EINE NEUE KLASSE VON POLYNOMEN UND IHRE ANWENDUNG IN DER THEORIE DER LIMITIERUNGSVERFAHREN

VLADETA VUČKOVIĆ (Zrenjanin)

ZUSAMMENFASSUNG – Es wird ein neues Limitierungsverfahren eingeführt und dessen Tragweite und Verhältniss zu den Karamata—Stirlingschen Limitierungsverfahren untersucht.

1. In [1] hat J. Karamata mit Hilfe von Stirlingschen Zahlen eine Klasse von Limitierungsverfahren, von ihm Stirlingsche Verfahren genannt, eingeführt und ihre Beziehung zum Eulerschen und Borelschen Verfahren untersucht. Mehr als zwanzig Jahre später hat Lototsky[1] in [2] einen Spezialfall dieser Karamata — Stirlingschen Verfahren wiedergefunden. Anschliessend an Lototsky hat R. P. Agnew in [3] diesen Spezialfall näher untersucht und seine Tragweite und Wichtigkeit klargemacht.

Durch die Arbeit von Agnew angeregt, suchte ich eine natürliche Verallgemeinerung dieses Spezialfalles und kam zu einer Klasse von Verfahren, die ich modifizierte Stirlingsche Verfahren nennen werde, welche in einer harmonischen Weise die Karamata—Stirlingschen Verfahren ergänzen.

In dieser Arbeit werde ich diese modifizierte Stirlingsche Verfahren einführen und untersuchen, insbesondere in bezug auf die Verfahren von Karamata—Stirling. Am Ende werde ich auf eine Möglichkeit, die beiden Klassen zu einer zweiparametrigen Klasse zusammenzufassen, hinweisen.

2. In dieser Abteilung werde ich, insoweit mir bekannt, eine neue Klasse von Polynomen einführen und deren für das Folgende wichtigste Eigenschaften untersuchen.

DEFINITION 2.1. *$\sigma_\nu^n(\alpha)$ und $\tau_\nu^n(\alpha)$ sind für $n=0, 1, 2, \ldots$ und ganze ν folgendermassen erklärt*

$$\sigma_0^0(\alpha)=\tau_0^0(\alpha)\equiv 1; \tag{2.1}$$

---

[1]) Nur aus der Anführung von Agnew [3] bekannt.

für $n=1, 2, \ldots$ *und* $0 \leqslant \nu \leqslant n$ *ist*

$$(x+\alpha)(x+\alpha+1)\ldots(x+\alpha+n-1)=\sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\cdot x^\nu, \tag{2.2}$$

$$x^n=(-1)^n\left\{\tau_0^n(\alpha)+\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu \tau_\nu^n(\alpha)\cdot(x+\alpha)(x+\alpha+1)\ldots(x+\alpha+\nu-1)\right\};$$

und für $\nu > n$ *als auch für* $\nu=-1, -2, \ldots$ *ist*

$$\sigma_\nu^n(\alpha)=\tau_\nu^n(\alpha)\equiv 0. \tag{2.3}$$

Man beweist leicht den

SATZ 2.1. *Für* $n=0, 1, 2, \ldots$ *und jedes ganze* ν *gilt*

$$\sigma_\nu^{n+1}(\alpha)=(n+\alpha)\,\sigma_\nu^n(\alpha)+\sigma_{\nu-1}^n(\alpha) \tag{2.4}$$

$$\tau_\nu^{n+1}(\alpha)=(\nu+\alpha)\,\tau_\nu^n(\alpha)+\tau_{\nu-1}^n(\alpha). \tag{2.5}$$

Offensichtlich sind $\sigma_\nu^n(\alpha)$ und $\tau_\nu^n(\alpha)$ Polynome von α. Wir geben einige davon:

$\sigma_0^0(\alpha)=1,$

$\sigma_0^1(\alpha)=\alpha,$ $\quad \sigma_1^1(\alpha)=1,$

$\sigma_0^2(\alpha)=\alpha(\alpha+1),$ $\quad \sigma_1^2(\alpha)=2\alpha+1,$ $\quad \sigma_2^2(\alpha)=1,$

$\sigma_0^3(\alpha)=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2),$ $\quad \sigma_1^3(\alpha)=3\alpha^2+6\alpha+2,$ $\quad \sigma_2^3(\alpha)=3\alpha+3,$ $\quad \sigma_3^3(\alpha)=1,$

und allgemein $\sigma_0^n(\alpha)=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1),$ $\sigma_n^n(\alpha)=1;$

$\tau_0^0(\alpha)=1,$

$\tau_0^1(\alpha)=\alpha,$ $\quad \tau_1^1(\alpha)=1,$

$\tau_0^2(\alpha)=\alpha^2,$ $\quad \tau_1^2(\alpha)=2\alpha+1,$ $\quad \tau_2^2(\alpha)=1,$

$\tau_0^3(\alpha)=\alpha^3,$ $\quad \tau_1^3(\alpha)=3\alpha^2+3\alpha+1,$ $\quad \tau_2^3(\alpha)=3\alpha+3,$ $\quad \tau_3^3(\alpha)=1,$

und allgemein $\tau_0^n(\alpha)=\alpha^n,$ $\tau_n^n(\alpha)=1.$

Wie man leicht bemerkt, sind $\sigma_n^\nu(0)$ und $\tau_\nu^n(0)$ die Stirlingschen Zahlen $\mathfrak{C}_n^{n-\nu}$ und $\mathfrak{L}_{\nu+1}^{n-\nu}$ der ersten und zweiten Art in der Bezeichnungsweise von Nielsen ([4] S. 66 ff.). Deswegen wollen wir $\sigma_\nu^n(\alpha)$ bzw. $\tau_\nu^n(\alpha)$ Stirlingsche Polynome der ersten bzw. zweiten Art, zum Unterschiede von eigentlichen Stirlingschen Polynomen, nennen. Von den vielen Eigenschaften dieser Polynome wollen wir nur einige hervorheben. Aus

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, x^\nu = (x+\alpha)\ldots(x+\alpha+n-1) = \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(0)\,(x+\alpha)^\nu$$

folgt leicht die Beziehung

$$\sigma_\nu^n(\alpha) = \sum_{k=\nu}^{n} \sigma_k^n(0)\binom{k}{\nu}\alpha^{k-\nu}, \tag{2.6}$$

die für $n=1,2,\ldots$ und $0 \leqslant \nu \leqslant n$ gültig ist, und ähnlich, die etwas allgemeinere Beziehung

$$\sigma_\nu^n(\alpha+\varepsilon) = \sum_{k=\nu}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\binom{k}{\nu}\varepsilon^{k-\nu}. \tag{2.7}$$

Für $\tau_\nu^n(\alpha)$ kann man eine explizite Darstellung auf einem kleinen Umwege erhalten. Zu diesem Zwecke beweisen wir

HILFSSATZ 2.1. *Es gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{n} \tau_\nu^n(\alpha)\, x^{\alpha+\nu} = e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\nu+\alpha)^n x^{\nu+\alpha}}{\nu!}. \tag{2.8}$$

B e w e i s. Setzt man

$$\varphi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \tau_\nu^n(\alpha)\, x^{\nu+\alpha}$$

so ist wegen (2.5)

$$\varphi_{n+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \tau_\nu^{n+1}(\alpha)\, x^{\alpha+\nu} = x\,\{\varphi_n'(x)+\varphi_n(x)\}$$

und, nach einem Ansatz von A g n e w ([3], S. 113)

$$e^x\varphi_{n+1}(x) = x\frac{d}{dx}\{e^x\varphi_n(x)\}. \tag{2.9}$$

Anderseits, für

$$\Phi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\nu+\alpha)^n x^{\nu+\alpha}}{\nu!}$$

gilt auch

$$\Phi_{n+1}(x) = x\,\Phi_n'(x) \tag{2.9'}$$

und noch $\Phi_0(x) = e^x \varphi_0(x)$. Daraus auf Grund von (2.9′) folgt

$$e^x \varphi_n(x) = \Phi_n(x), \quad \text{wzbw.}$$

Aus dem Hilfssatze folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\tau_\nu^n(\alpha) = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{\nu}{k} (k+\alpha)^n = \tag{2.10}$$

$$= \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \binom{\nu}{i} i^{n-k},$$

wodurch auch eine explizite Darstellung der Polynome $\tau_\nu^n(\alpha)$ gewonnen wird. Für $\alpha = 0$ reduziert sich (2.10) auf die bekannte Darstellung der Stirlingschen Zahlen zweiter Art.

Wir führen noch die Formel

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \tau_\nu^n(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha+\nu}{\nu} \frac{(\nu+\alpha)^n}{2^{\nu+\alpha}} \tag{2.11}$$

an. Im wesentlichen (für den Fall $\alpha = 0$) rührt sie von Agnew her und wird genau wie bei ihm ([3] S. 113—114) bewiesen.

Auch ohne Beweis (der leicht mittels der Differenzengleichung

$$\sigma_1^{n+1}(\alpha) = (n+\alpha)\sigma_1^n(\alpha) + \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$$

oder sogar direkt aus der Definition gewonnen werden kann) führen wir die Formel

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu+\alpha} = \sigma_1^{n+1}(\alpha)/\{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\}, \tag{2.12}$$

an, die für $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ gültig ist.

Für die Umkehrung benötigen wir den folgenden

SATZ 2.2. *Aus*

$$A_n = \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha) B_\nu \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

folgt

$$B_n = (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \tau_\nu^n(\alpha) A_\nu, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{2.14}$$

Beweis. Offensichtlich ist

$$B_n=\sum_{\nu=0}^{n} \mu_\nu^n(\alpha)\cdot A_\nu$$

wobei die $\mu_\nu^n(\alpha)$ von der besonderen Wahl der Folgen $\{B_n\}$ bzw. $\{A_n\}$ nicht abhängen. Nehmen wir $A_0=B_0=1$, $A_n=(x+\alpha)(x+\alpha+1)\ldots(x+\alpha+n-1)$ also $B_n=x^n$, so bekommt man gleich $\mu_\nu^n(\alpha)=(-1)^{n+\nu}\tau(\alpha)$.

3. In dieser Abteilung werden wir die Grössenordnung der Stirlingschen Polynome erster Art untersuchen. Dabei beschränken wir uns auf diejenigen Werte des Argumentes α die >-1 sind, weil wir nur diese Werte für unsere spätere Zwecke benötigen.

HILFSSATZ 3.1. *Für* $\varepsilon>0$, $n=1,2,\ldots$ *und* $0\leqslant\nu\leqslant n$ *gilt*

$$\sigma_\nu^n(-1+\varepsilon)=\sigma_{\nu-1}^{n-1}(\varepsilon)-(1-\varepsilon)\,\sigma_\nu^{n-1}(\varepsilon) \tag{3.1}$$

Beweis.

$$\sum_{\nu=0}^{n}\sigma_\nu^n(-1+\varepsilon)\,x^\nu=(x-1+\varepsilon)\,(x+\varepsilon)\,(x+\varepsilon+1)\ldots(x+\varepsilon+n-2)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}\sigma_\nu^{n-1}(\varepsilon)\,x^{\nu+1}-(1-\varepsilon)\sum_{\nu=0}^{n-1}\sigma_\nu^{n-1}(\varepsilon)\,x^\nu=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\{\,\sigma_{\nu-1}^{n-1}(\varepsilon)-(1-\varepsilon)\,\sigma_\nu^{n-1}(\varepsilon)\}\;x.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die Behauptung.

SATZ 3.1. a) *Für* $\alpha>0$ *sind* $\sigma_\nu^n(\alpha)>0$ *und genügen dort für* $n=2,3,\ldots$ $0\leqslant\nu\leqslant n$ *der Abschätzung*

$$\sigma_\nu^n(\alpha)\leqslant(\alpha)_n\cdot\{H_{n-1}^\alpha\}^\nu, \tag{3.2}$$

wobei $H_{n-1}^\alpha=\sum_{\nu=0}^{n-1}1/(\nu+\alpha)$ *und* $(\alpha)_n=\alpha\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$ *für* $n=1,2,\ldots$ (*und* $(\alpha)_0=1$).

b) *Für* $\alpha=0$ *sind* $\sigma_\nu^n(0)\geqslant0$ *und es gilt*

$$\sigma_\nu^n(0)\leqslant(n-1)!\,\{H_{n-1}\}^\nu \tag{3.3}$$

wo

$$H_{n-1}=1+1/2+\cdots+1/(n-1).$$

c) *Für* $\alpha = -1+\varepsilon,\ 0<\varepsilon<1,\ n=2,3,\ldots$ *und* $\nu=1,2,\ldots,n-1$ *ist*

$$|\sigma_\nu^n(-1+\varepsilon)| \leqslant (\varepsilon)_{n-1}\cdot(2+\varepsilon)\cdot\{H_{n-1}^{\varepsilon}\}^\nu. \tag{3.4}$$

Beweis. Ad a). Induktion nach ν. Es ist

$$\sigma_0^n(\alpha) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$$

und

$$\sigma_1^n(\alpha) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,H_{n-1}^{\alpha}$$

wobei

$$H_{n-1}^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{n-1} 1/(\alpha+\nu).$$

Es sei jetzt für ein $k<n$

$$\sigma_k^n(\alpha) \leqslant \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\{H_{n-1}^{\alpha}\}^k.$$

Dann ist

$$\sigma_{k+1}^n = (\alpha+n-1)\,\sigma_{k+1}^{n-1}(\alpha) + \sigma_k^{n-1}(\alpha)$$

dh.

$$\sigma_{k+1}^n(\alpha) \leqslant (\alpha+n-1)\,\sigma_{k+1}^{n-1}(\alpha) + (\alpha)_{n-1}\,\{H_{n-2}^{\alpha}\}^k.$$

Wird diese Ungleichung durch $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$ dividiert und sämtliche so erhaltene Ungleichungen von $n=k+2$ bis $n=N$ addiert bekommt man

$$\frac{\sigma_{k+1}^k(\alpha)}{(\alpha)_N} \leqslant \frac{1}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)} + \frac{(H_k^{\alpha})^k}{\alpha+k+1} + \frac{(H_{k+1}^{\alpha})^k}{\alpha+k+z} + \cdots + \frac{(H_{N-2}^{\alpha})^k}{\alpha+N-1} \leqslant$$

$$\leqslant \{H_{N-2}^{\alpha}\}^k \left\{\frac{1}{\alpha+k} + \cdots + \frac{1}{\alpha+N-1}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \{H_{N-1}^{\alpha}\}^k \cdot H_{N-1}^{\alpha} = \{H_{N-1}^{\alpha}\}^{k+1}$$

Damit ist dieser Fall erledigt.

Fall b) is bekannt (Agnew [3])

Ad c) Nach dem Hilfssatze 3.1 gilt

$$|\sigma_\nu^n(-1+\varepsilon)| \leqslant \sigma_{\nu-1}^{n-1}(\varepsilon) + (1+\varepsilon)\,\sigma_\nu^{n-1}(\varepsilon)$$

und weiter nach dem Falle a)

$$|\sigma_\nu^n(-1+\varepsilon)| \leqslant \varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+n-2)\,\{[H_{n-1}^{\varepsilon}]^{\nu-1} + (1+\varepsilon)[H_{n-1}^{\varepsilon}]^\nu\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+n-2)\,\{H_{n-1}^{\varepsilon}\}^\nu,$$

wzbw.

4. Wir führen jetzt die angekündigte Klasse von modifizierten Stirlingschen Limitierungsverfahren durch folgende Definition ein.

DEFINITION 4.1. *Für* $\alpha > -1$ *sei* $P_0(\alpha)=1$ *und*

$$P_n(\alpha)=(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n), \quad n=1,2,\ldots.$$

und man setze

$$p_{n,\nu}(\alpha)=\sigma_\nu^n(\alpha)/P_n(\alpha).$$

Dann sagen wir: die Folge $s=\{s_\nu\}$ *ist* σ^α*-limitierbar zum Werte* S *wenn*

$$S_n^\alpha(s)=\sum_{\nu=0}^{n} p_{n,\nu}(\alpha)\, s_\nu \to S, \quad n\to\infty.$$

SATZ 4.2. *Die* σ^α*-Verfahren sind regulär.*

Beweis. Offensichtlich ist $\sum p_{n,\nu}(\alpha)=1$. Weiter, für $\alpha\geqslant 0$ sind $p_{n,\nu}(\alpha)\geqslant 0$, also auch $\sum|p_{n,\nu}(\alpha)|=1$. Im Falle $-1<\alpha<0$ ersetzt man $p_{n,\nu}(-1+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, nach dem Hilfssatze 3.1 und gewinnt $\sum|p_{n,\nu}(-1+\varepsilon)|\leqslant \leqslant 2+\varepsilon$. Endlich, nach dem Satze 3.1 gewinnt man $p_{n,\nu}(\alpha)=o(1)$, $n\to\infty$, ν fest, weil H_n^α von der Ordnung $\log n$ ist.

Eine erste Einsicht in die Natur der modifizierten Stirlingschen Verfahren gibt

SATZ 4.3. *Die* σ^α*-Verfahren summieren die geometrische Reihe* $\sum z^\nu$ *zu ihrer echten Summe* $1/(1-z)$ *in der ganzen Halbebene* $\Re\{z\}<1$.

Beweis. Mit $s_n(z)=1/(1-z)-z^{n+1}/(1-z)$ ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} p_{n,\nu}(\alpha)\, s_n(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{z}{1-z}\varphi_n(z)$$

wobei

$$\varphi_n(z)=\frac{(z+\alpha)(z+\alpha+1)\ldots(z+\alpha+n-1)}{(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(n+\alpha)}\sim$$

$$\sim\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(z+\alpha-1)}\cdot n^{z-1}\to 0 \qquad \text{für } \Re\{z\}<1.$$

SATZ 4.4. *Aus*

$$S_n^\alpha=\sum_{\nu=0}^{n} p_{n,\nu}(\alpha)\, s_\nu \tag{4.1}$$

folgt

$$s_n=(-1)^n\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \tau_\nu^n(\alpha)\, P_\nu(\alpha)\, S_\nu^\alpha, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{4.2}$$

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung des Satzes 2.2. Er ermöglicht eine genaue Abschätzung der Grössenordnung derjenigen Folgen, die σ^{α}-limitierbar sind.

Nämlich, aus (4.2) folgt dass jede solche Folge der Abschätzung

$$s_n = O(1) \cdot \sum_{\nu=0}^{n} |\tau_\nu^n(\alpha)| P_\nu(\alpha)$$

genügt. Für $\alpha \geqslant 0$ ist aber

$$\sum |\tau_\nu^n(\alpha)| P_\nu(\alpha) = \sum \tau_\nu^n(\alpha) P_\nu(\alpha)$$

und nach der Formel (2.11) endlich $s_n = O(1) \cdot \Phi_n(\alpha)$ wo

$$\Phi_n(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha+\nu}{\nu} \frac{(\nu+\alpha)^n}{2^\nu}$$

Da aber $\binom{\alpha+\nu}{\nu} \sim \nu^{\alpha}$, $\nu \to \infty$, ist

$$\Phi_n(\alpha) = O(1) \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu+\alpha)^{n+\alpha}}{2^\nu}.$$

Die Reihe rechts lässt sich, ähnlich wie Agnew [3] die Reihe $\sum \nu^n/2^\nu$ abgeschätzt hat, zu $O\{\Gamma(n+\alpha+1)/\log 2)^n\}$ abschätzen.

Im Falle $-1 < \alpha < 0$ greife man zuerst zum Hilfssatz 3.1.

Somit gewinnt man den wichtigen

SATZ 4.5. *Ist die Folge $\{s_\nu\}$ σ^α-limitierbar so ist*

$$s_n = O\left\{\frac{n!\, n^\alpha}{(\log 2)^n}\right\}. \tag{4.3}$$

5. Satz 4.5 zeigt, dass die Inklusion $\sigma^\alpha \subset \sigma^{\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, zu erwarten ist. Wir beweisen, dass dies auch tatsächlich zutrifft.

SATZ 5.1 *Ist die Folge $\{s_\nu\}$ σ^α-limitierbar, so ist sie für jedes $\varepsilon > 0$ auch $\sigma^{\alpha+\varepsilon}$-limitierbar zum selben Werte.*

Beweis. Es sei

$$S_n^\alpha = \frac{1}{P_n(\alpha)} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)\, s_\nu \to S, \quad n \to \infty, \tag{5.1}$$

und für $\varepsilon > 0$

$$S_n^{\alpha+\varepsilon} = \frac{1}{P_n(\alpha+\varepsilon)} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha+\varepsilon)\, s_\nu.$$

Nach dem Satze 4.4 folgt aus (5.1)

$$s_\nu = (-1)^\nu \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \tau_i^\nu(\alpha) P_i(\alpha) S_i^\alpha$$

also

$$S_n^{\alpha+\varepsilon} = \frac{1}{P_n(\alpha+\varepsilon)} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sigma_\nu^n(\alpha+\varepsilon) \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \tau_i^\nu(\alpha) P_i(\alpha) S_i^\alpha = \tag{5.2}$$

$$= \frac{1}{P_n(\alpha+\varepsilon)} \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^\alpha P_\nu(\alpha) \lambda_\nu^n ,$$

wobei

$$\lambda_\nu^n = \sum_{i=0}^{n-\nu} (-1)^i \sigma_{\nu+i}^n(\alpha+\varepsilon) \tau_\nu^{\nu+i}(\alpha) \tag{5.3}$$

Funktionen von α und ε sein sollen. Durch unmittelbare Berechnung findet man aber

$$\begin{array}{lll} \lambda_0^0 = 1, & & \\ \lambda_0^1 = \varepsilon, & \lambda_1^1 = 1, & \\ \lambda_0^2 = \varepsilon(\varepsilon+1), & \lambda_1^2 = 2\varepsilon, & \lambda_2^2 = 1, \end{array} \tag{5.4}$$

und weiter, durch Benutzung der Formel (5.3), (2.4) und (2.5), findet man, dass die λ_ν^n der Rekursionformel

$$\lambda_\nu^{n+1} = (n-\nu+\varepsilon)\lambda_\nu^n + \lambda_{\nu-1}^n , \tag{5.5}$$

für $n=0, 1, 2\ldots$ und jedes ν, genügen. (Dabei ist für $\nu > n$ als auch für $\nu = -1, -2, \ldots,$ $\lambda_\nu^n \equiv 0$, zu nehmen). Aus (5.4) und (5.5) findet man durch Induktion

$$\lambda_\nu^n = \binom{n}{\nu} \varepsilon(\varepsilon+1)\ldots(\varepsilon+n-\nu-1), \tag{5.6}$$

für $n=1, 2, \ldots, 0 \leqslant \nu \leqslant n-1$ und

$$\lambda_n^n = 1 . \tag{5.7}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Folge $S_n^{\alpha+\varepsilon}$ gegen S konvergiert. Dies folgt aus der Regularität der Matrix $((q_{n,\nu}))$ mit

$$q_{n,\nu} = \frac{P_\nu(\alpha)\lambda_\nu^n}{P_n(\alpha+\varepsilon)} .$$

Da diese Matrix positiv ist und $\sum q_{n,\nu}=1$, ist noch zu zeigen, dass beim festen ν $q_{n,\nu}=o(1)$, $n\to\infty$. Nach (5.6) ist aber für $\alpha>-1$

$$q_{n,\nu}=O(1)\frac{n!\,(n-\nu)!\,(n-\nu)^{\varepsilon-1}}{\nu!\,(n-\nu)!\,n!\,n^{\alpha+\varepsilon}}=O(1)\cdot\frac{1}{n^{1+\alpha}}\to 0,\ n\to\infty$$

weil $\alpha>-1$ ist. Somit ist Satz 5.1 bewiesen.

HILFSSATZ 5.1. *Die Folge* $s=\{s_n\}$ *mit*

$$s_n=\frac{(-1)^n\,n!}{(\log 2)^n}$$

ist σ^1*-limitierbar, aber nicht* σ^0*-limitierbar.*

Beweis. Mit $\lambda=\log 2$ ist

$$s_n=\int_0^\infty e^{-t}\left(-\frac{t}{\lambda}\right)^n dt$$

und somit ihre σ^1-Transformierte

$$S_n^1(s)=\frac{1}{(n+1)!}\int_0^\infty e^{-t}\sum_{\nu=0}^n \sigma_\nu^n(1)\left(-\frac{t}{\lambda}\right)^\nu dt=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\int_0^\infty e^{-t}\left(-\frac{t}{\lambda}+1\right)\left(-\frac{t}{\lambda}+2\right)\cdots\left(-\frac{t}{\lambda}+n\right)dt.$$

Dieses Integral ist aber $o(1)$, was man der mehrmals genannten Arbeit von Agnew entnehmen kann ([3] S. 109—110).

Ähnlich findet man für die σ^0-Transformierte derselben Folge

$$S_{n+1}^0(s)=o(1)+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_n^\infty e^{-\lambda u}\,u(u-1)\ldots(u-n)\,du.$$

Es ist aber

$$h_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_n^\infty e^{-\lambda u} u(u-1)\ldots(u-n)\,du \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n}{(n+1)!} \int_n^\infty e^{-\lambda u} (u-1)(u-2)\ldots(u-n)\,du =$$

$$\geqslant \frac{ne^{-\lambda n}}{(n+1)!} \sum_{\nu=0}^\infty \int_\nu^{\nu+1} e^{-\lambda t}(t+n-1)\ldots(t+n-n)\,dt =$$

$$\geqslant \frac{ne^{-\lambda n}\cdot n!}{(n+1)!} \sum_{\nu=0}^\infty \binom{n+\nu}{n} e^{-(\nu+2)\lambda} =$$

$$\geqslant \frac{n}{n+1} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{(e^\lambda - 1)^{n+1}} = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty$$

weil $e^\lambda = 2$ ist. Also die Folge $(-1)^n h_n$ oszilliert und $S_{n+1}^0(s)$ kann nicht konvergieren.

Aus dem Hilfssatz 5.1 und dem Satze 5.1 folgt unmittelbar.

SATZ 5.2. $\sigma^\alpha \subset \sigma^{\alpha+\varepsilon}$ *für jedes* $\varepsilon > 0$.

6. Wir erinnern nun an die Definition der Karamata—Stirlingschen Limitierungsverfahren. In unserer Bezeichnungsweise lautet sie wie folgt:

DEFINITION 6.1. *Die Folge* $s = \{s_\iota\}$ *ist für* $\beta > 0$ K^β*-limitierbar zum Werte* S *wenn*

$$K_n^\beta(s) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(0)\,\beta^\nu s_\nu}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)} \to S, \quad n \to \infty. \tag{6.1}$$

Offensichtlich sind die Verfahren K^1 und σ^0 miteinander identisch. Um allgemein die Beziehung der σ^α und K^β aufzuklären, gebe ich folgenden Satz an.

SATZ 6.1. *Es ist* $K^\beta \subset K^\gamma$ *für alle* $0 < \gamma < \beta$.

Den Beweis dieses Satzes werde ich in einer anderen Arbeit veröffentlichen.

Also ist σ^{α} für $\alpha > 0$ stärker als jedes K^{β} mit $\beta > 1$, und jedes K^{β} mit $0 < \beta < 1$ stärker als jedes σ^{α} mit $-1 < \alpha < 0$.

7. Man kann eine zweiparametrige Schar von Limitierungsverfahren einführen, die die beiden Klassen vereinigt. Nämlich, wir werden sagen, dass die Folge $s = \{s_{\nu}\}$ $S^{\alpha, \beta}$-limitierbar zum Werte S sei ($\alpha > -1$, $\beta > 0$) falls

$$S_n^{\alpha, \beta}(s) = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} \sigma_{\nu}^{n}(\alpha)\, \beta^{\nu} s_{\nu}}{(\beta+\alpha)(\beta+\alpha+1)\ldots(\beta+\alpha+n-1)} \to S, \quad n \to \infty.$$

Dann ist $S^{\alpha, 1} = \sigma^{\alpha}$ und $S^{0, \beta} = K^{\beta}$.

Der Untersuchung dieser Klasse werden wir eine andere Arbeit widmen.

(Eingegangen am 8. Oktober 1958)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] J. Karamata — Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant. *Mathematica Cluj* **IX** (1935), 164—178.

[2] A. V. Lototsky — On a linear transformation of sequences and series. *Ivanov Gos. Ped. Inst. Uč. Zap. Fiz. Mat. Nauki* **4** (1953), 61—91.

[3] R. P. Agnew — The Lototsky method for evaluation of series. *Michigan Math. Journal* **4** (1957), 105—128.

[4] N. Nielsen — Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906.