ÜBER DIE $G_\theta^\varkappa$-SUMMIERBARKEIT DER VERALLGEMEINERTEN FOURIER-REIHEN

MANOJLO MARAVIĆ (Sarajevo)

I. EINLEITUNG

1. Das $G_\theta^\varkappa$-Verfahren ist durch

$$G_\theta^\varkappa(\lambda; x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} (1 - e^{(\lambda_\nu - x)x^{-\theta}})^\varkappa a_\nu$$

$$(0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \to \infty, \quad n \to \infty)$$

mit

$$0 < \theta < 1 \quad \text{und} \quad \varkappa > 0,$$

bzw. durch

$$G_\theta^\varkappa(x) = \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^\varkappa \, d\{A(t)\}$$

erklärt. Dabei ist $A(t)$ von beschränkter Schwankung auf jeder endlichen Strecke.

O. B. d. A. sei $A(0) = 0$, so dass

$$G_\theta^\varkappa(x) = \frac{\varkappa}{x^\theta} \int_0^x (1 - e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} A(t) \, dt$$

wird.

2. Sei D ein beschränktes Gebiet des n-dimensionalen Euklidischen Raumes und $\bar{D}$ der stückweise glatte Rand von D. $P, Q, \Pi, \ldots$ bezeichnen Punkte aus D. Ferner seien

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \to \infty, \quad n \to \infty$$

die Eigenwerte und

$$\Phi_1(\Pi), \Phi_2(\Pi), \ldots, \Phi_n(\Pi), \ldots$$

die orthonormierten Eigenfunktionen der Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u = 0 \text{ innerhalb } D \\ u = 0 \text{ längs } \bar{D}. \end{aligned} \tag{1}$$

Für jedes $f(\Pi) \in L^1(D)$ sei

$$a_\nu = \int_D f(\Pi)\, \Phi_\nu(\Pi)\, dV_\Pi$$

und

$$f(\Pi) \sim \sum a_\nu\, \Phi_\nu(\Pi) \tag{2}$$

die verallgemeinerte Fourier-Reihe der Funktion $f(\Pi)$.

Im Falle $n=2$ und $f(\Pi) \in L^1(D)$ hat Herr V. G. Avakumović [2] notwendige und hinreichende lokale Bedingungen angegeben damit die $G_\theta^\varkappa$-Summe von (2), d. h.

$$\sum_{\lambda_\nu \leq x} (1 - e^{(\lambda_\nu - x)x^{-\theta}})^\varkappa\, a_\nu\, \Phi_\nu(P)$$

zum Werte $f(P)$ bei $x \to \infty$ konvergiert. Der erwähnte Satz lautet wie folgt:

Bezeichnungen: (i) $J_1(x)$ sei die Besselsche Funktion der Ordnung 1. (ii) ρ_P bezeichne die Minimalentfernung zwischen P und $\bar{D}$. ρ sei eine Zahl, die der Bedingung

$$0 < \rho < \rho_P$$

genügt.

(iii) $$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{f(r, \varphi) - f(0,0)\}\, d\varphi\,;$$

dabei bezeichnen r und φ die Polarkoordinaten des Punktes Π, und P ist der Anfangspunkt des Koordinatensystems.

Voraussetzungen: (i) Sei $f(\Pi)$ über D absolut integrierbar. (ii) sei $1/2 < \theta < 1$ und

$$\varkappa > \frac{3}{4}\left(\theta - \frac{1}{2}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Behauptung: Damit $\sum a_\nu \Phi_\nu(P)$ zur Summe $f(P)$ nach dem G_θ^χ-Verfahren summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass

$$\alpha(t) = t^{1/2} \int_0^\rho g(r) J_1(rt^{1/2})\, dr \tag{4}$$

für ein $0 < \rho \leqslant \rho_P$ nach dem G_θ^χ-Verfahren zur Summe 0 summierbar ist.

3. Bezüglich der σ_λ^k-(Riesz)-Summierbarkeit der verallgemeinerten Fourier-Reihen hat Herr T. V. Avadhani [1] folgenden Satz bewiesen:

Bezeichnungen: (i) $f_P(t)$ ist das sphärische Mittel von $f(\Pi)$ im Punkte P, d. h.

$$f_P(t) = \frac{\Gamma(n/2)}{2(\pi)^{n/2}} \int_S f(P + \xi t)\, d\sigma_\xi, \tag{5}$$

wobei

$$P + \xi t = (x_1 + \xi_1 t, x_2 + \xi_2 t, \ldots, x_n + \xi_n t),$$

und

$$S: \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1.$$

(ii)
$$V_\mu(x) = x^{-\mu} J_\mu(x) \tag{6}$$

wobei $J_\mu(x)$ die Besselsche Funktion der Ordnung μ ist.

(iii) ρ_P bezeichnet die Minimalentfernung zwischen P und $\overline{D}$. ρ sei eine Zahl, die der Bedingung

$$0 < \rho < \rho_P$$

genügt.

(iv)
$$\alpha_k(t) = \frac{2^{k-\frac{n}{2}+1}\Gamma(k+1)}{\Gamma(n/2)} x^{n/2} \int_0^\rho t^{n-1} V_{k+\frac{n}{2}}(t\sqrt{x}) \{f_P(t) - f(P)\}\, dt \tag{7}$$

Voraussetzung: $f(\Pi) \in L^2(D)$.

Behauptung: Für $k \geqslant (n-1)/2$ gilt

$$\sum_{\lambda_\nu \leqslant x} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{x}\right)^k a_\nu \Phi_\nu(P) = \alpha_k(x) + f(P) + O\left\{x^{-\frac{1}{2}\left(k - \frac{n-1}{2}\right)}\right\}, \quad x \to \infty. \tag{8}$$

Insbesondere ergibt sich daraus folgende Behauptung: Wenn $f(\Pi)$ stetig im Punkte $\Pi = P$ ist, so gilt für $k > (n-1)/2$

$$\sum_{\lambda_\nu \leqslant x} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{x}\right)^k a_\nu \Phi_\nu(P) \to f(P), \text{ für } x \to \infty.$$

4. Im Abschnitt II beweise ich folgenden

SATZ 1. *Bezeichnungen:* (i) *Sei* $k \geqslant 0$ *eine ganze Zahl,* $0 < \theta < 1$ *und* $f_P(t), \alpha_k(t)$ *und* $V_{k+n/2}(t)$ *sollen dieselbe Bedeutung haben wie vorher.*

(ii) $\sigma^k(x)$ *sei das Rieszsche Mittel* k *– ter Ordnung der Fourier-Reihe von* $f(\Pi)$ *im Punkte* $\Pi = P$, *d. h.*

$$\sigma^k(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{x}\right)^k a_\nu \Phi_\nu(P).$$

(iii) $G_\theta^\varkappa(x)$ *sei das* $G_\theta^\varkappa$*-Mittel der Fourier-Reihe von* $f(\Pi)$ *im Punkte* $\Pi = P$, *d. h.*

$$G_\theta^\varkappa(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} (1 - e^{(\lambda_\nu - x) x^{-\theta}})^\varkappa a_\nu \Phi_\nu(P).$$

Voraussetzungen: 1) $\alpha_0(t)$ *ist* $G_\theta^\varkappa$*-summierbar zur Summe* 0.

2) $$\sigma^k(x) = \alpha_k(x) + f(P) + o\{x^{-k(1-\theta)}\}, \quad x \to \infty. \tag{9}$$

Behauptung: Für jedes $\varkappa > k$ *ist*

$$G_\theta^\varkappa(x) = f(P) + o(1), \quad x \to \infty. \tag{10}$$

5. Mit Hilfe des Satzes 1, sowie des erwähnten Satzes von Avadhani, werde ich im Abschnitt III notwendige und hinreichende lokale Bedingungen für $f(\Pi)$ aus $L^2(D)$ angeben, damit die verallgemeinerte Fourier-Reihe der Funktion $f(\Pi)$ im Punkte $\Pi = P$ zum Werte $f(P)$ summierbar ist. Der zu beweisende Satz lautet wie folgt:

SATZ 2. *Voraussetzungen:* 1) $f(\Pi) \in L^2(D)$.

2) *Sei*

$$\frac{1}{2} < \theta < 1 \text{ und } \varkappa > \frac{n+1}{2(2\theta - 1)}. \tag{11}$$

Behauptung: Damit $\Sigma a_\nu \Phi_\nu(P)$ *zur Summe* $f(P)$ *nach dem* $G_\theta^\varkappa$*-Verfahren summierbar ist, ist notwendig und hinreichend dass* $\alpha_0(t)$ *für ein* $0 < \rho < \rho_P$ *nach dem* $G_\theta^\varkappa$*-Verfahren zur Summe* 0 *summierbar ist.*

Da das $G_\theta^\varkappa$-Verfahren ähnlich dem Valironschen Verfahren die Eigenschaft hat bezüglich $0<\theta<1$ eine stetige Folge wesentlich verschiedener Verfahren zu bilden, so wird durch den Satz 2 der bekannte Satz von Hardy-Littlewood [6] bzw. Morgan [7] über die Valiron-Summierbarkeit gewöhnlicher Fourier-Reihen im gewissen Sinne auf verallgemeinerte Fourier-Reihen übertragen.

Bemerkung. Wenn n eine gerade Zahl ist, so lässt sich, wie leicht einzusehen ist, die Ungleichung (11) bis auf

$$\varkappa > \frac{n}{2(2\theta-1)} \tag{11'}$$

verbessern.

Anderseits, erhält man aus $\alpha_\theta(t)$ für $n=2$ genau die Funktion (4) aus [2] von V. G. Avakumović (vergl. die Überlegungen am Ende dieser Arbeit).

In diesem Falle, aber, sind wegen $L^2(D)\subset L^1(D)$ der Satz von V. G. Avakumović und der Satz 2 einander nicht enthalten, obwohl die Ungleichung (11') schärfer als die entsprechende Ungleichung (3) des Satzes von V. G. Avakumović ist.

II. BEWEIS DES SATZES 1.

Wegen

$$x^k\sigma^k(x)=k\int_0^x (x-t)^{k-1}A(t)\,dt, \quad (A(0)=0)$$

ist

$$A(x)=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\{x^k\sigma^k(x)\}. \tag{12}$$

Wenden wir auf die Funktion $A(x)$ das Verfahren $G_\theta^\varkappa$ an, so erhalten wir

$$G_\theta^\varkappa(x)=\frac{\varkappa}{x^\theta}\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1}e^{(t-x)x^{-\theta}}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\{t^k\sigma^k(t)\}\,dt. \tag{13}$$

Nun setzen wir

$$\sigma^k(x)=\alpha_k(x)+f(P)+\delta(x)\,x^{-\beta} \qquad \text{mit } \beta=k(1-\theta) \tag{14}$$

wobei

$$\delta(x)\to 0, \quad x\to\infty.$$

Wird (14) in (13) eingesetzt, so erhalten wir

$$G_\theta^\varkappa(x) = \frac{\varkappa}{x^\theta}\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\{t^k \alpha_k(t)+f(P)\,t^k+\delta(t)\,t^{k-\beta}\}\,dt$$

$$=K_1+K_2+K_3, \tag{15}$$

wobei

$$K_1 = \frac{\varkappa}{x^\theta}\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\{t^k \alpha_k(t)\}\,dt,$$

$$K_2 = \frac{\varkappa}{x^\theta}\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{f(P)}{k!}\frac{d^k}{dt^k}(t^k)\,dt$$

und

$$K_3 = \frac{\varkappa}{x^\theta}\int_0^x (1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\{\delta(t)\,t^{k-\beta}\}\,dt.$$

Da $G_\theta^\varkappa$ ein reguläres Verfahren ist, so ist

$$K_2=f(P)+o(1), \quad x\to\infty. \tag{16}$$

Mittels teilweiser Integration erhält man

$$K_3 = \frac{(-1)^k\varkappa}{k!\,x^\theta}\int_0^x \frac{d^k}{dt^k}\{(1-e^{(t-x)x^{-\theta}})^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\}\,\delta(t)\,t^{k-\beta}\,dt.$$

In [4] Kapitell II habe ich bewiesen dass

$$K_3=o(1), \quad x\to\infty \quad \text{wenn} \quad \beta=k(1-\theta). \tag{17}$$

Wegen (6) und (7) ist

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\{t^k\alpha_k(t)\} = \frac{c}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\left\{t^{k+\frac{n}{2}}\int_0^\rho \tau^{n-1} V_{k+\frac{n}{2}}(\tau\sqrt{t})[f_P(\tau)-f(P)]\,d\tau\right\}$$

$$=\frac{c}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\left\{\int_0^\rho \tau^{-2k-1}(\tau\sqrt{t})^{k+\frac{n}{2}} J_{k+\frac{n}{2}}(\tau\sqrt{t})[f_P(\tau)-f(P)]\,d\tau\right\}$$

$$=\frac{c}{k!}\int_0^\rho \tau^{-2k-1}\frac{d^k}{dt^k}[(\tau\sqrt{t})^{k+\frac{n}{2}} J_{k+\frac{n}{2}}(\tau\sqrt{t})]\,[f_P(\tau)-f(P)]\,d\tau,$$

mit

$$c=\frac{2^{k-\frac{n}{2}+1}\Gamma(k+1)}{\Gamma(n/2)}.$$

Benutzen wir die bekannte Formel [5] (S. 46)

$$\frac{d^k}{dz^k}\{z^\nu J_\nu(z)\}=z^\nu J_{\nu-k}(z),$$

so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\{(\tau\sqrt{t})^{k+\frac{n}{2}} J_{k+\frac{n}{2}}(\tau\sqrt{t})\}=\frac{\tau^2}{2}(\tau\sqrt{t})^{k+\frac{n}{2}-1} J_{k+\frac{n}{2}-1}(\tau\sqrt{t}),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\{(\tau\sqrt{t})^{k+\frac{n}{2}} J_{k+\frac{n}{2}}(\tau\sqrt{t})\}=\left(\frac{\tau^2}{2}\right)^2(\tau\sqrt{t})^{k+\frac{n}{2}-2} J_{k+\frac{n}{2}-2}(\tau\sqrt{t}),$$

. . . . . .

$$\frac{d^k}{dt^k}\{(\tau\sqrt{t})^{k+\frac{n}{2}} J_{k+\frac{n}{2}}(\tau\sqrt{t})\}=\left(\frac{\tau^2}{2}\right)^k(\tau\sqrt{t})^{n/2} J_{n/2}(\tau\sqrt{t}).$$

Demnach ist (18)

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\{t^k\alpha_k(t)\}=\frac{t^{n/4}}{2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}\int_0^\rho \tau^{n/2-1} J_{n/2}(\tau\sqrt{t})\{f_P(\tau)-f(P)\}\,d\tau=\alpha_0(t).$$

Auf Grund von (18) folgt

$$K_1=\frac{\varkappa}{x^\theta}\int_0^x\left(1-e^{(t-x)x^{-\theta}}\right)^{\varkappa-1} e^{(t-x)x^{-\theta}}\alpha_0(t)\,dt,$$

woraus, da der Voraussetzung nach $\alpha_0(t)$ zum Werte 0 nach dem $G_\theta^\varkappa$-Verfahren summierbar ist,

$$K_1=o(1),\qquad x\to\infty, \tag{19}$$

folgt.

Aus (15), (16), (17) und (19) folgt nun

$$G_\theta^\varkappa(x)=f(P)+o(1),\qquad x\to\infty, \tag{20}$$

womit der Satz 1 bewiesen ist.

III. *BEWEIS DES SATZES* 2

Setzen wir

$$H_1 = \frac{2^{k-n/2+1}\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(n/2)}\, x^{n/2} \int_0^{\rho} t^{n-1}\, V_{k+\frac{n}{2}}(t\sqrt{x})\, f(P)\, dt \tag{21}$$

und

$$H_2 = \frac{2^{k-n/2+1}\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(n/2)}\, x^{n/2} \int_0^{\rho} t^{n-1}\, V_{k+\frac{n}{2}}(t\sqrt{x})\, \{f_P(t) - f(P)\}\, dt \tag{22}$$

so wird

$$\sum_{\lambda_\nu \leqslant x} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{x}\right)^k a_\nu\, \Phi_\nu(P) = H_1 + H_2 + O\left\{x^{-\frac{1}{2}\left(k - \frac{n-1}{2}\right)}\right\}, \qquad x \to \infty \tag{23}$$

Betrachten wir zunächst das Integral H_1. Es ist

$$H_1 = \frac{2^{k-n/2+1}\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(n/2)}\, f(P) \int_0^{\rho\sqrt{x}} t^{n/2-k-1} J_{k+\frac{n}{2}}(t)\, dt =$$

$$= \frac{2^{k-n/2+1}\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(n/2)}\, f(P) \left\{ \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-k-1} J_{k+\frac{n}{2}}(t)\, dt - \int_{\rho\sqrt{x}}^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-k-1} J_{k+\frac{n}{2}}(t)\, dt \right\}.$$

Auf Grund der bekannten Formel [5]

$$\int_0^{+\infty} t^{\mu-(\nu+1)} J_\nu(t)\, dt = \frac{\Gamma(\mu/2)}{2^{\nu-\mu+1}\,\Gamma(\nu - \mu/2 + 1)}, \text{ für } 0 < \mu < \nu + \frac{3}{2},$$

mit $\nu = k + n/2$ und $\mu = n$ wobei, wegen $\mu = n \geqslant 2$ und $k > (n-1)/2$, offenbar $0 < \mu < \nu + 3/2$ gilt, erhält man

$$H_1 = f(P) - \frac{2^{k-n/2+1}\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(n/2)}\, f(P) \int_{\rho\sqrt{x}}^{+\infty} t^{n/2-k-1} J_{k+\frac{n}{2}}(t)\, dt.$$

Wegen

$$J_m(t) = O(t^{-1/2}), \quad t \to \infty,$$

ist

$$\int_{\rho\sqrt{x}}^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-k-1} J_{k+\frac{n}{2}}(t)\,dt = O\left(\int_{\rho\sqrt{x}}^{+\infty} t^{\frac{n}{2}-k-3/2}\,dt\right) =$$

$$= O\left\{x^{-\frac{1}{2}\left(k-\frac{n-1}{2}\right)}\right\}, \quad x \to \infty,$$

und demnach

$$H_1 = f(P) + O\left\{x^{-\frac{1}{2}\left(k-\frac{n-1}{2}\right)}\right\}, \quad x \to \infty. \tag{24}$$

Wegen (7), (22), (23) und (24) ist

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda_\nu \leqslant x}\left(1-\frac{\lambda_\nu}{x}\right)^k a_\nu \Phi_\nu(P) &= \alpha_k(x) + f(P) + O\left\{x^{-\frac{1}{2}\left(k-\frac{n-1}{2}\right)}\right\}, \quad x \to \infty, \\ &= \alpha_k(x) + f(P) + o\left\{x^{-\frac{1}{2}\left(k-\frac{n-1}{2}-\eta\right)}\right\}, \quad x \to \infty\end{aligned} \tag{25}$$

mit $\eta > 0$, wobei $k > (n-1)/2 + \eta$.

Auf Grund des Satzes 1 (Formel (25)) ergibt sich

$$G_\theta^\varkappa(x) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant x}(1 - e^{(\lambda_\nu - x)x^{-\theta}})^\varkappa a_\nu \Phi_\nu(P) = f(P) + o(1), \quad x \to \infty, \tag{26}$$

wobei θ so gewählt ist dass zwischen θ und k die Beziehung

$$k(1-\theta) = \frac{1}{2}\left(k - \frac{n-1}{2} - \eta\right), \tag{27}$$

besteht. Daraus folgt

$$\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(n-1)/2 + \eta}{k}\right) \tag{28}$$

und

$$k = \frac{n-1+2\eta}{2(2\theta-1)}. \tag{29}$$

Da

$$k > \frac{n-1}{2} + \eta,$$

so ist für gerade $n = 2m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$

$$k > m - \frac{1}{2} + \eta, \quad \text{d. h.} \quad k = m, m+1, m+2, \ldots$$

Dabei kann η die Werte aus dem Intervall (0, 1 2) nehmen.

Für ungerade $n=2m+1$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ ist

$$k > m+\eta, \quad \text{d. h.} \quad k=m+1, m+2, m+3, \ldots$$

Dabei kann η die Werte aus dem Intervall (0,1) nehmen.

Wegen (28) bedeutet dies dass für alle n, θ die Werte aus dem Intervall (1/2,1) nehmen kann. (Wenn $k \to \infty$, dann $\theta \to 1/2$.)

Demnach ist wegen (29)

$$k \leqslant \frac{n+1}{2(2\theta-1)}$$

und folglich $\varkappa > k$, wenn nur

$$\varkappa > \frac{n+1}{2(2\theta-1)}$$

ist.

(Eingegangen am 1. Oktober 1958).

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Avadhani T. V. — On the summability of eigenfunction expansions I, *J. Indian Math. Soc.* **XVIII**, 1 (1954), 9—18.

[2] Avakumović V. G. — Über die Eigenwerte der Schwingungsgleichung, *Math. Scand.* **4** (1956), 161—173.

[3] Левитан Б. М. — О разложении по собственниым функциям оператора Лапласа, *Мат. сб.* т. **35 (77)**: 2 (1954), 267—316.

[4] Maravić M. — O jednom postupku zbirljivosti divergentnih redova, *Zbornik radova Мат. инст.* **6** (1957).

[5] Watson G. N. — A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1952.

[6] Hardy and Littlewood — Some new convergence criteria for Fourier series, *Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa* (2) **3** (1934), 43—62.

[7] Morgan G. W. — On the new convergence criteria for Fourier series of Hardy and Littlewood, *Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa* (2) **4** (1935), 373—382.