ÜBER DAS ANWACHSEN ANALYTISCHER FUNKTIONEN AUF VERTIKALEN GERADEN

C. L. SIEGEL ZUM 60. GEBURTSTAG GEWIDMET

von

ALEXANDER PEYERIMHOFF und HANS-EGON RICHERT (Göttingen)

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, eine gewisse Ausdehnung eines bekannten Lindelöfschen Satzes[1] über das Verhalten analytischer Funktionen in einem Halbstreifen herzuleiten. Dieser Satz erschließt aus Abschätzungen mittels Potenzen der elementaren Funktionen e^t, t und $\log t$[2] auf den Rändern eine gewisse analoge Abschätzung im Innern. Den Beweisen liegt stets das aus dem Prinzip vom Maximum fließende Phragmén-Lindelöfsche Prinzip zugrunde, indem die oben genannte Fragestellung durch Einführung einer sich ähnlich wie die Abschätzungsfunktion verhaltenden analytischen Hilfsfunktion auf dieses Prinzip zurückgeführt wird.

Im folgenden wird durch ein neues Beweisverfahren, das das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip durch ein Cauchysches Integral mit geeignetem Kern ersetzt, gezeigt, daß jener Satz mit einer wesentlich allgemeineren Klasse von „normal oszillierenden" Abschätzungsfunktionen (Definition) richtig bleibt. Mit demselben Ansatz werden diese Ausdehnungen auch gleich für die entsprechenden Sätze über Mittelwerte analytischer Funktionen[3] durchgeführt.

Wir verwenden diese Ergebnisse, um zu zeigen, daß bei den durch Laplace-Integrale dargestellten Funktionen $f(s)$ der bekannte Satz, nach dem für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig für $\sigma \geqslant \sigma_\chi + \varepsilon$[4]

$$f(\sigma + it) = o\,(t^{\chi+1})$$

---

[1] Lindelöf [11], S. 346—348; vgl. [12], S. 108, Corollary.

[2] t^α: loc. cit. [1]; $e^{\alpha t}$: Hardy [5], Theorem 3; $\log^\alpha t$: Littlewood [12], S. 108; $t^\alpha \log^\beta t$: Iseki [9].

[3] Vgl. hierzu etwa Hardy [5], Carlson [3], Hardy-Ingham-Pólya [6], Ingham [8].

[4] σ_χ bezeichnet die Abszisse der C_χ-Summierbarkeit.

gilt, nicht zu

$$f(\sigma+it)=O\left(\frac{t^{\varkappa+1}}{\eta(t)}\right), \quad \eta(t)\nearrow+\infty,$$

verbessert werden kann. Eine entsprechende Aussage ergibt sich für Dirichletsche Reihen bei ganzem $\varkappa$[5].

Die O- und o-Abschätzungen beziehen sich stets auf die Bewegung einer Veränderlichen gegen $+\infty$. Die O-Konstanten können in jedem Falle von allen übrigen in dem betreffenden Zusammenhang auftretenden Parametern abhängen, wenn nicht ausdrücklich darauf hingewiesen wird, in welchen Größen und in welchem Bereich derselben die Abschätzung gleichmäßig gilt.

1. Der kürzeren Ausdrucksweise wegen geben wir die folgende

DEFINITION: *Eine für $t \geqslant T_0$ definierte positive Funktion $\varphi(t)$ heißt dort normal oszillierend, wenn zwei Konstanten C und γ existieren, so daß für alle $y \geqslant T_0$ und $t \geqslant T_0$*

(1) $$\varphi(y) \leqslant C e^{\gamma|y-t|}\varphi(t)$$

gilt.

Zur Erläuterung dieser Funktionenklasse dienen die folgenden einfach zu beweisenden Feststellungen:

A. Mit $\varphi(t)$ ist auch $\varphi^{\alpha}(t)$ für jedes reelle α normal oszillierend.

B. Sind $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ normal oszillierend, so gilt dies auch für ihre Summe, Produkt und damit nach A. ebenfalls für ihren Quotienten.

C. Ist $\varphi(t)$ (>0) differenzierbar und $\varphi'/\varphi(t)=O(1)$, so ist $\varphi(t)$ normal oszillierend; denn dann ist

$$\log\frac{\varphi(y)}{\varphi(t)} \leqslant \left|\int_t^y \frac{\varphi'}{\varphi}(x)\,dx\right| \leqslant \gamma\,|y-t|.$$

D. Nach C. sind (für passendes T_0) die Funktionen e^t, t, $\log t$, $\log\log t, \ldots$, und jede positive Konstante, also nach A. und B. auch alle Potenzprodukte und Linearkombinationen mit positiven Koeffizienten derselben normal oszillierend. Allgemeiner ist jede (schließlich positive) logarithmisch-exponentielle Funktion (Hardy [4]) $\varphi(t)$ mit $e^{-Kt} \prec \varphi(t) \prec e^{Kt}$ normal oszillierend (vgl. [4], 5.22).

E. Vertauscht man in (1) y und t, so ergibt sich wegen $\varphi(t)>0$ notwendig $\gamma \geqslant 0$ und $C \geqslant 1$.

---

5) Für frühere Ergebnisse vgl. Hille [7], Peyerimhoff [13] und die dort zitierte Literatur.

F. Bei der Wahl von $t=T_0$ bzw. $y=T_0$ folgen aus (1) die Abschätzungen

$$\varphi(t)=O(e^{\gamma t}), \qquad \frac{1}{\varphi(t)}=O(e^{\gamma t}). \tag{2}$$

G. $\varphi(t)$ ist für $t \geqslant \alpha$ genau dann normal oszillierend, wenn $\Phi(t)=\varphi(t+\alpha)$ für $t \geqslant 0$ normal oszillierend ist.

H. Eine Funktion $\varphi(t)$ ist für $t \geqslant 0$ genau dann normal oszillierend, wenn für die durch $R(x)=\varphi(\log x)$ $(x \geqslant 1)$ erklärte Funktion $R(x)$ (>0) gilt:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Es gibt ein } \delta,\ 0<\delta<1, \text{ und zwei Zahlen } m \text{ und } M \text{ mit} \\ 0<m \leqslant \dfrac{R(\rho x)}{R(x)} \leqslant M \quad \text{für alle} \quad \delta \leqslant \rho \leqslant 1, \quad \rho x \geqslant 1. \end{array}\right. \tag{3}$$

Eine derartige Funktionenklasse (Klasse $R-O$) wurde von Avakumović ([1], [2]) eingeführt.

I. Eine für $t \geqslant T_0$ definierte Funktion $\varphi(t)$ ist genau dann normal oszillierend, wenn die folgende kanonische Darstellung gilt[6]:

$$\varphi(t)=e^{B(t)+\int_{T_0}^{t} b(u)\,du}, \tag{4}$$

$B(t)$ und $b(t)$ für $t \geqslant T_0$ beschränkt, $b(t)$ meßbar.

---

[6]) **Beweis**: Im Hinblick auf G. sei $T_0=0$. Ist $\varphi(t)$ normal oszillierend, so gilt für natürliches k

$$\frac{\varphi(k)}{\varphi(k-1)}=e^{b_1(k)}, \quad b_1(k)=O(1),$$

und wir setzen

$$b(u)=\begin{cases} 0 & 0 \leqslant u<1 \\ b_1(k) & k \leqslant u<k+1. \end{cases}$$

Zu t bestimmen wir das ganzzahlige n mit $n \leqslant t<n+1$. Da auch

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(n)}=e^{b_2(t)}, \quad b_2(t)=O(1),$$

erhalten wir

$$\varphi(t)=\varphi(0)\frac{\varphi(t)}{\varphi(n)}\prod_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{\varphi(k-1)}=\varphi(0)\,e^{b_2(t)+\int_t^{n+1} b(u)\,du+\int_0^t b(u)\,du}=e^{B(t)+\int_0^t b(u)\,du}.$$

Umgekehrt zieht (4) natürlich (1) nach sich.

J. Auf Grund des in H. dargestellten Zusammenhanges folgt aus (4) für die Funktionen $R(x)$ die kanonische Darstellung

$$R(x) = e^{B(x) + \int\limits_1^x \frac{b(u)}{u}\,du}, \tag{5}$$

wobei $B(x)$ und $b(x)$ zwei für $x \geqslant 1$ beschränkte Funktionen sind, $b(x)$ meßbar. Aus den kanonischen Darstellungen (4) und (5) ergibt sich sofort, daß jede Funktion $R(x)$ der Klasse R-O zur Familie der normal oszillierenden Funktionen gehört. Existiert in (3) ferner für jedes $\rho > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(\rho x)}{R(x)} = h(\rho),$$

so heißt $R(x)$ im Anschluß an Karamata [10] von regulärem Wachstum, insbesondere für $h(\rho) \equiv 1$ langsam wachsend.

2. SATZ 1: *Die Funktion $f(s)$, $s = \sigma + it$, sei in dem Halbstreifen*

$$\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2, \quad t \geqslant T_0,$$

wo $\sigma_2 > \sigma_1$, $T_0 \geqslant 0$, regulär.

Mit zwei für $t \geqslant T_0$ normal oszillierenden Funktionen $\varphi_\nu(t)$ gelte

$$|f(\sigma_\nu + it)| \leqslant \varphi_\nu(t) \qquad \textit{für } t \geqslant T_0, \ \nu = 1, 2, \tag{6}$$

und mit einer passenden Konstanten K sei in $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $t \geqslant T_0$ gleichmäßig

$$f(\sigma + it) = O(e^{Kt}). \tag{7}$$

Dann ist für $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $t \geqslant T_0$

$$f(\sigma + it) = O\left(\varphi_1(t)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} \varphi_2(t)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}\right). \tag{8}$$

SATZ 2: *Es sei p eine reelle Zahl $\geqslant 1$. Ersetzt man in Satz 1 die Voraussetzung* (6) *durch*

$$\left(\int\limits_{T_0}^{T} |f(\sigma_\nu + it)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \varphi_\nu(T) \ \textit{für } T \geqslant T_0, \ \nu = 1, 2, \tag{6'}$$

so gilt für $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $T \geqslant T_0$

$$(8)' \qquad \left(\int_{T_0}^{T} |f(\sigma + it)|^p dt\right)^{1/p} = O\left(\varphi_1(T)^{\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}} \varphi_2(T)^{\frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}\right).$$

B e w e i s: Wegen (6) und (2) ist (8) für $\sigma = \sigma_\nu$, $\nu = 1, 2$, und für $T_0 \leqslant t \leqslant T_0+1$ trivialerweise richtig, so daß wir $s = \sigma + it$ mit $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $t > T_0+1$ annehmen dürfen.

R sei das Rechteck mit den Eckpunkten $\sigma_\nu + iT_0$, $\sigma_\nu + 2it$, $\nu = 1, 2$. Dann ist bei positivem Durchlaufungssinn mit einem von z unabhängigen $\delta > 0$ nach der Cauchyschen Formel

$$(9) \qquad f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\delta^{z-s} e^{(z-s)^2} f(z)}{z-s}\, dz, \qquad z = x + iy.$$

Nach (6) ist jedes der beiden Horizontalintegrale in (9)

$$O\left((\delta^{\sigma_2-\sigma} + \delta^{\sigma_1-\sigma}) e^{-t^2/2}\right),$$

d. h.

$$(10) \qquad |f(\sigma+it)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1,2} \frac{\delta^{\sigma_\nu-\sigma}}{|\sigma_\nu - \sigma|} e^{(\sigma_\nu-\sigma)^2} \int_{T_0}^{2t} e^{-(y-t)^2} |f(\sigma_\nu + iy)|\, dy +$$
$$+ O\left((\delta^{\sigma_1-\sigma} + \delta^{\sigma_2-\sigma}) e^{-t^2/2}\right).$$

Wegen (6), (1) und (2) bekommen wir hiernach

$$f(\sigma+it) = O\left(\sum_{\nu=1,2} \delta^{\sigma_\nu-\sigma} \varphi_\nu(t) \left\{\int_{T_0}^{2t} e^{-(y-t)^2 + \gamma|y-t|}\, dy + e^{-t^2/2 + \gamma t}\right\}\right) =$$
$$= O\left(\sum_{\nu=1,2} \delta^{\sigma_\nu-\sigma} \varphi_\nu(t)\right),$$

woraus mit

$$\delta = \left(\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\right)^{\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}}$$

unsere Behauptung (8) folgt.[7]

---

[7] Die folgende schöne Variante unseres Beweises des Satzes I verdanken wir einer mündlichen Mitteilung von C. L. Siegel:

Die Funktion $F(z) = \delta^{z-s} e^{(z-s)^2} f(z)$ ist in R regulär und auf dem Rande $O\left(\sum_{\nu=1,2} \delta^{\sigma_\nu-\sigma} \varphi_\nu(t)\right)$. Nach dem Prinzip vom Maximum gilt diese Abschätzung auch im Innern von R, insbesondere für $z = s$, woraus wegen $F(s) = f(s)$ die Behauptung folgt. Hier wird also der allgemeine Satz direkt aus dem Prinzip vom Maximum gefolgert.

Zum Beweise des Satzes 2 können wir wegen (6)′ und (2) wieder $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $T > T_0 + 1$ voraussetzen. Ferner dürfen wir gleich $f(s) \not\equiv 0$ annehmen, dann ist nach (6)′ notwendig

$$\frac{1}{\varphi_\nu(T)} = O(1) \quad \text{für } T > T_0 + 1,\ \nu = 1, 2. \tag{11}$$

Mit der Minkowskischen Ungleichung folgt aus (10)

$$\left(\int_{T_0}^{T} |f(\sigma+it)|^p\, dt\right)^{1/p} = O(1) + \left(\int_{T_0+1}^{T} |f(\sigma+it)|^p\, dt\right)^{1/p} =$$

$$= O(1) + O\left(\sum_{\nu=1,2} \delta^{\sigma_\nu-\sigma}\left\{\left(\int_{T_0+1}^{T}\left(\int_{T_0}^{2t} e^{-(y-t)^2}\,|f(\sigma_\nu+iy)|\,dy\right)^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_{T_0+1}^{T} e^{-pt^2/2}\, dt\right)^{1/p}\right\}\right).$$

Für das innere Integral erhalten wir mittels der Hölderschen Ungleichung

$$\left(\int_{T_0}^{2t} e^{-(y-t)^2}\,|f(\sigma_\nu+iy)|\, dy\right)^p \leqslant \int_{T_0}^{2t} e^{-(y-t)^2}\,|f(\sigma_\nu+iy)|^p\, dy\left(\int_{T_0}^{2t} e^{-(y-t)^2}\, dy\right)^{p-1} =$$

$$= O\left(\int_{T_0}^{2t} e^{-(y-t)^2}\,|f(\sigma_\nu+iy)|^p\, dy\right),$$

und daher ist nach (6)′ und (1)

$$\left(\int_{T_0}^{T} |f(\sigma+it)|^p\, dt\right)^{1/p} = O(1) + O\left(\sum_{\nu=1,2} \delta^{\sigma_\nu-\sigma}\left\{\left(\int_{T_0-T}^{T} e^{-u^2}\int_{T_0}^{T+u} |f(\sigma_\nu+iy)|^p\, dy\, du\right)^{1/p} + 1\right\}\right) =$$

$$= O(1) + O\left(\sum_{\nu=1,2} \delta^{\sigma_\nu-\sigma}\left\{\varphi_\nu(T)\left(\int_{T_0-T}^{T} e^{-u^2+\gamma p u}\, du\right)^{1/p} + 1\right\}\right) =$$

$$= O(1) + O\left(\sum_{\nu=1,2} \delta^{\sigma_\nu-\sigma}\left(\varphi_\nu(T)+1\right)\right),$$

womit wegen (11) nach der Wahl von

$$\delta = \left(\frac{\varphi_1(T)}{\varphi_2(T)}\right)^{\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}}$$

auch Satz 2 bewiesen ist.

BEMERKUNGEN:

1. Die Sätze 1 und 2 bleiben sinngemäß richtig für Funktionen $f(s)$, die die Voraussetzungen in einem nach unten erstreckten Halbstreifen $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $t \leqslant -T_0 \leqslant 0$ erfüllen. Zum Beweis wende man Satz 1 bzw. Satz 2 auf die Funktion $g(s)=f(-s)$ an, wobei σ_1 durch $-\sigma_2$, σ_2 durch $-\sigma_1$ zu ersetzen ist. Kombiniert man diese Bemerkung mit den Sätzen 1 und 2, so ergeben sich die entsprechenden zweiseitigen Aussagen. Hieraus folgt dann die in der Theorie der Dirichletschen Reihen wichtige Konvexität der Lindelöfschen Funktion $\mu(\sigma)$ und der Carlsonschen Funktion $\mu_p(\sigma)$.

2. (7) läßt sich durch die Phragmén-Lindelöfsche Bedingung

$$(7)' \qquad f(\sigma+it)=O\left(e^{e^{\vartheta t}}\right), \quad \vartheta<\pi/(\sigma_2-\sigma_1),$$

ersetzen. Betrachtet man nämlich die Funktion $g(s)=e^{i\gamma s}f(s)$, so folgt hieraus wegen (6) und (2) nach einem bekannten Satz (vgl. [12], Theorem 103) schon, daß (7) erfüllt ist. Das Beispiel $f(s)=\exp\{e^{-is}\}$, $T_0=0$, $\sigma_1=-\pi/2$, $\sigma_2=\pi/2$, $\sigma=0$, zeigt, daß (7)' sich nicht weiter abschwächen läßt (vgl. [12], Theorem 103, (3)). Aus F. ersieht man, daß die in den Sätzen 1 und 2 auf den Vertikalen als Abschätzungsfunktionen zugelassenen normal oszillierenden Funktionen in ihrem Wachstum wesentlich stärker eingeschränkt sind. Daß dies natürlich ist, sieht man am Beispiel der Funktion $f(s)= = e^{-s^2\log(-is)}$, $T_0=1$, bei der die Konvexität für $\sigma_1=-1$, $\sigma_2=+1$, $\sigma=0$ nicht gilt.

3. Da es für die Anwendung des Cauchyschen Satzes bereits hinreicht, daß $f(s)$ in $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$, $t>T_0$ regulär und in $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $t \geqslant T_0$ stetig ist, gelten endlich die Sätze 1 und 2 auch noch unter dieser etwas milderen Voraussetzung.

4. Mit Rücksicht auf eine gewisse Vereinfachung des Beweises haben wir hier auf den Nachweis verzichtet, daß (8) tatsächlich gleichmäßig in $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ gilt. In einer späteren Note soll gleich die bestmögliche O-Konstante (sie ist >1) in dieser Abschätzung angegeben werden.

3. Der Anwendung auf das Verhalten von Laplace-Integralen auf vertikalen Geraden schicken wir den folgenden Hilfssatz voraus.

HILFSSATZ: *Ist für $t \geqslant T_0$ $0<\psi(t)\searrow 0$, so gibt es eine für $t \geqslant T_0+1$ normal oszillierende Funktion $\varphi(t)$ mit $\varphi(t) \geqslant \psi(t)$ und $\varphi(t)=o(1)$.*

Beweis: Wir setzen für $t \geqslant T_0+1$

$$\varphi(t)=\frac{1}{t-T_0}\int_0^t \psi(x)\,dx.$$

Ersichtlich ist $\varphi(t)\geqslant\psi(t)$, und mit $\psi(t)\searrow 0$ gilt auch $\varphi(t)\searrow 0$. Daher ist (1) für $t\leqslant y$ (mit $C=1$, $\gamma=0$) erfüllt. Ferner ist $e^y\varphi(y)\nearrow$, so daß (1) auch für $t>y$ (mit $C=1$, $\gamma=1$) richtig ist.

SATZ 3: *Nach Vorgabe von reellen Zahlen* $\varkappa\geqslant 0$ *und* α *sowie einer Funktion* $\eta(t)$ *mit* $0<\eta(t)\nearrow+\infty$ *gibt es stets ein Laplace-Integral* $\int_0^\infty e^{-su}a(u)\,du$ *mit der* $C_\varkappa$*-Summierbarkeitsabszisse* $\sigma_\varkappa=\alpha$, *für dessen* $C_\varkappa$*-Limes* $f(s)$ *gilt*

$$f(\sigma+it)\neq O\left(\frac{t^{\varkappa+1}}{\eta(t)}\right)\quad \textit{für alle } \sigma>\sigma_\varkappa.$$

Beweis: Zu $\psi(t)=1/\eta(t)$ werde $\varphi(t)$ nach dem Hilfssatz konstruiert. Nach [13], Satz 1 gibt es ein für $\sigma>0$ zum Wert $g(s)$ $C_\varkappa$-summierbares Laplace-Integral $\int_0^\infty e^{-su}b(u)\,du$ mit

$$(12)\qquad g(\sigma+it)\neq O(\varphi(t)\,t^{\varkappa+1})\quad \text{für alle rationalen } \sigma>0.$$

Wäre nun für zwei Zahlen σ_1, σ_2 mit $0<\sigma_1<\sigma_2$ $g(\sigma_\nu+it)=O(\varphi(t)\,t^{\varkappa+1})$, so hätten wir wegen Satz 1 für alle σ mit $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$

$$(13)\qquad g(\sigma+it)=O(\varphi(t)\,t^{\varkappa+1});$$

$K\varphi(t)\,t^{\varkappa+1}$ ist nämlich nach dem Hilfssatz sowie D. und B. normal oszillierend, und weil für jedes $\varepsilon>0$ gleichmäßig für $\sigma\geqslant\varepsilon$ $g(s)=o(t^{\varkappa+1})$ ist, gilt für $g(s)$ auch (7). Die Beziehung (13) steht im Widerspruch zu (12), so daß (12) für alle $\sigma>0$ mit höchstens einer Ausnahme richtig ist. Es ist also

$$(14)\qquad g(\sigma+it)\neq O(\varphi(t)\,t^{\varkappa+1})\quad \text{für alle } \sigma\geqslant\bar\sigma>0.$$

Nun ist mit $a(u)=e^{\alpha u}+e^{-(\tilde{\sigma}+1-\alpha)u}\,b(u)$ das Laplace-Integral $\int\limits_0^\infty e^{-su}\,a(u)\,du$ für $\sigma>\alpha$ zum Werte

$$f(s)=\frac{1}{s-\alpha}+g(s+\tilde{\sigma}+1-\alpha)$$

$C_\varkappa$-summierbar, und da $f(s)$ für $s=\alpha$ singulär, $g(s+\tilde{\sigma}+1-\alpha)$ dagegen für Re $s\geqslant\alpha-1$ regulär ist, haben wir $\sigma_\varkappa=\alpha$. Wegen (14) und $\varphi(t)\geqslant\geqslant 1/\eta(t)$ ist aber

$$f(\sigma+it)\neq O\left(\frac{t^{\varkappa+1}}{\eta(t)}\right) \quad \text{für alle } \sigma>\alpha.$$

Ganz entsprechend folgt aus [13], Satz 2 der

SATZ 4: *Nach Vorgabe einer ganzen Zahl* $k\geqslant 0$, *reellem* α *und einer Funktion* $\eta(t)$ *mit* $0<\eta(t)\nearrow+\infty$ *gibt es stets eine Dirichletsche Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ *mit der* (λ, k)*-Summierbarkeitsabszisse* $\sigma_k=\alpha$, *für deren* (λ, k)*-Limes* $f(s)$ *gilt*

$$f(\sigma+it)\neq O\left(\frac{t^{k+1}}{\eta(t)}\right) \quad \textit{für alle } \sigma>\sigma_k.$$

(Eingegengen am 20. Februar 1957)

LITERATUR

[1] V. Avakumović — Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de sommabilité, *C. R. Acad. Sci.*, Paris **200** (1935), 1515—1517.

[2] V. Avakumović — Sur l'équation différentielle de Thomas—Fermi, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **1** (1947), 101—113.

[3] F. Carlson — Sur quelques valeurs moyennes d'une fonction analytique, *C. R. Acad. Sci.*, Paris **181** (1925), 397—399.

[4] G. H. Hardy — Orders of infinity, Cambridge 1910.

[5] G. H. Hardy — The application of Abel's method of summation to Dirichlet's series, *Quart. J. Math.* **47** (1916), 176—192.

[6] G. H. Hardy — A. E. Ingham — G. Pólya — Theorems concerning mean values of analytic functions, *Proc. Roy. Soc.* London (A) **113** (1927), 542—569.

[7] E. Hille — Some extremal properties of Laplace transforms, *Math. Scand.* **1** (1953), 227—236.

[8] A. E. Ingham — Mean-value theorems and the Riemann zeta-function, *Quart. J. Math.* Oxford 4 (1933), 278—290.

[9] K. Iseki — On a theorem of the Phragmén - Lindelöf type, *Nat. Sc. Rep. Ochanomizu Univ.* **1** (1951), 14—16.

[10] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière, *Bull. Soc. Math. France* **61** (1933), 55—62.

[11] E. Lindelöf — Quelques remarques sur la croissance de la fonction $\zeta(s)$, *Bull. Sci. math.* (2) **32** (1908), 341—356

[12] J. E. Littlewood — Lectures on the theory of functions, Oxford 1944.

[13] A. Peyerimhoff, — Über das Anwachsen der C_χ-Mittel von Laplace-Integralen auf vertikalen Geraden, *Math. Ann.* **128** (1954), 138—143.