec $t_1 = T_2$.

D'une manière analogue on prouve (23) aussi dans les deux autres cas.

D. a) On démontre facilement que

$$f_\mu(t_1) \leqslant f_\mu(t_2) \text{ entraîne } \varphi^j(t_1) \leqslant \varphi^j(t_2) \ \{t_1 < t_2;\ t_1. t_2 \in (C_1, D_2)\}.$$

Introduisons les notations

$$\varphi_0^j(t) = t,\ \varphi_1^j(t) = m_j \varphi^j(t),\ \varphi_\nu^j(t) = \varphi_1^j[\varphi_{\nu-1}^j(t)] \ (\nu \geqslant 2;\ j = 1, 2).$$

On voit que l'on a

$$\varphi_\nu^1(t) \to C_2,\ \varphi_\nu^2(t) \to D_1 \ (t \in (C_1, D_2);\ \nu \to \infty).$$

Par l'induction on démontre aisément les relations

$$\varphi_{\nu+1}^1(t) \leqslant x_\nu^{(\mu)}(z, t) \leqslant \varphi_{\nu+1}^2(t) \ \{t \in (C_1, D_2)\},$$

d'où, pour $t \in C$ ou $t \in D$, d'après A, il résulte

$$C_2 \leqslant \xi_\mu(z, t) \leqslant D_1 \quad \{t \in C \cup D\}.$$

b) On démontre facilement le fait suivant: Pour qu'il soit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k'}{p^k} = z' > z'' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k''}{p^k} \quad (z', z'' \in J\colon p > 1),$$

il faut et il suffit qu'il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que

$$d_k' = d_k'' \qquad (k = 0, 1, \cdots, N-1;\ N \geqslant 1),\ d_N' > d_N'' \qquad (N \geqslant 0).$$

Or, si $z' > z''(z', z'' \in J;\ p > 1)$, donc $d_N'' < d_N'$, (24a) donne

$$\varepsilon_N'' f_{\mu+N}(D_\lambda) \leqslant \varepsilon_N' f_{\mu+N}(C_\lambda)$$

et, a fortiori,

$$\varepsilon''_N f_{\mu+N}\{\cdots[\varepsilon''_{N+k} f_{\mu+N+k}(t)]\cdots\} \leqslant \varepsilon'_N f_{\mu+N}\{\cdots[\varepsilon'_{N+k} f_{\mu+N+k}(t)]\cdots\}$$

$$(t \in C \cup D).$$

De cette relation, d'après (5a), on tire

$$x^{(\mu)}_{N+k}(z'', t) = x^{(\mu)}_{N-1}\{z'', \varepsilon''_N f_{\mu+N}\{\cdots[\varepsilon''_{N+k} f_{\mu+N+k}(t)]\cdots\}\} \leqslant$$

$$\leqslant x^{(\mu)}_{N-1}\{z', \varepsilon'_N f_{\mu+N}\{\cdots[\varepsilon'_{N+k} f_{\mu+N+k}(t)]\cdots\}\} = x^{(\mu)}_{N+k}(z', t)$$

$$(N, \mu \geqslant 0;\ t \in C \cup D).$$

Pour $k = \infty$ on en déduit

$$\xi_\mu(z'', t) \leqslant \xi_\mu(z', t) \quad (z'' < z',\ t \in C \cup D).$$

D'une manière analogue on démontre la deuxième partie de b)

(Reçu le 17 avril 1957)

RÉFÉRENCES

[1] E. Picard — Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Paris, 1928, p. 125.

[2] M. Bajraktarević — Sur certaines suites itérées. Thèse de doctorat; Sarajevo, 1954, *Soc. sc. de la R. P. de Bosnie et de l'Herzégovine.* — *Comptes rendus* Paris, **236** (1953), p. 881—883, 988—989, 1125—1127.

[3] M. Bajraktarević — Sur les itérées continues et leur application à la recherche des fonctions limites de certaines suites itérées. *Publ. Inst. Math. Acad. serbe sci.* **VIII** (1955), 13 - 22.