ÜBER DIRICHLETREIHEN MIT FUNKTIONALGLEICHUNG M. DEURING ZUM 50 GEBURTSTAG GEVIDMET

von

HANS-EGON RICHERT (Göttingen)

1. Für die Fehlerglieder in der asymptotischen Entwicklung der summatorischen Funktion einer zahlentheoretischen Funktion $f(n)$

$$\sum_{1 \leq n \leq x} f(n)$$

hat Landau in einer Serie von Arbeiten ([15], [16], [17], [18]) unter recht allgemeinen Bedingungen obere und untere Abschätzungen angegeben. Kürzlich habe ich ([30]) diese Fragestellung mit anderen Methoden, die vornehmlich bei höherdimensionalen Gitterpunktproblemen vorteilhafter sind, behandelt. Bei dieser Gelegenheit habe ich schon bemerkt ([30], S. 77), daß man in die O -Abschätzungen der Landauschen Arbeiten trigonometrische Summen einschalten und so, sofern nur eine nichttriviale Abschätzung derselben gelingt, eine Verbesserung der Ergebnisse erzielen kann. Dies ist in Spezialfällen ein für die Anwendung der Methode der Exponentialsummenabschätzungen wohl-knowner Weg, den man einschlägt, wenn man das Problem nicht linearisieren will (oder darf, wie z. B. bei Anwendung der zweidimensionalen van der Corput-Titchmarsh-Methode). Der Beweis geht zunächst den Weg des ersten O -Hauptsatzes von Landau ([15]). Zur andersartigen Auswertung eines gewissen Integrales wird dann jedoch die Methode der stationären Phase, wie Landau sie für Ω -Aussagen verwendete ([18]), benutzt.

Hier soll diese Bemerkung näher ausgeführt werden. Die Allgemeinheit der Problemstellung (vgl. die untenstehenden Voraussetzungen I bis V) ist ähnlich wie bei Landaus erstem Hauptsatz, von den drei letzten Voraussetzungen seines zweiten Hauptsatzes ([16]) sehen wir ganz ab. Allgemeiner betrachten wir gleich für jedes reelle $x \geq 0$ die Frage bei

$$\sum_{1 \leq n \leq x} f(n) (x - n)^x,$$

setzen dagegen der Einfachheit halber voraus, daß in der Funktionalgleichung die Anzahl der Gammafaktoren auf beiden Seiten übereinstimmt, und daß es sich dort um gewöhnliche Dirichletreihen handelt. Dafür lassen wir einen weiteren Faktor in der Funktionalgleichung zu. Die Landauschen Voraussetzungen V und VI (für VI hat Landau dies auch später ([16], [18]) bemerkt) erweisen sich als überflüssig. Daneben verzichten wir auf gewisse Abszissenbeschränkungen (bei Landau in I, III, und IV) sekundärer Bedeutung.

Der erste Landausche Hauptsatz ist dann in dem untenstehenden Satz 2 enthalten. In Satz 1 wird dagegen, wie oben schon angedeutet, das Fehlerglied genauer durch eine trigonometrische Summe approximiert. Wie in den Anwendungsbeispielen hierzu (Sätze 6 bis 10) belegt wird, führen dann nichttriviale Abschätzungen derselben über das Ergebnis der Landauschen Hauptsätze hinaus. In dem wichtigsten Spezialfall, daß beide in der Funktionalgleichung auftretenden Dirichletreihen $Z(s)$ und $Z_1(s)$ übereinstimmen, nehmen die Ergebnisse eine einfachere Gestalt an (Sätze 3 und 4).

Den Landauschen Ω -Abschätzungen ([17], [18]) fügen wir mit einer anderen Methode die entsprechenden Resultate für $\kappa > 0$ in der Form für Summierbarkeitsabszissen hinzu (Satz 11).

Für den Fall $Z(s) = Z_1(s)$ (ganz) wird das Summierbarkeitsproblem, d. h. die Bestimmung der Riesz'schen Summierbarkeitsabszissen σ_κ aus analytischen Eigenschaften der Funktion $Z(s)$, für $\kappa \geq \kappa_0$ gelöst (Satz 12); (desgleichen für die Abszissen der absoluten und der starken Riesz'schen Summierbarkeit) in einigen Fällen sogar für jedes κ .

Abschließend geben wir noch einige Anwendungen unserer Sätze auf gewisse Probleme bei Spitzenformen aus der Theorie der Modulformen.

2. Sämtliche O -Abschätzungen beziehen sich, wenn nichts anderes gesagt wird, auf die Bewegung einer Veränderlichen gegen $+\infty$.

ε , das nicht notwendig bei jedem Erscheinen denselben Wert besitzt, bezeichne stets eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl.

$s = \sigma + it$ sei eine komplexe Veränderliche.

$\log$ bedeute immer den in der von 0 bis $-\infty$ längs der reellen Achse aufgeschnittenen Ebene Zweig des Logarithmus, der für positives Argument reell ist.

Zu einer Dirichlet'schen Reihe

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

seien

σ^* die Schwundabszisse des allgemeinen Gliedes ([21], S. 99):

$$\sigma^* = \sigma^*(Z) = \underline{\text{fin}} \xi, \text{ für die } f(n) = O(n^\xi) \text{ ist;}$$

$\sigma_0 = \sigma_0(Z)$ die Abszisse der gewöhnlichen, $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(Z)$ die Abszisse der absoluten Konvergenz;

E die Abszisse der Regularität bis auf endlich viele Pole und der endlichen Ordnung ([2], S. 1):

$E = E(Z) = \underline{\text{fin}} \xi$, für die die analytische Fortsetzung $Z(s)$ der Reihe in jedem endlichen Teilgebiet von $\sigma \geq \xi$ bis auf endlich viele Pole — also etwa in jedem endlichen Teilgebiet von

$$\sigma \geq \xi, \quad |t| \geq T_0(\xi, Z) -$$

regulär ist und dort gleichmäßig in σ mit einer Konstanten $c = c(\xi, Z)$

$$Z(\sigma + it) = O(|t|^c)$$

gilt.

Bekanntlich ist stets (vgl. [21], (3))

$$(1) \quad \sigma^* \leq \sigma_0 \leq \bar{\sigma}_0 \leq \sigma^* + 1.$$

Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil zugelassen wird, soll durchweg

$$Z(s) \neq 0$$

sein.

3. Wir beginnen mit der Formulierung einiger Voraussetzungen:

I. $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$ sei eine irgendwo im Endlichen konvergente Dirichletsche Reihe mit

$$E(Z) = -\infty;$$

α und $\bar{\alpha}$ seien zwei reelle Zahlen¹⁾, derart daß $f(n) = O(n^{\alpha+\epsilon})$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$ für $\sigma > \bar{\alpha}$ absolut konvergiert.

II. Für eine reelle Zahl γ sei

$$Z(s) = C^{\vartheta s + \theta} G(s) Z_1(\gamma - s),$$

worin

III. $C (> 0)$ und ϑ reelle Konstanten, θ eine komplexe Konstante,

$$IV. \quad G(s) = \prod_{j=1}^M \frac{\Gamma(\beta_j - b_j s)}{\Gamma(\delta_j + d_j s)},$$

¹⁾ Diese Zahlen existieren nach dem ersten Teil unserer Voraussetzung gewiß.

M natürlich, β_j, δ_j reell, b_j, d_j positiv, $1 \leq j \leq M$
und

V. $Z_1(s)$ eine analytische Funktion, definiert durch eine irgendwo im Endlichen konvergente Dirichletsche Reihe

$$Z_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_1(n) n^{-s};$$

α_1 und $\bar{\alpha}_1$ seine zwei reelle Zahlen¹⁾, derart daß $f_1(n) = O(n^{\alpha_1+s})$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_1(n) n^{-s}$ für $\sigma > \bar{\alpha}_1$ absolut konvergiert.

Zur Abkürzung setzen wir

$$(2) \quad q = 2 \sum_{j=1}^M d_j, \quad \lambda = \sum_{j=1}^M (\beta_j - \delta_j),$$

$$(3) \quad v = \sum_{j=1}^M (b_j \log b_j + d_j \log d_j), \quad p = C^{\delta} e^{-v}.$$

Nach IV haben wir

$$(4) \quad q > 0$$

und mit III auch

$$p > 0.$$

Man beachte, daß $\alpha, \bar{\alpha}, \alpha_1, \bar{\alpha}_1$ nicht notwendig beziehentlich mit $\sigma^*(Z), \bar{\sigma}_0(Z), \sigma^*(Z_1), \bar{\sigma}_0(Z_1)$ übereinzustimmen brauchen. Sie liegen vielmehr nur notwendig nicht unterhalb dieser Größen, es gilt also stets

$$(5) \quad \alpha \geq \sigma^*(Z), \quad \bar{\alpha} \geq \bar{\sigma}_0(Z), \quad \alpha_1 \geq \sigma^*(Z_1), \quad \bar{\alpha}_1 \geq \bar{\sigma}_0(Z_1).$$

4. Wir schicken einige Hilfssätze voraus:

HILFSSATZ 1: Es sei t_0 eine feste positive Zahl. Dann gilt gleichmäßig in jedem festen Streifen $\sigma' \leq \sigma \leq \sigma''$ für $t \geq t_0$

$$\Gamma(\sigma + it) = (2\pi)^{1/2} t^{\sigma-1/2} e^{\frac{\pi i}{2}(\sigma-1/2)} e^{it(\log t - 1)} e^{-\pi t/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

und

$$\frac{1}{\Gamma(\sigma + it)} = (2\pi)^{-1/2} t^{-\sigma+1/2} e^{-\frac{\pi i}{2}(\sigma-1/2)} e^{-it(\log t - 1)} e^{\pi t/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Die entsprechenden Formeln für $t \leq -t_0$ ergeben sich hieraus bei Beachtung von

$$\Gamma(\sigma - it) = \overline{\Gamma(\sigma + it)}.^{2)}$$

Beweis: Bekanntlich (vgl. [15], Hilfssatz 2 und S. 698, Fußnote³⁾) gilt unter unseren Voraussetzungen gleichmäßig in $\sigma' \leq \sigma \leq \sigma''$

$$\log \Gamma(\sigma + it) = \log \sqrt{2\pi} + (\sigma - 1/2 + it) \log(\sigma + it) - (\sigma + it) + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Wegen

$$\log(\sigma + it) = \log it + \log\left(1 + \frac{\sigma}{it}\right) = \frac{\pi i}{2} + \log t + \frac{\sigma}{it} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ist daher

$$\log \Gamma(\sigma + it) = \log \sqrt{2\pi} + \frac{\pi i}{2}(\sigma - 1/2) - \frac{\pi}{2}t - (\sigma - 1/2 + it) \log t - it + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

und hieraus folgen unsere Behauptungen.

Für das Eulersche Integral erster Gattung $B(z_1, z_2)$ ergibt sich hieraus sofort der

HILFSSATZ 2: Es sei t_0 eine feste positive Zahl, r eine reelle Konstante > 0 . Dann gilt für

$$B(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1) \Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1 + z_2)}$$

gleichmäßig in jedem festen Streifen $\sigma' \leq \sigma \leq \sigma''$ für $t \geq t_0$,

$$B(\sigma + it, r) = \Gamma(r) e^{-\frac{\pi ir}{2}} t^{-r} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

und für $t \leq -t_0$

$$B(\sigma + it, r) = \Gamma(r) e^{\frac{\pi ir}{2}} |t|^{-r} \left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right).$$

HILFSSATZ 3 (vgl. [33], 9.4 und 9.41): Für $\sigma > E(Z)$ ist die Lindlöfsche Funktion $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, Z)$ definiert durch

$$\mu(\sigma) = \underline{\text{fin}} \xi \quad \text{mit} \quad Z(\sigma + it) = O(|t|^\xi), \quad |t| \geq T_0(\sigma, Z).$$

²⁾ $\bar{z}$ bedeutet die zu z konjugiert komplexe Größe.

$\mu(\sigma)$ ist konvex, stetig und nicht negativ. Es gelten

$$(6) \quad \mu(\sigma) \leq \frac{\sigma'' - \sigma}{\sigma'' - \sigma'} \mu(\sigma') + \frac{\sigma - \sigma'}{\sigma'' - \sigma'} \mu(\sigma'') \quad \text{für } E < \sigma' \leq \sigma \leq \sigma'',$$

$$(7) \quad 0 \leq \mu(\sigma) < \infty \quad \text{für } \sigma > E,$$

$$(8) \quad \mu(\sigma) = 0 \quad \text{für } \sigma > \bar{\sigma}_0.$$

HILFSSATZ 4 ([14], S. 286): Ist m eine natürliche Zahl, so gilt

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} n^{-1-\varepsilon} \frac{1}{|\log m/n|} = O(1).$$

HILFSSATZ 5 (vgl. [34], Lemma 4.5): $g(t)$ und $h(t)$ seien zwei reelle Funktionen. Im Intervall $\omega_1 \cdots \omega_2$ sei $h(t)$ zweimal differenzierbar, $\frac{g}{h}(t)$ monoton sowie für $\omega_1 \leq t \leq \omega_2$

$$(9) \quad |g(t)| \leq P \quad \text{und} \quad \frac{1}{|h''(t)|} \leq Q.$$

Dann ist

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(t) e^{ih(t)} dt \right| \leq 8P\sqrt{Q}.$$

HILFSSATZ 6 (vgl. [34], Lemma 4.3): $g(t)$ und $h(t)$ seien zwei reelle Funktionen. Im Intervall $\omega_1 \cdots \omega_2$ sei $h(t)$ einmal differenzierbar, $\frac{g}{h}(t)$ monoton sowie für $\omega_1 \leq t \leq \omega_2$

$$\left| \frac{g}{h'}(t) \right| \leq P.$$

Dann ist

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(t) e^{ih(t)} dt \right| \leq 4P.$$

HILFSSATZ 7: Es seien κ und a reelle Konstanten:

$$\kappa \geq 0, \quad a > 0,$$

T eine reelle Veränderliche mit

$$T \geq 1$$

und

$$H_{\kappa}(y) = \begin{cases} (y-1)^{\kappa} & \text{für } y > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } y = 1, \kappa = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < y < 1 \text{ und } y = 1, \kappa > 0. \end{cases}$$

Dann gilt für $y > 0$ gleichmäßig in y

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} y^{s+\kappa} B(s, \kappa+1) ds = H_{\kappa}(y) + O\left(\frac{y^{a+\kappa}}{T^{\kappa}} \text{Min}\left(1, \frac{1}{|\log y| T}\right)\right).$$

Beweis: Für $\kappa = 0$ ist (10) bekannt (vgl. [31], Hilfssätze 2 und 3), so daß wir $\kappa > 0$ annehmen dürfen. Dann bekommen wir mit Hilfssatz 2 für jedes $T' \geq T$ gleichmäßig in y und T'

$$\begin{aligned} \int_T^{T'} y^{a\pm it + \kappa} B(a \pm it, \kappa+1) dt &= \Gamma(\kappa+1) e^{\mp \frac{\pi i}{2}(\kappa+1)} \int_T^{T'} y^{a+\kappa \pm it} t^{-\kappa-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt = \\ &= O\left(\frac{y^{a+\kappa}}{T^{\kappa+1}}\right) + \begin{cases} \Gamma(\kappa+1) e^{\mp \frac{\pi i}{2}(\kappa+1)} y^{a+\kappa} \left(\pm \frac{y^{\pm it}}{i \log y t^{\kappa+1}} \Big|_{t=T}^{t=T'} \pm \frac{\kappa+1}{i \log y} \int_T^{T'} \frac{y^{\pm it}}{t^{\kappa+2}} dt\right) = \\ O\left(\frac{y^{a+\kappa}}{|\log y| T^{\kappa+1}}\right), y \neq 1, \\ O\left(y^{a+\kappa} \int_T^{T'} \frac{dt}{t^{\kappa+1}}\right) = O\left(\frac{y^{a+\kappa}}{T^{\kappa}}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Und bei $T' \rightarrow \infty$ folgt hieraus wegen ([8], Lemma 11)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} y^{s+\kappa} B(s, \kappa+1) ds = H_{\kappa}(y)$$

unsere Behauptung.

5. Bei den folgenden Hilfssätzen verwenden wir die Voraussetzungen I bis V.

HILFSSATZ 8: Unter den Voraussetzungen I bis V gilt

$$(11) \quad \sum_{j=1}^M (b_j - d_j) = 0.$$

Ist t_0 eine feste positive Zahl, so gilt mit den Abkürzungen (2) und (3) gleichmäßig in jedem festen Streifen $\sigma' \leq \sigma \leq \sigma''$ für $t \geq t_0$

$$(12) \quad G(\sigma + it) = \Lambda e^{-\nu\sigma} t^{\lambda - q\sigma} e^{-it(q \log t - q + \nu)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

und

$$(13) \quad G(\sigma - it) = \bar{\Lambda} e^{-\nu\sigma} t^{\lambda - q\sigma} e^{it(q \log t - q + \nu)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

wo

$$\Lambda = i^M \exp\left(\sum_{j=1}^M (\beta_j - 1/2) \log b_j - \sum_{j=1}^M (\delta_j - 1/2) \log d_j - \frac{\pi i}{2} \sum_{j=1}^M (\beta_j + \delta_j)\right).$$

Beweis: Aus Hilfssatz 1 ergibt sich mit IV für $t \geq t_0$

$$G(\sigma + it) = \prod_{j=1}^M (b_j t)^{\beta_j - b_j \sigma - 1/2} (d_j t)^{1/2 - \delta_j - d_j \sigma} e^{-\pi i (\beta_j + \delta_j - \sigma (b_j - d_j) - 1)/2} \times \\ \times e^{-ib_j t (\log(b_j t) - 1) - id_j t (\log(d_j t) - 1)} e^{-\pi t (b_j - d_j)/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

also mit den Abkürzungen (2), (3) sowie

$$\Delta = \sum_{j=1}^M (b_j - d_j), \quad q' = \sum_{j=1}^M (b_j + d_j),$$

$$(14) \quad G(\sigma + it) = \Lambda e^{-\nu\sigma} e^{\frac{\pi i}{2} \Delta \sigma} t^{\lambda - q'\sigma} e^{-it(q' \log t - q' + \nu)} e^{-\frac{\pi}{2} \Delta t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

für $t \geq t_0$. Wegen

$$(15) \quad G(\sigma - it) = \overline{G(\sigma + it)}$$

folgt hieraus

$$|G(\sigma \pm it)| = |\Lambda| e^{-\nu\sigma} t^{\lambda - q'\sigma} e^{-\frac{\pi}{2} \Delta t} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Nun wählen wir ein $\sigma' = \text{Re } s'$ so klein, daß die Reihe für $Z_1(\gamma - s')$ absolut konvergiert, was nach V gewiß möglich ist. Wäre jetzt $\Delta > 0$, so wäre nach II

$$Z(\sigma' \pm it) = O\left(t^{\lambda - q'\sigma'} e^{-\frac{\pi}{2} \Delta t}\right)$$

im Widerspruch zu (7). Wäre dagegen $\Delta < 0$, so würde wegen (7), diesmal auf Z_1 angewandt, und $\Delta \neq 0$ bei $t \rightarrow \infty$ mit zwei positiven Konstanten A_0, A_1

$$|Z(\sigma' \pm it)| \geq A_0 t^{-A_1} e^{-\frac{\pi}{2} \Delta t}$$

folgen, was im Widerspruch zu der mit I überall gesicherten endlichen Ordnung von $Z(s)$ steht. Daher ist $\Delta = 0$.

Hiermit wird $q' = q$ und aus (14) folgt (12) und hieraus wegen (15) auch (13).

HILFSSATZ 9³⁾: $Z(s)$ erfülle die Voraussetzungen I bis V. Dann erfüllt auch die ihr in diesem Sinne zugeordnete Funktion $Z_1(s)$ die Voraussetzungen I bis V. Bezeichnen wir die zu $Z_1(s)$ gehörigen Größen mit einem *, so können diese so gewählt werden, daß die Relationen

$$Z^*(s) = Z_1(s), \quad C^{\vartheta*} = C^{-\gamma\vartheta - \theta}, \quad Z_1^*(s) = Z(s),$$

$$M^* = M, \quad \beta_j^* = \delta_j + \gamma d_j, \quad \delta_j^* = \beta_j - \gamma b_j, \quad b_j^* = d_j, \quad d^* = b_j, \quad 1 \leq j \leq M,$$

$$\gamma^* = \gamma, \quad q^* = q, \quad \lambda^* = q\gamma - \lambda$$

bestehen.

Beweis: Nach V ist $Z^*(s) = Z_1(s)$ eine irgendwo im Endlichen konvergente Dirichletsche Reihe, für die nach I bis IV und Hilfssatz 8 $E = -\infty$ ist, so daß I* gilt. Ersetzen wir in II s durch $\gamma - s$, so sehen wir, daß $Z_1(s)$ mit

$$C^* = C, \quad \vartheta^* = \vartheta, \quad C^{\theta*} = C^{-\gamma\vartheta - \theta}, \quad G^*(s) = 1/G(\gamma - s), \quad Z_1^*(s) = Z(s), \quad \gamma^* = \gamma$$

die Voraussetzung II* befriedigt. Aus III folgt damit auch III*, während nach IV

$$G^*(s) = \prod_{j=1}^M \frac{\Gamma(\delta_j + \gamma d_j - d_j s)}{\Gamma(\beta_j - \gamma b_j + b_j s)}$$

ist, also mit

$$M^* = M, \quad \beta_j^* = \delta_j + \gamma d_j, \quad \delta_j^* = \beta_j - \gamma b_j, \quad b_j^* = d_j, \quad d^* = b_j, \quad 1 \leq j \leq M,$$

³⁾ Vgl. [18], S. 137–139.

IV* erfüllt ist. V* folgt aus I.

Wir berechnen noch die in (2) erklärten Abkürzungen. Mit (11) ergibt sich

$$q^* = 2 \sum_{j=1}^{M^*} d_j^* = 2 \sum_{j=1}^M b_j = 2 \sum_{i=1}^M d_i = q$$

und

$$\lambda^* = \sum_{j=1}^{M^*} (\beta_j^* - \delta_j^*) = \sum_{j=1}^M (\delta_j - \beta_j + \gamma (d_j + b_j)) = -\lambda + \gamma q.$$

HILFSSATZ 10: $Z(s)$ erfülle die Voraussetzungen I bis V. Dann existieren für jedes endliche σ die Lindelöfschen Funktionen $\mu(\sigma, Z)$ und $\mu(\sigma, Z_1)$ und sind durch die Funktionalgleichung

$$(16) \quad \mu(\sigma, Z) = \lambda - q\sigma + \mu(\gamma - \sigma, Z_1)$$

verbunden.

Sind σ', σ'' zwei Zahlen mit

$$(17) \quad \sigma' \leq \gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1), \quad \sigma'' \geq \bar{\sigma}_0(Z),$$

so ist

$$\mu(\sigma, Z) \leq \frac{\sigma'' - \sigma}{\sigma'' - \sigma'} (\lambda - q\sigma') \quad \text{für } \sigma' \leq \sigma \leq \sigma''.$$

Stets gelten

$$(18) \quad \bar{\sigma}_0(Z) \geq \frac{\lambda}{q},$$

$$(19) \quad \bar{\sigma}_0(Z_1) + \frac{\lambda}{q} \geq \gamma$$

und

$$(20) \quad \bar{\sigma}_0(Z) + \bar{\sigma}_0(Z_1) \geq \gamma.$$

Beweis: Nach I ist $E(Z) = -\infty$, und da Z_1 nach Hilfssatz 9 ebenfalls I erfüllt, ist auch $E(Z_1) = -\infty$, so daß $\mu(\sigma, Z)$ und $\mu(\sigma, Z_1)$ wegen Hilfssatz 3 für jedes endliche σ existieren.

Aus I bis V folgt mit Hilfssatz 8

$$Z(\sigma + it) = O(|t|^{\lambda - q\sigma + \mu(\gamma - \sigma, Z_1) + \epsilon}),$$

d. h.

$$\mu(\sigma, Z) \leq \lambda - q\sigma + \mu(\gamma - \sigma, Z_1).$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfssatz 9

$\mu(\sigma, Z_1) = \mu(\sigma, Z^*) \leq \lambda^* - q^* \sigma + \mu(\gamma^* - \sigma, Z_1^*) = q(\gamma - \sigma) - \lambda + \mu(\gamma - \sigma, Z)$,
oder wenn wir σ durch $\gamma - \sigma$ ersetzen, die entgegengesetzte Ungleichung

$$\mu(\gamma - \sigma, Z_1) \leq q\sigma - \lambda + \mu(\sigma, Z),$$

also (16).

Aus (8) und der Stetigkeit der Lindelöfschen Funktion folgt

$$\mu(\sigma, Z) = 0 \quad \text{für } \sigma \geq \bar{\sigma}_0(Z)$$

und

$$\mu(\gamma - \sigma, Z_1) = 0 \quad \text{für } \sigma \leq \gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1).$$

Mit (16) und (7) bekommen wir hieraus insbesondere

$$0 = \mu(\bar{\sigma}_0(Z), Z) = \lambda - q\bar{\sigma}_0(Z) + \mu(\gamma - \bar{\sigma}_0(Z), Z_1) \geq \lambda - q\bar{\sigma}_0(Z)$$

sowie

$$\begin{aligned} 0 = \mu(\bar{\sigma}_0(Z_1), Z_1) &= q(\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1)) - \lambda + \mu(\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1), Z) \geq \\ &\geq q(\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1)) - \lambda, \end{aligned}$$

womit wegen (4) auch (18) und (19) bewiesen sind, und Addition liefert (20).

Erfüllen nun σ' und σ'' die Bedingungen (17), so ist nach (20) $\sigma'' \geq \sigma'$, und nach dem Vorigen haben wir dann

$$\mu(\sigma', Z) = \lambda - q\sigma', \quad \mu(\sigma'', Z) = 0,$$

so daß aus (6) für $\sigma' \leq \sigma \leq \sigma''$

$$\mu(\sigma, Z) \leq \frac{\sigma'' - \sigma}{\sigma'' - \sigma'} (\lambda - q\sigma')$$

folgt.

HILFSSATZ 11: $Z(s)$ erfülle die Voraussetzungen I bis V. Dann gelten mit den Abkürzungen (2)

$$(21) \quad \bar{\sigma}_0(Z_1) + \frac{\lambda - 1/2}{q} \geq \gamma,$$

$$(22) \quad \bar{\sigma}_0(Z) \geq \frac{\lambda + 1/2}{q},$$

$$(23) \quad \bar{\sigma}_0(Z) + \bar{\sigma}_0(Z_1) \geq \gamma + \frac{1}{q},$$

$$(24) \quad \sigma^*(Z) \leq (\bar{\sigma}_0(Z_1) - \gamma)(q - 1) + \lambda - 1/2,$$

$$(25) \quad \lambda + 1/2 + \sigma^*(Z_1) \leq (q-1)\bar{\sigma}_0(Z) + \gamma$$

und

$$(26) \quad q \geq 1.$$

Beweis: m sei eine natürliche, T eine reelle Zahl, beide hinreichend groß. Unsere Abschätzungen beziehen sich auf $m \rightarrow \infty$ und werden gleichmäßig in T durchgeführt. Wir setzen

$$I = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\sigma^*(Z)+1+\varepsilon-iT}^{\sigma^*(Z)+1+\varepsilon+iT} + \int_{\sigma^*(Z)+1+\varepsilon+iT}^{\gamma-\bar{\sigma}_0(Z_1)-\varepsilon+iT} + \int_{\gamma-\bar{\sigma}_0(Z_1)-\varepsilon+iT}^{\gamma-\bar{\sigma}_0(Z_1)-\varepsilon-iT} + \int_{\gamma-\bar{\sigma}_0(Z_1)-\varepsilon-iT}^{\sigma^*(Z)+1+\varepsilon-iT} \right\} m^s Z(s) ds =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Wegen (20) und (1) ist die Integrationsvertikale in I_3 links von derjenigen in I_1 gelegen. Nach I und der Wahl von T sind sämtliche etwaigen Pole unseres Integranden in $\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1) - \varepsilon \leq \sigma \leq \sigma^*(Z) + 1 + \varepsilon$ im Innern des Rechtecks $\sigma^*(Z) + 1 + \varepsilon \pm iT$, $\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1) - \varepsilon \pm iT$ gelegen, während er auf dem Rande desselben regulär ist. Daher liefert der Residuensatz

$$I = \sum_{\gamma - \bar{\sigma}_0(\dots) \leq \sigma \leq \sigma^*(Z) + 1} \text{Res } m^s Z(s) = O(m^{\sigma^*(Z) + 1 + \varepsilon}).$$

Zur Abschätzung der Integrale über die Horizontalen verwenden wir Hilfssatz 10 mit $\sigma' = \gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1) - \varepsilon$, $\sigma'' = \sigma^*(Z) + 1 + \varepsilon$. (17) ist wegen (1) erfüllt, und wir bekommen

$$I_2 + I_4 = O \left(\int_{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1) - \varepsilon}^{\sigma^*(Z) + 1 + \varepsilon} m^\sigma T^{\frac{\sigma^*(Z) + 1 + \varepsilon - \sigma}{\sigma^*(Z) + 1 + 2\varepsilon + \bar{\sigma}_0(Z_1) - \gamma}} (\lambda + q(\bar{\sigma}_0(Z_1) - \gamma + \varepsilon) + \varepsilon) d\sigma \right) =$$

$$= O(m^{\sigma^*(Z) + 1 + \varepsilon} T^\varepsilon) + O(m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1)} T^{k + \varepsilon}),$$

worin mit (19) und (4)

$$k = \lambda + q(\bar{\sigma}_0(Z_1) - \gamma + \varepsilon) > 0.$$

Weiter konvergiert die Reihe von $Z(s)$ sicher auf $\sigma = \sigma^*(Z) + 1 + \varepsilon$ gleichmäßig in $|t| \leq T$. Daher erhalten wir mit Hilfssatz 4

$$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma^*(Z)+1+\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt =$$

$$\frac{T}{\pi} f(m) + O\left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} n^{\sigma^*(Z)+\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma^*(Z)+1+\varepsilon} \frac{1}{|\log m/n|}\right) = \frac{T}{\pi} f(m) + O(m^{\sigma^*(Z)+1+\varepsilon}).$$

Ferner bekommen wir aus II

$$\begin{aligned} I_3 &= O(m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z)}) - \frac{1}{2\pi} m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z) - \varepsilon} \int_1^T m^{it} C^{\vartheta(\gamma - \bar{\sigma}_0(Z) - \varepsilon + it) + \theta} \times \\ &\quad \times G(\gamma - \bar{\sigma}_0(Z) - \varepsilon + it) Z_1(\bar{\sigma}_0(Z) + \varepsilon - it) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z) - \varepsilon} \int_1^T m^{-it} C^{\vartheta(\gamma - \bar{\sigma}_0(Z) - \varepsilon - it) + \theta} \times \\ &\quad \times G(\gamma - \bar{\sigma}_0(Z) - \varepsilon - it) Z_1(\bar{\sigma}_0(Z) + \varepsilon + it) dt. \end{aligned}$$

Auf $\bar{\sigma}_0(Z) + \varepsilon$ ist die Reihe von $Z_1(s)$ sicher in $|t| \leq T$ gleichmäßig konvergent, so daß wir mit (15) und (12)

$$\begin{aligned} I_3 &= O(m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z)}) - \frac{1}{\pi} m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z) - \varepsilon} C^{\vartheta(\gamma - \bar{\sigma}_0(Z) - \varepsilon) + \theta} e^{\nu(\bar{\sigma}_0(Z) - \gamma + \varepsilon)} \times \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(n)}{n^{\bar{\sigma}_0(Z) + \varepsilon}} \operatorname{Re} \Lambda \int_1^T t^k e^{-it(q \log t - q - \log(pmn))} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt = \\ &\quad = O(m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z)}) + O(m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z)} T^k) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z) - \varepsilon} C^{\vartheta(\gamma - \bar{\sigma}_0(Z) - \varepsilon) + \theta} e^{\nu(\bar{\sigma}_0(Z) - \gamma + \varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(n)}{n^{\bar{\sigma}_0(Z) + \varepsilon}} \operatorname{Re} \Lambda U_n, \end{aligned}$$

wo

$$U_n = \int_1^T t^k e^{-it(q \log t - q - \log(pmn))} dt,$$

haben.

U_n soll mittels Hilfssatz 5 abgeschätzt werden. Wir wählen dort $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = T$. Mit

$$g(t) = t^k, \quad h(t) = -t(q \log t - q - \log(pmn)),$$

$$h'(t) = -q \log t + q + \log(pmn) - q = \log \frac{pmn}{t^q}, \quad h''(t) = -\frac{q}{t}$$

erkennen wir, daß die Funktion $\frac{g}{h'}(t)$ über positive Werte von 1 bis $(pmn)^{1/q}$ monoton wächst. Für $t > (pmn)^{1/q}$ ist sie negativ, wächst bis $(pmn)^{1/q} e^{1/k}$ monoton, um dann monoton bis $-\infty$ abzufallen. Wir können also (was offenbar nur im Falle $(pmn)^{1/q} < T$ nötig ist) das Intervall $1 \dots T$ derart in drei Intervalle aufteilen, daß $\frac{g}{h'}(t)$ in jedem derselben monoton und somit Hilfssatz 5 anwendbar ist. (9) ist stets mit $P = T^k$ und $Q = T/q$ erfüllt, so daß sich

$$U_n = O\left(T^{k + \frac{1}{2}}\right)$$

ergibt. Damit erhalten wir

$$I_3 = O(m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1)}) + O(m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1)} T^k) + O\left(m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1)} T^{k + \frac{1}{2}}\right) = O\left(m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1)} T^{k + \frac{1}{2}}\right).$$

Die Zusammenstellung unserer Ergebnisse ergibt nun

$$(27) \quad f(m) = O(m^{\sigma^*(Z) + 1 + \varepsilon} T^{-1 + \varepsilon}) + O\left(m^{\gamma - \bar{\sigma}_0(Z_1)} T^{q(\bar{\sigma}_0(Z_1) - \gamma) + \lambda - \frac{1}{2} + \varepsilon}\right).$$

Hieraus können wir nun die gewünschten Folgerungen ziehen. Nach II und V sind $\gamma > -\infty$ und $\bar{\sigma}_0(Z_1) < \infty$, so daß wegen (20) und (1) auch $\sigma^*(Z) > -\infty$ ist. Daher kann der Exponent von T im zweiten O -Term von (27) nicht ebenfalls negativ sein, da sich sonst durch Wahl von $T = m^A$ mit hinreichend großem A aus (27) ein Widerspruch herleiten ließe. Somit muß (21) gelten.

Wenden wir auf diese Ungleichung Hilfssatz 9 an, wonach q und γ invariant sind, $\bar{\sigma}_0(Z)$ und $\bar{\sigma}_0(Z_1)$ ihre Rollen vertauschen und λ in $q\gamma - \lambda$ übergeht, so bekommen wir (22) und Addition liefert (23).

Jetzt wählen wir T derart, daß beide Fehlerglieder in (27) dieselbe Größenordnung bekommen, nämlich

$$T = m^{\frac{\sigma^*(Z)+1+\bar{\sigma}_0(Z_1)-\gamma}{q(\bar{\sigma}_0(Z_1)-\gamma)+\lambda+1/2}}.$$

Wegen (1), (23) und (21) ist der Exponent von m positiv, so daß, wie gefordert, mit m auch T hinreichend groß wird. Wir erhalten dann

$$f(m) = O\left(m^{\sigma^*(Z)+1 - \frac{\sigma^*(Z)+1+\bar{\sigma}_0(Z_1)-\gamma}{q(\bar{\sigma}_0(Z_1)-\gamma)+\lambda+1/2} + \varepsilon}\right),$$

also

$$\sigma^*(Z) \leq \sigma^*(Z) + 1 - \frac{\sigma^*(Z) + 1 + \bar{\sigma}_0(Z_1) - \gamma}{q(\bar{\sigma}_0(Z_1) - \gamma) + \lambda + 1/2},$$

woraus sich (24) ergibt. Wenden wir auf (24) wieder Hilfssatz 9 an, so erhalten wir auch (25).

Mit (24) und (22) bekommen wir

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_0(Z) &\leq \sigma^*(Z) + 1 \leq (\bar{\sigma}_0(Z_1) - \gamma)(q-1) + \lambda + 1/2 \leq \\ &\leq (\bar{\sigma}_0(Z_1) - \gamma)(q-1) + q\bar{\sigma}_0(Z), \end{aligned}$$

also

$$0 \leq (\bar{\sigma}_0(Z) + \bar{\sigma}_0(Z_1) - \gamma)(q-1),$$

woraus wegen (23) auch (26) folgt. (21) bis (23) sind ersichtlich Verschärfungen von (18) bis (20).

Die durch (2) definierte Zahl $q = q(Z)$ heißt im Anschluß an A. Selberg die Dimension der Funktionalgleichung von $Z(s)$. Bekanntlich (vgl. [34], S. 16) erfüllt die Riemannsche ζ -Funktion die Voraussetzungen I bis V mit $q(\zeta) = 1$. A. Selberg vermutete, daß die Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ die kleinste Dimension besitzt⁴⁾. Dies wird durch (26) bestätigt. Für natürliches k hat $\zeta^k(s)$ ersichtlich die Dimension $q = k$, und sämtliche Dirichletschen L -Reihen besitzen die Dimension $q = 1$.

Ferner folgt aus (24) in Verbindung mit (1), daß in dem Satz über die Charakterisierung der Riemannschen ζ -Funktion von Hamburger und Siegel (vgl. [34], S. 31) (und ebenso in den Hamburgerschen Sätzen über die Charakterisierung der Dirichletschen L -Reihen) die $\bar{\sigma}_0(\zeta)$ betreffende Forderung entbehrt werden kann. Kürzlich bewiesen Bochner und Chandrasekharan ([1 a], Theorem 5.1) einen allgemeinen Satz über die Lösungen von Funktionalgleichungen (vgl. auch [2 a]), in dem diese Forderung

⁴⁾ Nach einer mündlichen Mitteilung vom Juli 1954 in Göttingen.

ebenfalls nicht mehr auftritt. Sie wird dort durch Benutzung einer gewissen abgeleiteten Ausgangsrelation ([1 a], (1.7)) an Stelle der früher von Siegel eingeführten (vgl. [1 a] (1.6)) umgangen.

6. Unser Hauptsatz lautet nun in seiner allgemeinen Fassung:

SATZ 1: $Z(s)$ erfülle die Voraussetzungen I bis V mit

$$(28) \quad \alpha \geq -1,$$

und es sei κ eine reelle Zahl ≥ 0 .

Dann gilt für jede natürliche Zahl N mit den Abkürzungen (2), (3),

$$(29) \quad F_{\kappa}(x) = \sum_{\substack{\text{Min}(\bar{\alpha}_1, \frac{\lambda-1-\kappa}{q}) \leq \sigma \leq \alpha+1}} \text{Res } x^{\sigma+\kappa} B(s, \kappa+1) Z(s)$$

und

$$K = \sqrt{\frac{2}{q\pi}} \Gamma(\kappa+1) C^{\circ} p^{\frac{\lambda-1/2-\kappa}{q}} \exp\left(\sum_{j=1}^M (\beta_j - 1/2) \log b_j - \sum_{j=1}^M (\delta_j - 1/2) \log d_j\right),$$

$$\Phi = -\frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{j=1}^M (\beta_j + \delta_j) - M + 3/2 + \kappa \right\}$$

bei $x \rightarrow \infty$ gleichmäßig in N

$$\sum_{1 \leq n \leq x} f(n) (x-n)^{\kappa} = F_{\kappa}(x) + R_{\kappa}(x),$$

$$(30) \quad R_{\kappa}(x) = K x^{\kappa + \frac{\lambda-1/2-\kappa}{q}} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{f_1(n)}{n^{\gamma - \frac{\lambda-1/2-\kappa}{q}}} \cos(q(px n)^{1/q} + \Phi) +$$

$$+ O\left(x^{\kappa + \frac{\lambda-3/5-\kappa}{q}} N^{\varepsilon} \left(1 + N^{\bar{\alpha}_1 - \gamma + \frac{\lambda-3/5-\kappa}{q}}\right)\right) +$$

$$+ O\left(x^{\alpha + (\kappa+1)(1-1/q) + \varepsilon} N^{-\frac{\kappa+1}{q} + \varepsilon}\right) +$$

$$+ O\left(x^{\frac{\lambda-1}{q} + \kappa(1-1/q) + \varepsilon} N^{\alpha_1 + 1 - \gamma + \frac{\lambda-1-\kappa}{q} + \varepsilon}\right) + O(x^{\alpha + \varepsilon}).$$

Beweis: Wir setzen

$$\tau = \text{Max}\left(\bar{\alpha}_1 - \gamma, \frac{\kappa+1-\lambda}{q}\right) + \varepsilon$$

und erklären T durch

$$T^q = px \left(N + \frac{1}{2}\right).$$

Da wir x zum Beweise hinreichend groß annehmen dürfen, ist dies auch für T der Fall.

Wir setzen hier

$$J = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\alpha+1+\varepsilon-iT}^{\alpha+1+\varepsilon+iT} + \int_{\alpha+1+\varepsilon+iT}^{-\tau+iT} + \int_{-\tau+iT}^{-\tau-iT} + \int_{-\tau-iT}^{\alpha+1+\varepsilon-iT} \right\} x^{s+\kappa} B(s, \kappa+1) Z(s) ds =$$

$$(31) \quad = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Man beachte, daß $-\tau < \alpha+1+\varepsilon$ ist. Nach I und der Wahl von T sind sämtliche etwaigen Pole unseres Integranden in $-\tau \leq \sigma \leq \alpha+1+\varepsilon$ im Innern des Rechtecks $\alpha+1+\varepsilon \pm iT$, $-\tau \pm iT$ gelegen, während er auf dem Rande desselben regulär ist. Daher liefert der Residuensatz

$$(32) \quad J = \sum_{\text{Min} \left(\gamma - \bar{\alpha}_i, \frac{\lambda-1-\kappa}{q} \right) \leq \sigma \leq \alpha+1} \text{Res } x^{s+\kappa} B(s, \kappa+1) Z(s) = F_\kappa(x).$$

Zur Abschätzung der Integrale über die Horizontalen verwenden wir Hilfssatz 10 mit $\sigma' = -\tau$, $\sigma'' = \alpha+1+\varepsilon$. Wegen (1) und (5) ist (17) erfüllt, und wir bekommen mit Hilfssatz 2

$$(33) \quad J_2 + J_4 = O \left(\frac{x^\kappa}{T^{\kappa+1}} \int_{-\tau}^{\alpha+1+\varepsilon} x^\sigma T^{\frac{\alpha+1+\varepsilon-\sigma}{\alpha+1+\varepsilon+\tau}(\lambda+q\tau)+\varepsilon} d\sigma \right) =$$

$$= O(x^{\alpha+1+\kappa+\varepsilon} T^{-1-\kappa+\varepsilon}) + O(x^{\kappa-\tau} T^{l+\varepsilon}),$$

wo

$$l = \lambda - 1 - \kappa + q\tau > 0.$$

Weiter konvergiert die Reihe von $Z(s)$ gewiß auf $\sigma = \alpha+1+\varepsilon$ gleichmäßig in $|t| \leq T$. Daher erhalten wir wegen (28) aus Hilfssatz 7

$$J_1 = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^\kappa \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha+1+\varepsilon-iT}^{\alpha+1+\varepsilon+iT} \left(\frac{x}{n} \right)^{s+\kappa} B(s, \kappa+1) ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^\kappa \left\{ H_\kappa \left(\frac{x}{n} \right) + O \left(\left(\frac{x}{n} \right)^{\alpha+1+\kappa+\varepsilon} T^{-\kappa} \text{Min} \left(1, \frac{1}{|\log x/n| T} \right) \right) \right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^\kappa H_\kappa \left(\frac{x}{n} \right) + O \left(T^{-\kappa} \sum_{x-1 \leq n \leq x+1} n^{\alpha+\kappa+\varepsilon} \right) +$$

$$+ O \left(\frac{x^{\alpha+1+\kappa+\varepsilon}}{T^{\kappa+1}} \sum_{\substack{n=1 \\ n < x-1 \\ n > x+1}}^{\infty} n^{-1-\varepsilon} \left| \log \frac{x}{n} \right|^{-1} \right).$$

Hierin ist jedenfalls

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{\kappa} H_{\kappa} \left(\frac{x}{n} \right) = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n) (x-n)^{\kappa} + O(x^{\alpha+\varepsilon}),$$

denn die Summen unterscheiden sich nur im Falle $\kappa=0$ und x ganzzahlig voneinander, und zwar dann um $\frac{f(x)}{2}$.

Mit Hilfssatz 4 folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1 \\ n < x-1 \\ n > x+1}}^{\infty} n^{-1-\varepsilon} \left| \log \frac{x}{n} \right|^{-1} &\leq \sum_{1 \leq n \leq [x]-1} n^{-1-\varepsilon} \left| \log \frac{[x]}{n} \right|^{-1} + \\ &+ \sum_{n \geq [x]+2} n^{-1-\varepsilon} \left| \log \frac{[x]+1}{n} \right|^{-1} = O(1), \end{aligned}$$

so daß wir insgesamt

$$(34) \quad J_1 = \sum_{1 \leq n \leq x} f(n) (x-n)^{\kappa} + O(x^{\alpha+\varepsilon}) + O(x^{\alpha+1+\kappa+\varepsilon} T^{-\kappa-1})$$

haben.

Das verbliebene Integral über die Vertikale $-\tau$ werden wir für Satz 1 mittels der Methode der stationären Phase auswerten. Wir bekommen zunächst mit II

$$\begin{aligned} J_3 &= O(x^{\kappa-\tau}) - \\ &- \frac{x^{\kappa-\tau}}{2\pi} \int_1^T x^{it} B(-\tau+it, \kappa+1) C^{\vartheta(-\tau+it)+\theta} G(-\tau+it) Z_1(\gamma+\tau-it) dt - \\ &- \frac{x^{\kappa-\tau}}{2\pi} \int_1^T x^{-it} B(-\tau-it, \kappa+1) C^{\vartheta(-\tau-it)+\theta} G(-\tau-it) Z_1(\gamma+\tau+it) dt. \end{aligned}$$

Wegen $\gamma+\tau > \alpha_1$ ist die Reihe von $Z_1(s)$ auf $\sigma=\gamma+\tau$ sicher in $|t| \leq T$ gleichmäßig konvergent, so daß wir mit Hilfssatz 2, (12) und (15) bekommen

$$\begin{aligned} J_3 &= O(x^{\tau-\kappa}) - \\ &- \frac{C^{\theta}}{\pi} x^{\kappa-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(n)}{n^{\gamma+\tau}} \operatorname{Re} \int_1^T (xn)^{it} B(-\tau+it, \kappa+1) C^{\vartheta(-\tau+it)} G(-\tau+it) dt = \\ &= O(x^{\kappa-\tau}) - \frac{1}{\pi} x^{\kappa-\tau} \Gamma(\kappa+1) C^{-\vartheta\tau+\theta} e^{\nu\tau} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(n)}{n^{\gamma+\tau}} \operatorname{Re} e^{-\frac{\pi i}{2}(\kappa+1)} \Lambda \int_1^T (xn)^{it} t^{-\kappa-1} C^{i\vartheta t} f_{\lambda+q\tau} e^{-it(q \log t - q + \nu)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt = \end{aligned}$$

$$(35) \quad = O(x^{\chi-\tau}) + O\left(x^{\chi-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_1(n)|}{n^{\alpha_1+\varepsilon}} \int_1^T t^{\chi-1} dt\right) - \\ - \frac{1}{\pi} \Gamma(\chi+1) C^{-\vartheta\tau+\theta} e^{\nu\tau} x^{\chi-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(n)}{n^{\gamma+\tau}} \operatorname{Re} e^{-\frac{\pi i}{2}(\chi+1)} \Lambda V_n,$$

wo wegen (3)

$$V_n = \int_1^T t^{\chi} e^{-it(q \log t - q - \log(pxn))} dt.$$

Nun werde V_n für $n \geq N+1$ nach Hilfssatz 6 abgeschätzt. Wir wählen dort $\omega_1=1$, $\omega_2=T$. Bei

$$(36) \quad g(t)=t^{\chi}, \quad h(t)=-t(q \log t - q - \log(pxn)), \quad h'(t)=\log \frac{pxn}{t^q}$$

erkennen wir wegen $n \geq N+1$, daß $\frac{g}{h'}(t)$ in $1 \dots T$ monoton wächst, so daß aus Hilfssatz 6

$$(37) \quad V_n = O\left(\frac{T^{\chi}}{\log pxn/T^q}\right) = O\left(\frac{T^{\chi}}{\log n/(N+1/2)}\right) \quad \text{für } n \geq N+1$$

folgt. Hiermit wird

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{f_1(n)}{n^{\gamma+\tau}} \operatorname{Re} e^{-\frac{\pi i}{2}(\chi+1)} \Lambda V_n = O\left(T^{\chi} \sum_{n=N+1}^{2N} n^{\alpha_1-\gamma-\tau+\varepsilon} \frac{1}{\log n/(N+1/2)}\right) + \\ + O\left(T^{\chi} \sum_{n=2N+1}^{\infty} \frac{|f_1(n)|}{n^{\alpha_1+\varepsilon}}\right) = \\ = O\left(T^{\chi} N^{\alpha_1-\gamma-\tau+\varepsilon} \sum_{j=1}^N \frac{N}{j}\right) + O(T^{\chi}) = O(T^{\chi}(N^{\alpha_1+1-\gamma-\tau+\varepsilon}+1)).$$

Fassen wir unsere bisherigen Rechnungen zusammen, so ergibt sich

$$(38) \quad R_{\chi}(x) = \frac{1}{\pi} \Gamma(\chi+1) C^{-\vartheta\tau+\theta} e^{\nu\tau} x^{\chi-\tau} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{f_1(n)}{n^{\gamma+\tau}} \operatorname{Re} e^{-\frac{\pi i}{2}(\chi+1)} \Lambda V_n + \\ + O(x^{\alpha+\varepsilon}) + O(x^{\alpha+1+\chi+\varepsilon} T^{-1-\chi+\varepsilon}) + \\ + O(x^{\chi-\tau} T^{l+\varepsilon} (1+N^{\alpha_1+1-\gamma-\tau})).$$

Für die asymptotische Bestimmung der V_n mit $1 \leq n \leq N$, auf deren Betrachtung alles Weitere hinausläuft, setzen wir zur Abkürzung

$$w = pxn, \quad z = w^{1 - \frac{2}{5q}},$$

$$W_n = \int_{(w-z)^{1/q}}^{(w+z)^{1/q}} t^l e^{-it(q \log t - q - \log(pxn))} dt.$$

Zur Orientierung werde bemerkt, daß mit $x \rightarrow \infty$ auch $w \rightarrow \infty$ strebt und

$$0 < \frac{z}{w} = w^{-\frac{2}{5q}} < \frac{1}{2}, \quad 1 < w - z$$

angenommen werden kann.

Ferner ist bei Beachtung von $n \leq N$ zwar stets

$$1 < (w-z)^{\frac{1}{q}} < w^{\frac{1}{q}} < T,$$

doch kann sehr wohl $(w+z)^{1/q} > T$ eintreten. Bezeichnet $\mathfrak{Z}$ die Menge aller t mit $1 \leq t \leq (w-z)^{1/q}$ und $(w+z)^{1/q} \leq t \leq T$ bzw. $T \leq t \leq (w+z)^{1/q}$, so ist

$$V_n - W_n = \int_{\mathfrak{Z}} t^l e^{-it(q \log t - q - \log(pxn))} dt,$$

wobei im rechten Teilintervall von $\mathfrak{Z}$ das Integral in jedem Falle von $(w+z)^{1/q}$ nach T zu orientieren ist.

Auf das rechtsstehende Integral wollen wir Hilfssatz 6 mit den in (36) eingeführten Funktionen $g(t)$ und $h(t)$ anwenden. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{h'}{g}(t) &= t^{-l} \log \frac{w}{t^q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{h'}{g}(t) = -l t^{-l-1} \log \frac{w}{t^q} - q t^{-l-1} = \\ &= -t^{-l-1} \left(l \log \frac{w}{t^q} + q \right), \end{aligned}$$

also

$$\frac{d}{dt} \frac{h'}{g}(t) = 0 \quad \text{für } t = w^{1/q} e^{1/l}.$$

Daher wächst die Funktion $\frac{g}{h'}$ (t) über positive Werte monoton von

1 bis $(w-z)^{1/q}$. Für $t > w^{1/q}$ ist sie negativ, wächst bis $t = w^{1/q} e^{1/t}$ monoton, um dann monoton gegen $-\infty$ abzufallen. Daher ist auf $\mathfrak{X}$ stets

$$\left| \frac{g}{h'}(t) \right| \leq \left| \frac{g}{h'}(\tilde{t}) \right|,$$

wo $\tilde{t}$ jedenfalls unter den Werten

$$t_1 = (w-z)^{1/q}, \quad t_2 = (w+z)^{1/q}, \quad t_3 = T$$

vorkommt. Nun sind zwar insofern die Voraussetzungen des Hilfssatzes 6 nicht sämtlich erfüllt, als $\frac{g}{h'}(t)$ nicht durchweg monoton ist. Nach den soeben gemachten Bemerkungen läßt sich jedoch $\mathfrak{X}$ derart in drei Teilintervalle zerlegen, daß in jedem von ihnen unser Hilfssatz anwendbar ist. Daher haben wir

$$\begin{aligned} V_n - W_n &= O\left\{ \frac{w^{1/q}}{|\log w/(w \mp z)|} \right\} + O\left(\frac{T^l}{\log T^q/w} \right) = \\ &= O(w^{1+1/q} z^{-1}) + O\left(\frac{T^l}{\log T^q/w} \right) = \\ &= O\left((xn)^{\frac{l+2/5}{q}} \right) + O\left(\frac{T^l}{\log(N+1/2)/n} \right). \end{aligned}$$

Es bleibt W_n zu bestimmen. Wir haben

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{q} \int_{-z}^z (w+u)^{\frac{l+1}{q}-1} e^{-i(w+u)^{1/q} (\log \frac{w+u}{w} - q)} du = \\ &= \frac{1}{q} w^{\frac{l+1}{q}} \int_{-\frac{z}{w}}^{\frac{z}{w}} (1+t)^{\frac{l+1}{q}-1} e^{-iw^{1/q}(1+t)^{1/q} (\log(1+t) - q)} dt. \end{aligned}$$

Hierin ist bei $|t| \rightarrow 0$

$$(1+t)^{\frac{l+1}{q}-1} = 1 + O(|t|)$$

und

$$\begin{aligned} & (1+t)^{\frac{1}{q}} (\log(1+t) - q) = \\ & = \left(1 + \frac{t}{q} + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{q} - 1\right) \frac{t^2}{2} + O(|t|^3)\right) \left(-q + t - \frac{t^2}{2} + O(|t|^3)\right) = \\ & = -q + \frac{t^2}{2q} + O(|t|^3), \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{q} w^{\frac{l+1}{q}} \int_{-\frac{z}{w}}^{\frac{z}{w}} (1 + O(|t|)) e^{-iw^{1/q}(-q+t^2/2q)} (1 + O(w^{1/q}|t|^3)) dt = \\ & = \frac{w^{\frac{l+1}{q}}}{q} e^{iqw^{1/q}} \int_{-\frac{z}{w}}^{\frac{z}{w}} e^{-iw^{1/q}t^2/2q} dt + O(w^{\frac{l+2/5}{q}}). \end{aligned}$$

Endlich ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw^{1/q}t^2/2q} dt = \sqrt{2\pi q} e^{-\frac{\pi i}{4}} w^{-\frac{1}{2q}},$$

also

$$\int_{-\frac{z}{w}}^{\frac{z}{w}} e^{-iw^{1/q}t^2/2q} dt = \sqrt{2\pi q} e^{-\frac{\pi i}{4}} w^{-\frac{1}{2q}} + O\left(\left|\int_{\frac{z}{w}}^{\infty} e^{iw^{1/q}t^2/2q} dt\right|\right).$$

Auf das im O -Glied stehende Integral wenden wir wieder Hilfssatz 6 mit

$$g(t) = 1, \quad h(t) = \frac{w^{1/q}}{2q} t^2, \quad h'(t) = \frac{w^{1/q}}{q} t, \quad P = \frac{qw}{\frac{1}{w^q z}} = qw^{-\frac{3}{5q}}$$

an. Dann erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} (39) \quad V_n &= \sqrt{\frac{2\pi}{q}} e^{iq(\rho xn)^{1/q} - \frac{\pi i}{4}} (\rho xn)^{\frac{l+1/2}{q}} + O\left((xn)^{\frac{l+2/5}{q}}\right) + \\ & + O\left(\frac{T^l}{\log(N+1/2)/n}\right) \quad \text{für } 1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (38) ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
 R_x(x) &= \frac{1}{\pi} \Gamma(x+1) C^{-\delta\tau+\theta} e^{\nu\tau} p^{\frac{l+1/2}{q}} \sqrt{\frac{2\pi}{q}} x^{x-\tau+\frac{l+1/2}{q}} \times \\
 &\times \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{f_1(n)}{n^{\gamma+\tau-\frac{l+1/2}{q}}} \operatorname{Re} e^{-\frac{\pi i}{2}(x+1)} \Lambda e^{iq(\rho x n)^{1/q} - \frac{\pi l}{4}} + \\
 &+ O\left(x^{x-\tau+\frac{l+2/5}{q}} \sum_{1 \leq n \leq N} |f_1(n)| n^{-\gamma-\tau+\frac{l+2/5}{q}}\right) + \\
 &+ O\left(x^{x-\tau} T^l \sum_{1 \leq n \leq N} n^{\alpha_1+1-\gamma-\tau+\varepsilon} n^{-1-\varepsilon/2} \frac{1}{\log(N+1/2)/n}\right) + \\
 &+ O(x^{\alpha+\varepsilon}) + O(x^{\alpha+1+\varepsilon} T^{-1-\varepsilon}) + O(x^{x-\tau} T^{l+\varepsilon} N^{\alpha_1+1-\gamma-\tau}).
 \end{aligned}$$

Das erste Glied hierin ergibt gerade den ersten Term unserer Behauptung (30). Da

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq n \leq N} |f_1(n)| n^{-\gamma-\tau+\frac{l+2/5}{q}} &= \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{|f_1(n)|}{n^{\alpha_1+\varepsilon}} n^{\bar{\alpha}_1-\gamma+\frac{\lambda-3/5-\varkappa}{q}+\varepsilon} = \\
 &= O\left(1 + N^{\bar{\alpha}_1-\gamma+\frac{\lambda-3/5-\varkappa}{q}+\varepsilon}\right)
 \end{aligned}$$

und nach Hilfssatz 4

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq n \leq N} n^{-1-\varepsilon} \frac{1}{\log(N+1/2)/n} &\leq N^{-1-\varepsilon} \frac{1}{\log(N+1/2)/n} + \\
 &+ \sum_{1 \leq n \leq N-1} n^{-1-\varepsilon} \frac{1}{\log \frac{N}{n}} = O(1)
 \end{aligned}$$

ist, werden die Restglieder zu

$$\begin{aligned}
 &O\left(x^{x+\frac{\lambda-3/5-\varkappa}{q}}\right) + O\left(x^{x+\frac{\lambda-3/5-\varkappa}{q}} N^{\bar{\alpha}_1-\gamma+\frac{\lambda-3/5-\varkappa}{q}+\varepsilon}\right) + \\
 &+ O\left(x^{x+\frac{\lambda-1-\varkappa}{q}} N^\varepsilon\right) + O\left(x^{x+\frac{\lambda-1-\varkappa}{q}} N^{\bar{\alpha}_1-\gamma+\frac{\lambda-1-\varkappa}{q}+\varepsilon}\right) + \\
 &+ O\left(x^{x+\frac{\lambda-1-\varkappa}{q}+\varepsilon} N^{\alpha_1+1-\gamma+\frac{\lambda-1-\varkappa}{q}+\varepsilon}\right) + O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right) - \\
 &+ O\left(x^{\alpha+(x+1)(1-\frac{1}{q})+\varepsilon} N^{-\frac{x+1}{q}+\varepsilon}\right).
 \end{aligned}$$

Hierin werden die vier ersten O -Glieder durch

$$O\left(x^{\lambda + \frac{\lambda - 3/5 - \kappa}{q}} N^{\varepsilon} \left(1 + N^{\bar{\alpha}_1 - \gamma + \frac{\lambda - 3/5 - \kappa}{q}}\right)\right)$$

majorisiert. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

7. Wenn die in (30) auftretende Summe nicht besser als trivial abgeschätzt werden kann, behandeln wir J_3 folgendermaßen vorteilhafter.

Wir sahen, daß mit den in V_n auftretenden Funktionen $g(t)$ und $h(t)$ das Intervall $1 \dots T$ in höchstens drei Teilintervalle derart aufgeteilt werden kann, daß $\frac{g}{h'}(t)$ in jedem derselben monoton ist. Daher ist Hilfssatz 5 nach (36) mit $P = T^l$, $Q = T/q$ in jedem dieser Teilintervalle anwendbar und somit

$$V_n = O(T^{l+1/2}).$$

Wegen (37) und (39) können wir jedenfalls die Abschätzungen

$$V_n = \begin{cases} O\left((xn)^{\frac{l+1/2}{q}}\right) + O(T^l) & \text{für } 1 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ O(T^{l+1/2}) & \text{für } \frac{N}{2} \leq n \leq 2N \\ O(T^l) & \text{für } n \geq 2N + 1 \end{cases}$$

verwenden. Hiermit bekommen wir aus (35), da stets $\gamma + \tau > \bar{\alpha}_1$ ist,

$$\begin{aligned} J_3 &= O(x^{\lambda - \tau} T^l) + O\left(x^{\lambda - \tau} \sum_{1 \leq n \leq N/2} \frac{|f_1(n)|}{n^{\gamma + \tau}} (xn)^{\frac{l+1/2}{q}}\right) + \\ &\quad + O\left(x^{\lambda - \tau} T^{l+1/2} \sum_{N/2 \leq n \leq 2N} \frac{|f_1(n)|}{n^{\gamma + \tau}}\right) = \\ &= O(x^{\lambda - \tau} T^l) + O\left(x^{\lambda - \tau + \frac{l+1/2}{q}} \left(1 + N^{\bar{\alpha}_1 - \gamma + \frac{\lambda - 1/2 - \kappa}{q} + \varepsilon}\right)\right) + \\ &\quad + O(x^{\lambda - \tau} T^{l+1/2} N^{\bar{\alpha}_1 - \gamma - \tau + \varepsilon}) = \end{aligned}$$

$$= O\left(x^{\kappa + \frac{\lambda-1-\kappa}{q}} N^{\frac{\lambda-1-\kappa}{q} + \tau}\right) + O\left(x^{\kappa + \frac{\lambda-1/2-\kappa}{q}}\right) + \\ + O\left(x^{\kappa + \frac{\lambda-1/2-\kappa}{q}} N^{\bar{\alpha}_1 - \gamma + \frac{\lambda-1/2-\kappa}{q} + \varepsilon}\right),$$

also mit (31) bis (34)

$$R_{\kappa}(x) = O\left(x^{\alpha+1+\kappa - \frac{\kappa+1}{q} + \varepsilon} N^{-\frac{\kappa+1}{q} + \varepsilon}\right) + O\left(x^{\kappa + \frac{\lambda-1-\kappa}{q} + \varepsilon} N^{\frac{\lambda-1-\kappa}{q} + \tau + \varepsilon}\right) + \\ + O(x^{\alpha + \varepsilon}) + O\left(x^{\kappa + \frac{\lambda-1/2-\kappa}{q}} \left(1 + N^{\bar{\alpha}_1 - \gamma + \frac{\lambda-1/2-\kappa}{q} + \varepsilon}\right)\right) = \\ = O\left(x^{\alpha+1+\kappa - \frac{\kappa+1}{q} + \varepsilon} N^{-\frac{\kappa+1}{q} + \varepsilon}\right) + \\ + O\left(x^{\kappa + \frac{\lambda-1/2-\kappa}{q}} N^{\varepsilon} \left(1 + N^{\bar{\alpha}_1 - \gamma + \frac{\lambda-1/2-\kappa}{q}}\right)\right) + O(x^{\alpha + \varepsilon}).$$

Jetzt wählen wir N so, daß hierin das erste O -Glied und der zweite Teil des zweiten O -Gliedes dieselbe Größenordnung bekommen, nämlich

$$N = \left[x^{\left(\alpha+1 - \frac{\lambda+1/2}{q}\right) / \left(\bar{\alpha}_1 - \gamma + \frac{\lambda+1/2}{q}\right)} \right]$$

Wegen (22) und (21) ist dies tatsächlich, wie gefordert, eine natürliche Zahl.

Damit erhalten wir den

SATZ 2: $Z(s)$ erfülle die Voraussetzungen I bis V mit

$$\alpha \geq -1,$$

und es sei κ eine reelle Zahl ≥ 0 . Dann gilt mit den Abkürzungen (2) und (29) bei $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{1 \leq n \leq x} f(n) (x-n)^{\kappa} = F_{\kappa}(x) + O\left(x^{\alpha + (\kappa+1) \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_1 + \alpha + 1 - \gamma}{q(\bar{\alpha}_1 - \gamma) + \lambda + 1/2}\right) + \varepsilon}\right) + \\ + O\left(x^{\kappa + \frac{\lambda-1/2-\kappa}{q} + \varepsilon}\right) + O(x^{\alpha + \varepsilon}).$$

8. Gelegentlich ist in der Funktionalgleichung II $Z_1(s) = Z(s)$. Unter dieser zusätzlichen Voraussetzung dürfen wir

$$(40) \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}$$

annehmen. Aus Hilfssatz 9 ergibt sich, da dort jetzt überall der * weggelassen werden darf

$$(41) \quad C^{2\theta} = C^{-\gamma\vartheta}, \quad \beta_j = \delta_j + \gamma d_j, \quad b_j = d_j, \quad 1 \leq j \leq M, \quad \lambda = \frac{q\gamma}{2},$$

und hieraus folgt mit (23), (1) und (5)

$$\alpha + 1 \geq \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2q},$$

so daß wir wegen (4) die Voraussetzung $\alpha \geq -1$ schon durch die etwas bequemere $\gamma \geq 0$ sichern können. Ebenfalls folgt aus (41), daß K eine einfachere Gestalt annimmt (insbesondere ist nun $C^{\theta+\gamma\vartheta/2} = \pm 1$).

Daher bekommen wir aus Satz 1 jetzt den

SATZ 3: $Z(s)$ erfülle die Voraussetzungen I bis V mit $Z_1(s) = Z(s)$ und

$$\gamma \geq 0.$$

x sei eine reelle Zahl ≥ 0 .

Dann gilt für jede natürliche Zahl N mit den Abkürzungen (2), (3),

$$(42) \quad F_x(x) = \sum_{\substack{\text{Res } x^{s+x} B(s, x+1) Z(s) \\ \text{Min} \left(\gamma - \bar{\alpha}, \frac{\gamma}{2} - \frac{x+1}{q} \right) \leq \sigma \leq \alpha + 1}}$$

und

$$K = \sqrt{\frac{2}{q\pi}} \Gamma(x+1) p^{-\frac{x+1/2}{q}} C^{\theta+\gamma\vartheta/2}, \quad \Phi = -\frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{j=1}^M (\beta_j + \delta_j) - M + \frac{3}{2} + x \right\}$$

bei $x \rightarrow \infty$ gleichmäßig in N

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq n \leq x} f(n) (x-n)^x = F_x(x) + K x^{x + \frac{\gamma}{2} - \frac{x+1/2}{q}} \times \\ & \times \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{f(n)}{n^{\frac{\gamma}{2} + \frac{x+1/2}{q}}} \cos(q(\rho x n)^{1/q} + \Phi) + O\left(x^{x + \frac{\gamma}{2} - \frac{x+3/5}{q}} N^\varepsilon \left(1 + N^{\bar{\alpha} - \frac{\gamma}{2} - \frac{x+3/5}{q}}\right)\right) + \\ & + O\left(x^{\alpha + (x+1)(1-1/q) + \varepsilon} N^{-\frac{x+1}{q} + \varepsilon}\right) + O\left(x^{x + \frac{\gamma}{2} - \frac{x+1}{q} + \varepsilon} N^{\alpha+1 - \frac{\gamma}{2} - \frac{x+1}{q} + \varepsilon}\right) + O(x^{\alpha+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Bei Satz 2 wollen wir dieselben Vereinfachungen anbringen. Wir bekommen dann den

SATZ 4: $Z(s)$ erfülle die Voraussetzungen I bis V mit $Z_1(s) = Z(s)$ und

$$\gamma \geq 0.$$

x sei eine reelle Zahl ≥ 0 .

Dann gilt mit (42) bei $x \rightarrow \infty$

$$(43) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} f(n) (x-n)^x = F_x(x) + O\left(x^{\alpha+(\alpha+1)\left(1 - \frac{\bar{\alpha} + \alpha + 1 - \gamma}{q(\bar{\alpha} - \gamma/2 + 1/2q)\right) + \varepsilon}\right) + \\ + O\left(x^{x + \frac{\gamma}{2} - \frac{x+1/2}{q} + \varepsilon}\right) + O(x^{\alpha + \varepsilon}).$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß in (43) das erste O -Glied das zweite genau dann nicht übertrifft wenn

$$(44) \quad \left(\alpha + 1 - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q}\right) \left(x - q\left(\bar{\alpha} - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q}\right)\right) \geq 0$$

ist. Wegen (23) und (40) ist unter den Voraussetzungen des Satzes 4 stets

$$(45) \quad \alpha + 1 \geq \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2q}.$$

Für das Bestehen von (44) ist nach (45)

$$(46) \quad x \geq q\left(\bar{\alpha} - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q}\right)$$

hinreichend. Übrigens ist wegen (23) hiermit auch $x \geq 0$.

Nach I ist die Wahl $\alpha = \sigma^*(Z)$ zulässig. Mit Hilfssatz 11, (41) und (46) erhalten wir

$$\sigma^*(Z) \leq (\bar{\alpha} - \gamma)(q-1) + \frac{q\gamma}{2} - \frac{1}{2} = (q-1)\left(\bar{\alpha} - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q}\right) + \\ + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q} \leq x\left(1 - \frac{1}{q}\right) + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q},$$

wonach diese Wahl von α zur Folge hat, daß in (43) auch das dritte O -Glied gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden kann.

Ferner wird mit (46) in (42)

$$\text{Min}\left(\gamma - \bar{\alpha}, \frac{\gamma}{2} - \frac{x+1}{q}\right) = \frac{\gamma}{2} - \frac{x+1}{q},$$

aber im Hinblick auf das zweite Fehlerglied in (43) genügt es sogar, mit

σ in der Residuensumme nur bis $\frac{\gamma}{2} - \frac{\kappa + 1/2}{q}$ hinunterzugehen.

Nach diesen Bemerkungen folgt aus Satz 4 der

SATZ 5: $Z(s)$ erfülle die Voraussetzungen I bis V mit $Z_1(s) = Z(s)$ und $\gamma \geq 0$.

κ sei eine reelle Zahl mit

$$\kappa \geq q \left(\bar{\alpha} - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q} \right).$$

Dann gilt bei $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{1 \leq n \leq x} f(n) (x-n)^\kappa = \frac{\gamma}{2} - \frac{\kappa + 1/2}{q} \sum_{\sigma \leq \sigma^*(Z) + 1} \text{Res } x^{s+\kappa} B(s, \kappa+1) Z(s) + O \left(x^{\kappa + \frac{\gamma}{2} - \frac{\kappa + 1/2}{q} + \varepsilon} \right).$$

9. Im folgenden Abschnitt handelt es sich um ein Anwendungsbeispiel des Satzes 1, wobei eine nichttriviale Abschätzung der trigonometrischen Summe gelingt, und so ein schärferes Ergebnis als mit Hilfe von Satz 2, also mit dem Landauschen Hauptsatz, erzielt werden kann. Wir beschränken uns auf ein gewisses ebenes Hyperbel-Gitterpunktproblem, das schon Landau als Anwendung seines Hauptsatzes betrachtet hat ([16], S. 242). Dieses ist aber so allgemein gehalten, daß sein Ergebnis durch Spezialisierung bzw. einfache Folgerungen noch eine Anwendung auf einige der meistbehandelten zweidimensionalen Probleme gestattet.

Es seien

$$l_j, k_j \text{ natürliche Zahlen, } 1 \leq l_j \leq k_j, j=1,2,$$

und

$$g(n) = \sum_{\substack{n_1 n_2 = n \\ n_j \equiv l_j \pmod{k_j} \\ j=1,2}} 1.$$

Wir fragen nach einer asymptotischen Entwicklung von $\sum_{1 \leq n \leq x} g(n)$.

Zu der erzeugenden Funktion von $g(n)$ gelangen wir folgendermaßen. Mit

$$\zeta(s, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+w)^{-s}, \quad 0 < w \leq 1, \quad \sigma > 1,$$

setzen wir

$$Z(s) = \zeta\left(s, \frac{l_1}{k_1}\right) \zeta\left(s, \frac{l_2}{k_2}\right).$$

Dann folgt für $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} Z(s) &= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_2=0}^{\infty} \left(v_1 + \frac{l_1}{k_1}\right)^{-s} \left(v_2 + \frac{l_2}{k_2}\right)^{-s} = \\ &= \sum_{\substack{n_j=1 \\ n_j \equiv l_j \pmod{k_j} \\ j=1,2}}^{\infty} \left(\frac{n_1}{k_1} \frac{n_2}{k_2}\right)^{-s} = (k_1 k_2)^s \sum_{n=1}^{\infty} g(n) n^{-s}. \end{aligned}$$

Nun lassen sich unsere Sätze allerdings nicht unmittelbar auf $Z(s)$ anwenden. Daher setzen wir weiter für reelle h und w

$$Z_{\eta}(s, w, h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sign}^{\eta}(n+w) e^{2\pi i h n} |n+w|^{-s}, \quad \eta=0,1,$$

$$\text{sign } \xi = \frac{\xi}{|\xi|} \quad \text{für } \xi \neq 0, \quad \sigma > 1,$$

wobei der Akzent am Summenzeichen das Auftreten von $n+w=0$ verbieten soll. Dann ist offenbar für $0 < w \leq 1$

$$\zeta(s, w) = \frac{1}{2} \{Z_0(s, w, 0) + Z_1(s, w, 0)\},$$

und mit den Abkürzungen

$$Z^{(\eta_1, \eta_2)}(s, w_1, h_1, w_2, h_2) = Z_{\eta_1}(s, w_1, h_1) Z_{\eta_2}(s, w_2, h_2), \quad \eta_j=0,1, \quad j=1,2,$$

ergibt sich

$$(47) \quad Z(s) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{0 \leq \eta_j \leq 1 \\ j=1,2}} Z^{(\eta_1, \eta_2)}\left(s, \frac{l_1}{k_1}, 0, \frac{l_2}{k_2}, 0\right).$$

Auf jede dieser vier Funktionen $Z^{(\eta_1, \eta_2)}(s)$ ist der Satz 1 nun aber anwendbar. Bekanntlich ([16], S. 237) befolgen die Funktionen $Z_{\eta}(s, w, h)$ die Funktionalgleichung

$$Z_{\eta}(s, w, h) = i^{\eta} e^{-2\pi i w h} \pi^{-\frac{1}{2}+s} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\eta-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta+s}{2}\right)} Z_{\eta}(1-s, h, -w), \quad \eta=0,1,$$

woraus

$$(48) \quad Z^{(\eta_1, \eta_2)}(s, w_1, h_1, w_2, h_2) = i^{\eta_1 + \eta_2} e^{-2\pi i(w_1 h_1 + w_2 h_2)} \pi^{-1} \Gamma(2s) \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{1 + \eta_1 - s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + \eta_2 - s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta_1 + s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta_2 + s}{2}\right)} Z^{(\eta_1, \eta_2)}(1 - s, h_1, -w_1, h_2, -w_2)$$

$\eta_j = 0, 1, j = 1, 2$, folgt.

Wir setzen nun für jedes der vier Paare (η_1, η_2)

$$\Omega(s) = (k_1 k_2)^{-s} Z^{(\eta_1, \eta_2)}\left(s, \frac{l_1}{k_1}, 0, \frac{l_2}{k_2}, 0\right)$$

und

$$\Omega_1(s) = \frac{i^{\eta_1 + \eta_2}}{\pi} Z^{(\eta_1, \eta_2)}\left(s, 0, -\frac{l_1}{k_1}, 0, -\frac{l_2}{k_2}\right),$$

wobei für $\sigma > 1$

$$\Omega(s) = (k_1 k_2)^{-s} \sum'_{v_1 = -\infty}^{\infty} \sum'_{v_2 = -\infty}^{\infty} \text{sign}^{\eta_1}\left(v_1 + \frac{l_1}{k_1}\right) \text{sign}^{\eta_2}\left(v_2 + \frac{l_2}{k_2}\right) \times \\ \times \left|v_1 + \frac{l_1}{k_1}\right|^{-s} \left|v_2 + \frac{l_2}{k_2}\right|^{-s} = \sum'_{\substack{n_j = -\infty \\ n_j \equiv l_j \pmod{k_j} \\ j=1, 2}}^{\infty} \text{sign}^{\eta_1} n_1 \text{sign}^{\eta_2} n_2 |n_1 n_2|^{-s} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(\eta_1, \eta_2)}(n) n^{-s},$$

$$f^{(\eta_1, \eta_2)}(n) = \sum_{\substack{|n_1 n_2| = n, n_j \geq 0 \\ n_j \equiv l_j \pmod{k_j} \\ j=1, 2}} \text{sign}^{\eta_1} n_1 \text{sign}^{\eta_2} n_2$$

und

$$\Omega_1(s) = \frac{i^{\eta_1 + \eta_2}}{\pi} \sum'_{n_1 = -\infty}^{\infty} \sum'_{n_2 = -\infty}^{\infty} \text{sign}^{\eta_1} n_1 \text{sign}^{\eta_2} n_2 e^{-2\pi i\left(\frac{l_1}{k_1} n_1 + \frac{l_2}{k_2} n_2\right)} (n_1 n_2)^{-s} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} f_1^{(\eta_1, \eta_2)}(n) n^{-s},$$

$$f_1^{(\eta_1, \eta_2)}(n) = \frac{i^{\eta_1 + \eta_2}}{\pi} \sum_{\substack{|n_1 n_2| = n, n_j \geq 0 \\ j=1, 2}} \text{sign}^{\eta_1} n_1 \text{sign}^{\eta_2} n_2 e^{-2\pi i\left(\frac{l_1}{k_1} n_1 + \frac{l_2}{k_2} n_2\right)}$$

Nach (48) besteht die Funktionalgleichung

$$\Omega(s) = \left(\frac{\pi^2}{k_1 k_2} \right)^s \frac{\Gamma\left(\frac{1+\eta_1-s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\eta_2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\eta_1+s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\eta_2+s}{2}\right)} \Omega_1(1-s).$$

$\Omega(s)$ kann identisch verschwinden (z. B. für $l_j = k_j, \eta_j = 1, j=1,2$).
Sonst erfüllt $\Omega(s)$ aber wegen

$$f^{(\eta_1, \eta_2)}(n) = O(n^\varepsilon)$$

die Voraussetzung I, da die Abszisse E bekanntlich (vgl. [16], S. 237) für jedes $Z_\eta(s)$ und somit auch für $\Omega(s) - \infty$ ist. II ist mit

$$\gamma = 1,$$

III mit

$$C = \frac{\pi^2}{k_1 k_2}, \quad \vartheta = 1, \quad \theta = 0,$$

IV mit

$$M=2, \quad \beta_1 = \frac{1+\eta_1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1+\eta_2}{2}, \quad \delta_1 = \frac{\eta_1}{2}, \quad \delta_2 = \frac{\eta_2}{2}, \quad b_1 = b_2 = d_1 = d_2 = \frac{1}{2}$$

und V wegen

$$f_1^{(\eta_1, \eta_2)}(n) = O(n^\varepsilon)$$

erfüllt.

Die Parameter aus (2) und (3) werden daher — unabhängig von η_1 und η_2 —

$$q=2, \quad \lambda=1, \quad \nu = -2 \log 2, \quad \rho = \frac{4 \pi^2}{k_1 k_2}.$$

Nun können wir Satz 1 mit $\alpha = \alpha_1 = 0, \bar{\alpha}_1 = 1$ anwenden. Wir bekommen für $x=0$ bei $x \rightarrow \infty$ für jede natürliche Zahl N gleichmäßig in N

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq x} f^{(\eta_1, \eta_2)}(n) &= \sum_{0 < \sigma \leq 1} \operatorname{Res} \frac{x^\sigma}{s} (k_1 k_2)^{-s} Z^{(\eta_1, \eta_2)} \left(s, \frac{l_1}{k_1}, 0, \frac{l_2}{k_2}, 0 \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{k_1 k_2} \right)^{1/4} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{f_1^{(\eta_1, \eta_2)}(n)}{n^{3/4}} \cos \left(4\pi \sqrt{\frac{xn}{k_1 k_2}} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} (\eta_1 + \eta_2) \right) + \\ &+ O(x^{1/5} N^{1/5+\varepsilon}) + O(x^{1/2+\varepsilon} N^{-1/2+\varepsilon}), \end{aligned}$$

und dies bleibt ersichtlich auch für den Fall $\Omega(s) \equiv 0$ richtig.

Jetzt gehen wir gemäß (47) zu $g(n)$ über, wobei in der Residuensumme $Z(s)$ an Stelle von $Z^{(\eta_1, \eta_2)}(s)$ tritt. Wir bekommen

$$g(n) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{0 \leq \eta_j \leq 1 \\ j=1,2}} f^{(\eta_1, \eta_2)}(n).$$

Und der Term mit der trigonometrischen Summe läßt sich bei Beachtung von

$$\sum_{\substack{0 \leq \eta_j \leq 1 \\ j=1,2}} i^{\eta_1 + \eta_2} \operatorname{sign}^{\eta_1} n_1 \operatorname{sign}^{\eta_2} n_2 \cos \left(4\pi \sqrt{\frac{xn}{k_1 k_2}} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} (\eta_1 + \eta_2) \right) =$$

$$= \begin{cases} 2 e^{4\pi i \sqrt{\frac{xn}{k_1 k_2}} - \frac{\pi i}{4}} & \text{für } n_1 > 0, n_2 > 0 \\ 2 e^{-4\pi i \sqrt{\frac{xn}{k_1 k_2}} + \frac{\pi i}{4}} & \text{für } n_1 < 0, n_2 < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zu

$$\frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left(\frac{x}{k_1 k_2} \right)^{1/4} \operatorname{Re} e^{-\frac{\pi i}{4}} \sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n^{3/4}} \sum_{\substack{n_1 n_2 = n \\ n_j > 0, j=1,2}} e^{2\pi i \left(\sqrt{\frac{4xn}{k_1 k_2}} - \frac{l_1}{k_1} n_1 - \frac{l_2}{k_2} n_2 \right)}$$

vereinfachen. Somit erhalten wir

$$\sum_{1 \leq n \leq x} g(n) = \sum_{0 < \sigma \leq 1} \operatorname{Res} \frac{\left(\frac{x}{k_1 k_2} \right)^s}{s} Z(s) +$$

$$+ \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left(\frac{x}{k_1 k_2} \right)^{1/4} \operatorname{Re} e^{-\frac{\pi i}{4}} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq N} \frac{e^{2\pi i \left(\sqrt{\frac{4x}{k_1 k_2}} n_1 n_2 - \frac{l_1}{k_1} n_1 - \frac{l_2}{k_2} n_2 \right)}}{(n_1 n_2)^{3/4}} +$$

$$+ O(x^{1/5} N^{1/5+\epsilon}) + O(x^{1/2+\epsilon} N^{-1/2+\epsilon}).$$

Zur Bestimmung der Residuensumme bemerken wir, daß die Hurwitzsche Zetafunktion $\zeta(s, w)$ bekanntlich mit Ausnahme eines Poles bei $s=1$, wo die Entwicklung

$$(49) \quad \zeta(s, w) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + \dots$$

(vgl. [20], S. 106) besteht, in der ganzen Ebene regulär ist. Daher ergibt sich

$$\sum_{0 < \sigma \leq 1} \operatorname{Res} \frac{\left(\frac{x}{k_1 k_2}\right)^s}{s} Z(s) = \frac{x}{k_1 k_2} \log \frac{x}{k_1 k_2} - \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{l_1}{k_1} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{l_2}{k_2} \right) + 1 \right) \frac{x}{k_1 k_2}.$$

Die auftretende Exponentialsumme ist von der Gestalt

$$\sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq N} \frac{e^{2\pi i \left(\sqrt{\frac{4x}{k_1 k_2}} n_1 n_2 - \frac{l_1}{k_1} n_1 - \frac{l_2}{k_2} n_2 \right)}}{(n_1 n_2)^{3/4}} = \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq N} \frac{e^{2\pi i f(n_1, n_2)}}{(n_1 n_2)^{3/4}} = S(u, N),$$

wo

$$f(n_1, n_2) = \sqrt{u n_1 n_2} + \psi_1 n_1 + \psi_2 n_2, \quad u = \frac{4x}{k_1 k_2}, \quad \psi_j = -\frac{l_j}{k_j}, \quad j=1, 2.$$

Für eine früher ([28], (88)) bei $\psi_1 = \psi_2 = 0$ angegebene Abschätzung

$$(50) \quad S(u, U) = O(u^{1/36} U^{5/36} \log^{10/9} u) \quad \text{für} \quad U = u^{8/23} \log^{32/23} u$$

sind in Wahrheit die Werte von ψ_1 und ψ_2 belanglos. Dort wurde nämlich ([28], S. 208–209 und S. 217) die Abschätzung der in Rede stehenden Summe auf eine solche mit einer Funktion $F(n_1, n_2)$ an Stelle von $f(n_1, n_2)$ zurückgespielt, und jene Vorschrift ([27], (34) und Hilfssatz 8) ordnet $f(n_1, n_2)$ für jedes Paar (ψ_1, ψ_2) dasselbe $F(n_1, n_2)$ zu. Daher gilt (50) auch in unserem jetzigen Falle, und mit der Wahl von $N = [U]$ ergibt sich hiermit der

SATZ 6: Es seien l_j, k_j natürliche Zahlen mit $1 \leq l_j \leq k_j$, $j=1, 2$. Dann gilt bei $x \rightarrow \infty$

$$D(x; k_1, l_1, k_2, l_2) = \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq x \\ n_j \equiv l_j \pmod{k_j} \\ j=1, 2}} 1 = \frac{x}{k_1 k_2} \log \frac{x}{k_1 k_2} - \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{l_1}{k_1} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{l_2}{k_2} \right) + 1 \right) \frac{x}{k_1 k_2} + O(x^{15/46 + \varepsilon}).$$

Durch diesen Satz wird ein früheres Ergebnis ([27]), das allerdings auch noch gleichmäßig in den k_j gilt, verbessert.

10. Obwohl Satz 6 nur aus einer sehr speziellen Anwendung des Satzes 1 entstanden ist, läßt sich aus ihm, wie es im folgenden geschehen soll, noch eine Reihe bereits in der Literatur behandelter Probleme ableiten.

Zum Dirichletschen Teilerproblem ist in Satz 6 $l_j = k_j = 1$, also $-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{l_j}{k_j}\right) = C$, wo C , wie auch im weiteren stets, die Eulersche Konstante bezeichnet, $j=1, 2$, zu wählen. Dann folgt, $d(n)$ gleich der Anzahl der positiven Teiler von n gesetzt,

$$(51) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + (2C - 1)x + O(x^{15/46 + \epsilon})$$

(vgl. [28]⁵⁾).

Zum Kreisproblem gelangt man von Satz 6 folgendermaßen. Bekanntlich (vgl. [19], Satz 163) ist

$$r(n) = \sum_{u^2 + v^2 = n} 1 = 4 \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1 \pmod{2}}} (-1)^{\frac{d-1}{2}}.$$

Berücksichtigt man

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right) = \pi,$$

so folgt daher mit Satz 6

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq u^2 - v^2 \leq x} 1 &= 1 + \sum_{1 \leq n \leq x} r(n) = 1 + 4 \sum_{1 \leq n \leq x} \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1 \pmod{2}}} (-1)^{\frac{d-1}{2}} = \\ &= 1 + 4 \{D(x; 4, 1, 1, 1) - D(x; 4, 3, 1, 1)\} = \\ &= \pi x + O(x^{15/46 + \epsilon}). \end{aligned}$$

Hier ist jedoch für das Fehlerglied durch Hua ([13]) $O(x^{15/46} \log^{9/4} x)$ bekannt.

Eine direkte Verallgemeinerung dieser letzten Aussage liefert der

SATZ 7: α durchlaufe die ganzen Ideale eines quadratischen Zahlkörpers K der Diskriminante $d \neq 1$. Dann gilt

$$\sum_{1 \leq N\alpha \leq x} 1 = L_d(1) x + O(x^{15/46 + \epsilon}),$$

wo $L_d(s)$ die zum Körper gehörige Dirichletsche L -Reihe bezeichnet. D. h. die Reihe von $\zeta_K(s) - L_d(1) \zeta(s)$ konvergiert für $\sigma > 15/46$.

⁵⁾ Ich benutze die Gelegenheit, bei diesem Resultat auf die Priorität von Tsungtao Chih ([4]) hinzuweisen. Dort wird (im Gegensatz zu [28]) der bekannte Umweg über die ersten Riesz'schen Mittel beschritten, und das Fehlerglied lautet sogar $O(x^{15/46} \log^{10/9} x)$. Loo-Keng Hua machte mich freundlicherweise auf diese Arbeit, die bisher auch nicht in den *Math. Reviews*, *Zentralblatt f. Math.* und *PJK MoW.* besprochen wurde, aufmerksam.

In diesem Satz war bisher mit Ausnahme des Gaußschen Körpers ([13]) als beste Abschätzung $O(x^{2/3})$ durch Walfisz ([35]) bekannt (wegen einer gleichmäßig in d geltenden Abschätzung vgl. [27], S. 471).

Beweis: Vorweg beweisen wir den auch für die weitere Bestimmung der Hauptglieder in unseren Entwicklungen nützlichen

HILFSSATZ 12: *Es sei k eine natürliche Zahl, χ ein Nicht-Hauptcharakter modulo k und $L(s, \chi)$ die zugehörige Dirichletsche L -Reihe. Dann ist*

$$L(1, \chi) = -\frac{1}{k} \sum_{1 \leq \nu \leq k} \chi(\nu) \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{\nu}{k} \right).$$

Beweis: Da für jede Dirichletsche L -Reihe

$$L(s, \chi) = k^{-s} \sum_{1 \leq \nu \leq k} \chi(\nu) \zeta \left(s, \frac{\nu}{k} \right)$$

(vgl. [19], Satz 368) gilt, besteht nach (49) bei $s = 1$ die Entwicklung

$$L(s, \chi) = \frac{1}{k} \sum_{1 \leq \nu \leq k} \chi(\nu) \left\{ \frac{1}{s-1} - \log k - \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{\nu}{k} \right) + \dots \right\},$$

und weil χ kein Hauptcharakter sein sollte, folgt hieraus die Behauptung.

Zum Beweise des Satzes 7 beachten wir

$$F(n) = \sum_{N\alpha = n} 1 = \sum_{t|n} \left(\frac{d}{t} \right), \quad d \neq 1,$$

(vgl. [9], Satz 148), und da Hilfssatz 12 wegen $d \neq 1$ für die zu K gehörige Reihe $L_d(s)$ ⁶⁾

$$L_d(1) = -\frac{1}{|d|} \sum_{1 \leq \nu \leq |d|} \left(\frac{d}{\nu} \right) \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{\nu}{|d|} \right)$$

liefert, erhalten wir aus Satz 6

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq N\alpha \leq x} 1 &= \sum_{1 \leq n \leq x} \sum_{t|n} \left(\frac{d}{t} \right) = \sum_{1 \leq \nu \leq |d|} \left(\frac{d}{\nu} \right) D(x; |d|, \nu, 1, 1) = \\ &= L_d(1) x + O(x^{15/16 + \epsilon}). \end{aligned}$$

⁶⁾ Vgl. [19 a], S. 28.

Eine weitere Folgerung des Satzes 6 ist der

SATZ 8: Es seien k_1 und k_2 zwei natürliche Zahlen, χ_1, χ_2 zwei Charaktere modulo k_1 bzw. k_2 und $L(s, \chi_j)$ $j=1, 2$, die zugehörigen Dirichlet'schen L -Reihen.

Wir setzen

$$L(s, \chi_1) L(s, \chi_2) = \sum_{n=1}^{\infty} X(n) n^{-s},$$

also

$$X(n) = \sum_{d|n} \chi_1(d) \chi_2\left(\frac{n}{d}\right).$$

Dann gilt

$$\sum_{1 \leq n \leq x} X(n) = O(x^{15/46 + \varepsilon}),$$

falls χ_1 und χ_2 beide Nicht-Hauptcharaktere sind, d. h. dann konvergiert die Reihe von $L(s, \chi_1) L(s, \chi_2)$ für $\sigma > 15/46$;

$$\sum_{1 \leq n \leq x} X(n) = \frac{\varphi(k_1)}{k_1} L(1, \chi_2) x + O(x^{15/46 + \varepsilon}),$$

falls genau einer von beiden, nämlich χ_1 , Hauptcharakter ist; und

$$\sum_{1 \leq n \leq x} X(n) = \frac{\varphi(k_1) \varphi(k_2)}{k_1 k_2} \{x \log x + (\rho(k_1) + \rho(k_2) + 2C - 1)x\} + O(x^{15/46 + \varepsilon}),$$

falls χ_1 und χ_2 beide Hauptcharaktere sind, und wo

$$(52) \quad \rho(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k=1 \\ \sum_{p|k} \frac{\log p}{p-1} & \text{für } k>1. \end{cases}$$

Nach Landau ([16], S. 243, $k=2$) ist dieser Satz mit den Fehlergliedern $O(x^{1/8} \log x)$ bekannt.

Beweis: Mit Satz 6 erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq x} X(n) &= \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} \chi_1(n_1) \chi_2(n_2) = \sum_{1 \leq l_1 \leq k_1} \sum_{1 \leq l_2 \leq k_2} \chi_1(l_1) \chi_2(l_2) \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq x \\ n_j \equiv l_j \pmod{k_j} \\ j=1, 2}} 1 = \\ &= \sum_{1 \leq l_1 \leq k_1} \sum_{1 \leq l_2 \leq k_2} \chi_1(l_1) \chi_2(l_2) D(x; k_1, l_1, k_2, l_2) = \\ &= \sum_{1 \leq l_1 \leq k_1} \sum_{1 \leq l_2 \leq k_2} \chi_1(l_1) \chi_2(l_2) \left\{ \frac{x}{k_1 k_2} \log \frac{x}{k_1 k_2} - \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{l_1}{k_1} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{l_2}{k_2} \right) + 1 \right) \frac{x}{k_1 k_2} \right\} + \\ &\quad + O(x^{15/46 + \varepsilon}), \end{aligned}$$

und hieraus folgen bei Beachtung von $\sum_{1 \leq l \leq k} \chi(l) = 0$ für einen Nicht-, $= \varphi(k)$ für einen Hauptcharakter modulo k und Hilfssatz 12 unmittelbar unsere beiden ersten Behauptungen.

Zum Beweise der dritten Behauptung zeigen wir zunächst

$$-\sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} \log d = \frac{\varphi(k)}{k} \rho(k).$$

Für $k=1$ ist dies offenbar richtig. Ist die Identität für k bereits bewiesen, so folgt mit einer Primzahl p , $(p, k)=1$ und $m \geq 1$ wegen

$$\begin{aligned} \sum_{d|k} \frac{\mu(d)}{d} &= \frac{\varphi(k)}{k} - \sum_{d|kp^m} \frac{\mu(d)}{d} \log d = - \sum_{d|k} \sum_{0 \leq v \leq 1} \frac{\mu(dp^v)}{dp^v} \log(dp^v) = \\ &= - \sum_{d|k} \left(\frac{\mu(d)}{d} \log d - \frac{\mu(d)}{dp} (\log d + \log p) \right) = \frac{\varphi(k)}{k} \left(\rho(k) - \frac{1}{p} \rho(k) + \frac{\log p}{p} \right) = \\ &= \frac{\varphi(kp^m)}{kp^m} \left(\rho(k) + \frac{\log p}{p-1} \right) = \frac{\varphi(kp^m)}{kp^m} \rho(kp^m), \end{aligned}$$

d. h. die Richtigkeit für kp^m .

Nun erhalten wir den dritten Fall unseres Satzes wegen

$$\sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq x \\ (n_j, k_j) = 1 \\ j=1,2}} 1 = \sum_{d_1|k_1} \sum_{d_2|k_2} \mu(d_1) \mu(d_2) \sum_{1 \leq n \leq x/d_1 d_2} d(n)$$

(vgl. [29], Lemma 13) mit (51)

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq x} X(n) &= \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq x \\ (n_j, k_j) = 1, j=1,2}} 1 = \sum_{d_1|k_1} \sum_{d_2|k_2} \mu(d_1) \mu(d_2) \times \\ &\times \left\{ \frac{x}{d_1 d_2} (\log x - \log d_1 - \log d_2) + (2C-1) \frac{x}{d_1 d_2} \right\} + O(x^{15/46+\varepsilon}) = \\ &= \frac{\varphi(k_1) \varphi(k_2)}{k_1 k_2} \{x \log x + (\rho(k_1) + \rho(k_2) + 2C-1)x\} + O(x^{15/46+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Die nachstehende Folgerung bezüglich einer Vermutung von Ramanujan ([24]) übertrifft ein Resultat von Walfisz ([35]).

SATZ 9: Es seien l und k zwei natürliche Zahlen, $(l, k) = 1$ und $\rho(k)$ die durch (52) eingeführte Funktion. Dann gilt

$$\sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \equiv l \pmod{k}}} d(n) = \frac{\varphi(k)}{k^2} x \log x + \frac{\varphi(k)}{k^2} (2\rho(k) + 2C - 1)x + O(x^{15/46+\epsilon}).$$

Beweis: Für jeden der $\varphi(k)$ Charaktere χ modulo k setzen wir

$$A(x, \chi) = \sum_{1 \leq n \leq x} \chi(n) d(n).$$

Dann ergibt Satz 8, dort $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, $k_1 = k_2 = k$, also $X(n) = \chi(n) d(n)$ gesetzt,

$$(53) \quad A(x, \chi) = \begin{cases} O(x^{15/46+\epsilon}), & \text{falls } \chi \text{ Nicht-Hauptcharakter mod } k, \\ \frac{\varphi^2(k)}{k^2} (x \log x + (2\rho(k) + 2C - 1)x) + O(x^{15/46+\epsilon}), & \\ \text{falls } \chi \text{ Hauptcharakter mod } k. \end{cases}$$

Nun ist wegen $(l, k) = 1$

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_x \bar{\chi}(l) A(x, \chi) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{1 \leq v \leq k} \left(\sum_x \bar{\chi}(l) \chi(v) \right) \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \equiv v \pmod{k}}} d(n) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \equiv l \pmod{k}}} d(n),$$

und hieraus folgt mit (53) unsere Behauptung.

Als letztes Beispiel betrachten wir nach Hecke ([10]) die Eisensteinischen Reihen der Dimension $-k$ und der Stufe N

$$(54) \quad G_k(\tau; a_1, a_2, N) = \sum_{\substack{m_j = -\infty \\ m_j \equiv a_j \pmod{N} \\ j=1,2, (m_1, m_2) \neq (0,0)}}^{\infty} (m_1 \tau + m_2)^{-k}, \quad k, N, a_1, a_2 \text{ ganz, } N \geq 1.$$

Eine unmittelbare Anwendungsmöglichkeit unserer Ergebnisse bietet sich im Falle, daß diese Reihen die Teilwerte der Weierstraßschen ζ -Funktion darstellen, d. h. für $k=1$, wo unter $G_1(\tau; a_1, a_2, N)$ der Wert der von s analytischen Funktion

$$\sum_{\substack{m_j = -\infty \\ m_j \equiv a_j \pmod{N} \\ j=1,2, (m_1, m_2) \neq (0,0)}}^{\infty} (m_1 \tau + m_2)^{-1} |m_1 \tau + m_2|^{-s}$$

an der Stelle $s=0$ verstanden wird. $G_1(\tau; a_1, a_2, N)$ besitzt eine Fourierreihenentwicklung der Gestalt

$$(55) \quad G_1(\tau; a_1, a_2, N) = C(a_1, a_2, N) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a_1, a_2, N) e^{2\pi i n \tau / N}$$

mit

$$g_n(a_1, a_2, N) = -\frac{2\pi i}{N} \sum_{\substack{n_1 n_2 = n \\ n_1 \equiv a_1 \pmod{N} \\ n_j \geq 0, j=1,2}} \text{sign } n_2 e^{2\pi i n_2 a_2 / N} =$$

$$= g_n^{(+)}(a_1, a_2, N) - g_n^{(-)}(a_1, a_2, N),$$

$$g_n^{(\pm)}(a_1, a_2, N) = -\frac{2\pi i}{N} \sum_{\substack{n_1 n_2 = n \\ n_1 \equiv \pm a_1 \pmod{N}}} e^{2\pi i n_2 a_2 / N}$$

(vgl. [10], S. 213), und wir fragen nach einer asymptotischen Entwicklung von $\sum_{1 \leq n \leq x} g_n(a_1, a_2, N)$.

Wegen

$$G_1(\tau; a_1, a_2, N) = G_1(\tau; b_1, b_2, N) \quad \text{für } a_j \equiv b_j \pmod{N}, j=1,2,$$

dürfen wir $1 \leq a_j \leq N$, $j=1,2$, und mit Rücksicht auf den in Satz 6 bereits behandelten Fall sogar

$$1 \leq a_1 \leq N, \quad 1 \leq a_2 < N$$

annehmen.

Setzen wir

$$l = \begin{cases} a_1 & \text{bei } g_n^{(+)}, \\ N - a_1 + N \left[\frac{a_1}{N} \right] & \text{bei } g_n^{(-)}, \end{cases}$$

so erhalten wir mit Satz 6

$$\sum_{1 \leq n \leq x} g_n^{(\pm)}(a_1, a_2, N) = -\frac{2\pi i}{N} \sum_{1 \leq v \leq N} e^{\pm 2\pi i v \frac{a_2}{N}} D(x; N, l, N, v) =$$

$$= -\frac{2\pi i}{N} \sum_{1 \leq v \leq N} e^{\pm 2\pi i v \frac{a_2}{N}} \left\{ \frac{x}{N^2} \log \frac{x}{N^2} - \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{l}{N} \right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{v}{N} \right) + 1 \right) \frac{x}{N^2} \right\} +$$

$$+ O(x^{5/6+\varepsilon}),$$

und hieraus folgt der

SATZ 10: Es seien a_1, a_2, N natürliche Zahlen⁷⁾, $1 \leq a_1 \leq N$, $1 \leq a_2 < N$ und

$$A(a_2, N) = -\frac{4\pi}{N^2} \sum_{1 \leq v \leq N} \sin\left(2\pi v \frac{a_2^2}{N}\right) \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{v}{N}\right).$$

Dann gilt in der Bezeichnungsweise von (55) und (54) bei $x \rightarrow \infty$

$$\sum_{1 \leq n \leq x} g_n(a_1, a_2, N) = A(a_2, N) x + O(x^{15/16+\varepsilon}).$$

11. Jetzt sollen die Sätze des ersten Teiles noch auf einige Summierbarkeitsfragen angewendet werden. Wir erinnern zunächst an einige Bezeichnungen.

Zu der Dirichletschen Reihe

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

setzen wir für jede reelle Konstante $\kappa \geq 0$

$$C_\kappa(x) = \sum_{1 \leq n < x} \frac{a_n}{n^\kappa} \log^\kappa \frac{x}{n}, \quad D_\kappa(x) = \sum_{1 \leq n < x} \frac{a_n}{n^\kappa} (x-n)^\kappa.$$

Falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C_\kappa(x)}{\log^\kappa(x)} = c \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D_\kappa(x)}{x^\kappa} = c$$

existiert und endlich ist, so heißt die Reihe an der Stelle s (nach Riesz'schen Mitteln erster bzw. zweiter Art zum Werte c) $(R, \log n, \kappa)$ – bzw. (R, n, κ) – summierbar ([8], S. 21–22). Für $\kappa = 0$ handelt es sich offenbar um gewöhnliche Konvergenz. Ist eine Dirichletsche Reihe (bei festem κ) im Punkte $s' = \sigma' + it'$ $(R, \log n, \kappa)$ – bzw. (R, n, κ) – summierbar, so ist sie es auch für jedes $\sigma > \sigma'$ ([8], Theorem 25 bzw. Theorem 29). Daher existiert zu jedem reellen $\kappa \geq 0$ eine Abszisse σ_κ der $(R, \log n, \kappa)$ – und der (R, n, κ) – Summierbarkeit – beide stimmen überein ([8], Theorem 30) – definiert durch

$\sigma_\kappa = \sigma_\kappa(Z) = \underline{\text{fin}} \xi$, für die $Z(s)$ für $\sigma \geq \xi$ $(R, \log n, \kappa)$ – bzw. (R, n, κ) – summierbar ist,

und die Reihe ist dann für kein $\sigma < \sigma_\kappa$ $(R, \log n, \kappa)$ – bzw. (R, n, κ) – summierbar ([8], Theorem 26).

⁷⁾ Es genügt übrigens $N > 2$ vorauszusetzen, da anderenfalls $G_1(\tau; a_1, a_2, N)$ und damit auch $A(a_2, N)$ identisch verschwindet.

Die Summierbarkeitsabszissen σ_x bestimmen sich in einfacher Weise aus den Koeffizienten der Reihe. Es gelten nämlich für jedes reelle $x \geq 1$, falls nur $\sigma_x > 0$ ist ([8], Theorem 31),

$$(56) \quad \begin{array}{l} \text{und} \\ \text{wo} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \underline{\text{fin}} \xi \quad \text{mit} \quad A_x(x) = O(x^\xi) \\ \underline{\sigma}_x = \underline{\text{fin}} \xi \quad \text{mit} \quad B_x(x) = O(x^\xi), \\ A_x(x) = \sum_{1 \leq n < x} a_n \log^x \frac{x}{n}, \quad B_x(x) = x^{-x} \sum_{1 \leq n < x} a_n (x-n)^x. \end{array} \right.$$

HILFSSATZ 13: Für $\sigma > E(Z)$ ist die Carlsonsche Funktion $\mu_2(\sigma) = \mu_2(\sigma, Z)$ definiert durch

$$\mu_2(\sigma) = \underline{\text{fin}} \xi \quad \text{mit} \quad \frac{1}{T} \int_{-T}^T |Z(\sigma + it)|^2 dt = O(T^\xi), \quad T \geq T_0(\sigma, Z).$$

$\mu_2(\sigma)$ ist konvex, stetig, nicht negativ und monoton fallend. Es gelten

$$(57) \quad 0 \leq \mu_2(\sigma) < \infty \quad \text{für } \sigma > E$$

und für jedes $x \geq 0$

$$\mu_2(\sigma) \leq 2x + 1 \quad \text{für } \sigma > \sigma_k(Z).$$

Beweis: Vgl. [30], Hilfssatz 2 und [6], Satz 4.

HILFSSATZ 14: $Z(s)$ erfülle die Voraussetzungen I bis V. Dann existieren für jedes endliche σ die Carlsonschen Funktionen $\mu_2(\sigma, Z)$ und $\mu_2(\sigma, Z_1)$ und sind durch die Funktionalgleichung

$$\mu_2(\sigma, Z) = 2(\lambda - q\sigma) + \mu_2(\gamma - \sigma, Z_1)$$

verbunden.

Beweis: Nach I und Hilfssatz 9 ist $E(Z) = E(Z_1) = -\infty$, so dass $\mu_2(\sigma, Z)$ und $\mu_2(\sigma, Z_1)$ wegen Hilfssatz 13 für jedes endliche σ existieren.

Weiter folgt aus I bis V mit Hilfssatz 8 nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{\substack{-T \\ |t| \geq T_0}}^T |Z(\sigma + it)|^2 dt &= O\left(\frac{1}{T} \int_{\substack{-T \\ |t| \geq T_0}}^T |t|^{2(\lambda - q\sigma)} |Z_1(\gamma - \sigma + it)|^2 dt\right) = \\ &= O(T^{2(\lambda - q\sigma) + \mu_2(\gamma - \sigma, Z_1) + \varepsilon}) + O(T^{-1}), \end{aligned}$$

d. h. wegen (57)

$$\mu_2(\sigma, Z) \leq \text{Max}(2(\lambda - q\sigma) + \mu_2(\gamma - \sigma, Z_1), -1) = 2(\lambda - q\sigma) + \mu_2(\gamma - \sigma, Z_1),$$

und wegen Hilfssatz 9 gilt ebenso

$$\mu_2(\gamma - \sigma, Z_1) \leq 2(\lambda^* - q(\gamma - \sigma)) + \mu_2(\sigma, Z) = -2(\lambda - q\sigma) + \mu_2(\sigma, Z).$$

Aus den Hilfssätzen 13 und 14 können wir jetzt das folgende Ω -Resultat herleiten:

SATZ 11: $Z(s)$ erfülle die Voraussetzungen I bis V. Dann gelten für jedes $\kappa \geq 0$.

$$(58) \quad \sigma_\kappa(Z) \geq \frac{\lambda - \kappa - 1/2}{q}$$

und

$$\sigma_\kappa(Z_1) \geq \gamma - \frac{\lambda + \kappa + 1/2}{q}.$$

Beweis: Sei $\kappa \geq 0$ und $\sigma > \sigma_\kappa(Z)$. Dann folgt aus den Hilfssätzen 13 und 14

$$2\kappa + 1 \geq \mu_2(\sigma) \geq 2(\lambda - q\sigma),$$

woraus sich (58) ergibt. Mittels Hilfssatz 9 folgt hieraus die zweite Behauptung.

12. Eine genaue Bestimmung der Abszissen σ_κ für $\kappa \geq \kappa_0$ mit einem gewissen κ_0 ergibt sich nun durch Kombination der Sätze 5 und 11. Wir beweisen den

SATZ 12: $Z(s)$ sei in der ganzen Ebene regulär und erfülle die Voraussetzungen I bis V mit $Z_1(s) = Z(s)$ und

$$(59) \quad \gamma \geq 0.$$

Dann gilt für jedes reelle x mit

$$(60) \quad \begin{aligned} x &\geq x_0 = q \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q} \right) \\ \sigma_x(Z) &= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q} - \frac{x}{q}, \end{aligned}$$

insbesondere also

$$(61) \quad \left. \begin{aligned} x^{-x} \sum_{1 \leq n < x} f(n) (x-n)^x \\ \sum_{1 \leq n < x} f(n) \log^x \frac{x}{n} \end{aligned} \right\} = \begin{cases} O(x^{\gamma/2 - 1/2q - x/q + \varepsilon}) \\ \Omega(x^{\gamma/2 - 1/2q - x/q - \varepsilon}) \end{cases} \quad \text{für } x_0 \leq x < \frac{\gamma q}{2} - \frac{1}{2}.$$

Beweis: Mit unseren Voraussetzungen sind diejenigen des Satzes 5 erfüllt, so daß wir wegen der Regularität von $Z(s)$ aus Satz 5

$$\sum_{1 \leq n < x} f(n) (x-n)^x = O(x^{x+\varepsilon}) + O(x^{x+\gamma/2 - 1/2q - x/q + \varepsilon})$$

erhalten, womit nach (56)

$$\sigma_x(Z) \leq \text{Max} \left(0, \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q} - \frac{x}{q} \right)$$

folgt. Ist nun $\sigma_x(Z) > 0$, so ergibt sich hieraus

$$\sigma_x(Z) \leq \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q} - \frac{x}{q}.$$

Die umgekehrte Ungleichung ergibt sich aus (58), wenn man beachtet, daß wegen $Z_1(s) = Z(s)$ nach Hilfssatz 9 $\lambda = \frac{q\gamma}{2}$ ist.

Aus (23) folgt wegen (59) und (1) $\sigma_0 > -1$, so daß wegen ([8], Theorem 48)

$$\sigma_0 \leq \sigma_x + x$$

sicher $\sigma_x(Z) > -\infty$ ist.

Wir setzen jetzt mit reellem c

$$\tilde{Z}(s) = Z(s-c).$$

Offenbar gelten

$$(62) \quad \sigma_x(\tilde{Z}) = \sigma_x(Z) + c$$

sowie

$$(63) \quad \bar{\sigma}_0(\tilde{Z}) = \bar{\sigma}_0(Z) + c, \quad \sigma^*(\tilde{Z}) = \sigma^*(Z) + c.$$

Wenn wir die zu $\tilde{Z}(s)$ gehörigen Parameter auch mit einer Tilde versehen, so sieht man, daß mit $Z(s)$ auch $\tilde{Z}(s)$ die Voraussetzungen I bis V erfüllt mit

$$\tilde{Z}(s) = Z(s-c) = C^{\vartheta}(s-c)^{\vartheta} G(s-c) Z(\gamma+c-s) = C^{\vartheta}(s-c)^{\vartheta} G(s-c) \tilde{Z}(\tilde{\gamma}-s),$$

wobei

$$(64) \quad \tilde{\gamma} = \gamma + 2c, \quad \tilde{q} = q.$$

Wenn wir $c > 0$ wählen, ist mit (64) auch (59) bei $\tilde{Z}(s)$ erfüllt. Da mit $Z(s)$ auch $\tilde{Z}(s)$ in der ganzen Ebene regulär ist, können wir jetzt c weiter so groß wählen, daß nach (62) – was wegen $\sigma_{\kappa}(Z) > -\infty$ sicher möglich ist – $\sigma_{\kappa}(\tilde{Z}) > 0$ ausfällt und damit nach dem bereits bewiesenen Teil unseres Satzes

$$\sigma_{\kappa}(\tilde{Z}) = \frac{\tilde{\gamma}}{2} - \frac{1}{2\tilde{q}} - \frac{\kappa}{\tilde{q}},$$

also

$$\sigma_{\kappa}(Z) = \sigma_{\kappa}(\tilde{Z}) - c = \frac{\gamma + 2c}{2} - \frac{1}{2q} - \frac{\kappa}{q} - c = \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q} - \frac{\kappa}{q}.$$

(61) folgt wegen (56) aus (60).

Für im allgemeinen größeres κ_0 kann man (60) nach einiger Rechnung aus den Landauschen Arbeiten ([16], (47), [17], [18]) entnehmen.

13. Abschließend wollen wir unsere Sätze noch auf einige Fragen bei Modulformen anwenden. Wir beweisen hier den

SATZ 13: $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi inz}{N}}$ sei eine ganze Spitzenform der Dimension $-r$ und der Stufe N , und die mit ihren Koeffizienten gebildete Dirichletsche Reihe $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ sei von der Signatur $\{l, r, g\}$ ([11]).

Dann gelten

$$(65) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\kappa}(Z) = \frac{r}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\kappa}{2} \quad \text{für } \kappa \geq \frac{1}{2}, \\ \text{also} \\ \left. \begin{array}{l} x^{-\kappa} \sum_{1 \leq n \leq x} a_n (x-n)^{\kappa} \\ \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \log^{\kappa} \frac{x}{n} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} O(x^{r/2-1/4-\kappa/2+\varepsilon}) \\ \Omega(x^{r/2-1/4-\kappa/2-\varepsilon}) \end{array} \right. \text{für } \frac{1}{2} \leq \kappa < r - \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

$$(66) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\kappa}(Z^2) = \frac{r}{2} - \frac{1}{8} - \frac{\kappa}{4} \quad \text{für } \kappa \geq \frac{3}{2}, \\ \text{also} \\ \left. \begin{array}{l} x^{-\kappa} \sum_{1 \leq mn \leq x} a_m a_n (x-mn)^{\kappa} \\ \sum_{1 \leq mn \leq x} a_m a_n \log^{\kappa} \frac{x}{mn} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} O(x^{r/2-1/8-\kappa/4+\varepsilon}) \\ \Omega(x^{r/2-1/8-\kappa/4-\varepsilon}) \end{array} \right. \text{für } \frac{3}{2} \leq \kappa < 2r - \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

und

$$\frac{r}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\kappa}{2} \leq \sigma_{\kappa}(Z) \leq \mu = \text{Min} \left\{ \frac{\sigma^*(Z) + r}{3} - \right. \\ \left. - \kappa \left(1 + \frac{2}{3} \sigma^*(Z) - \frac{r}{3} \right), \frac{r}{2} - \frac{1}{10} - \frac{4}{5} \kappa \right\} \quad \text{für } 0 \leq \kappa \leq \frac{1}{2}, \quad (r > 1),$$

also

$$(67) \left\{ \begin{array}{l} x^{-\kappa} \sum_{1 \leq n \leq x} a_n (x-n)^{\kappa} \\ \sum_{1 \leq n \leq x} a_n \log^{\kappa} \frac{x}{n} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} O(x^{\mu+\varepsilon}) \\ \Omega(x^{r/2-1/4-\kappa/2-\varepsilon}) \end{array} \right. \text{für } 0 \leq \kappa \leq \frac{1}{2}, \quad (r > 1).$$

Ferner sind

$$(68) \quad \bar{\sigma}_0(Z) \geq \sigma^*(Z) + \frac{1}{2}$$

und

$$(69) \quad \bar{\sigma}_0(Z) \geq r - \sigma^*(Z),$$

also stets

$$(70) \quad \bar{\sigma}_0(Z) \geq \frac{r}{2} + \frac{1}{4}.$$

Beweis: Da $Z(s)$ von der Signatur (l, r, g) und $F(z)$ Spitzenform ist, ist $Z(s)$ eine ganze Funktion mit $E(Z) = -\infty$ sowie $r > 0$. Weiter besteht die Funktionalgleichung

$$Z(s) = g \left(\frac{2\pi}{l} \right)^{2s-r} \frac{\Gamma(r-s)}{\Gamma(s)} Z(r-s)$$

([11], §§ 1 und 2). Hiernach erfüllt $Z(s)$ die Voraussetzungen I bis V mit

$$Z_1(s) = Z(s), \gamma = r, M = 1, d_1 = 1,$$

also nach (2)

$$(71) \quad q = 2.$$

Nach Rankin ([25]) gilt mit einer Konstanten $K (> 0)$

$$(72) \quad \sum_{1 \leq n \leq x} |a_n|^2 = Kx^r + O(x^{r-1/2}),$$

sowie

$$(73) \quad a_n = O(n^{r/2-1/2}),$$

also nach der Cauchyschen Ungleichung

$$\left(\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{|a_n|}{n^{r/2+1/2+\varepsilon}} \right)^2 \leq \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{|a_n|^2}{n^{r+\varepsilon}} \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} = O(1),$$

so daß in I die Wahl

$$(74) \quad \bar{\alpha} = \frac{r+1}{2}$$

zulässig ist.

Insgesamt erfüllt $Z(s)$ somit die Voraussetzungen des Satzes 12 mit $\alpha_0 = 1/2$, so daß wir (65) erhalten.

Offenbar erfüllt weiter mit $Z(s)$ auch $Z^2(s)$ mit denselben Werten $\gamma = r$ und $\bar{\alpha} = (r+1)/2$ sowie $q = 4$ an Stelle von (71), also $\alpha_0 = 3/2$ die Voraussetzungen des Satzes 12, so daß wir aus (60) und (61) auch (66) bekommen.

Da wegen $Z(s) = Z_1(s)$ nach Hilfssatz 9 hier

$$(75) \quad \lambda = \frac{q\gamma}{2} = r$$

ist, liefert Satz 11 mit (56) die unteren Abschätzungen in (67).

Für die Abschätzungen nach oben wollen wir zunächst Satz 4 anwenden. Für α dürfen wir $\sigma^*(Z)$ wählen, und $Z(s)$ ist ganz, also $F_\alpha(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon})$. Nach der im Anschluß an Satz 4 gemachten Bemerkung majorisiert jetzt, d. h. für $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 = 1/2$, der zweite O -Term in (43) den ersten nicht, so daß wir

$$x^{-\alpha} \sum_{1 \leq n \leq x} a_n (x-n)^\alpha = O(x^\varepsilon) + O\left(x^{\frac{\sigma^*+r}{3}-\alpha\left(1+\frac{2}{3}\sigma^*-\frac{r}{3}\right)+\varepsilon}\right) + O(x^{\sigma^*-\alpha+\varepsilon})$$

erhalten.

Nach (72) und (73) ist wegen $r > 1$

$$0 < \frac{r-1}{2} \leq \sigma^*(Z) \leq \frac{r}{2} - \frac{1}{5},$$

so daß das zweite O -Glied dominiert und mit (56) die eine Hälfte der oberen Abschätzungen in (67) bewiesen ist.

Für die noch zu beweisenden Aussagen in (67) kombinieren wir (65) mit dem folgenden Taubersatz. Für die Tauberbedingung wird dann (72) verwendet werden.

HILFSSATZ 15^{a)} Es sei

$$(76) \quad B_l(x) = O(x^\rho), \quad \rho \geq 0,$$

und

$$(77) \quad \sum_{n < v \leq n+t} a_v = O(t^\alpha n^\beta), \quad \alpha > 0, \text{ für } 0 < t = O\left(\frac{\rho-\beta}{n^{l+\alpha}}\right),$$

wo

$$(78) \quad \beta l + \alpha \geq 0, \quad \rho - \beta \leq l + \alpha.$$

Dann ist

$$B_\alpha(x) = O\left(x^{\frac{\beta(l-\alpha)+\rho(\alpha+\alpha)}{l+\alpha}}\right) \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq l.$$

Wir setzen $l=1/2$, so daß wegen (65) in (76) die Wahl $\rho=r/2+\varepsilon$ zulässig ist. Aus (72) folgt für $t=O(n^{3/5})$

$$\sum_{n < v \leq n+t} |a_v|^2 = O(tn^{r-1}) + O(n^{r-2/5}) = O(n^{r-2/5}),$$

^{a)} Vgl. [3], Theorem 1.82 (b) und die Bemerkung auf S. 24. Wir haben hier nur einen für unsere Zwecke hinreichenden Spezialfall jenes Satzes aufgeschrieben.

also mit der Cauchyschen Ungleichung

$$\left(\sum_{n < v \leq n+t} a_v\right)^2 = O\left(\sum_{n < v \leq n+t} 1 \sum_{n < v \leq n+t} |a_v|^2\right) = O(tn^{r-2/5}) \quad \text{für } 0 < t = O(n^{3/5}).$$

Daher ist (77) mit $\alpha = 1/2$ und $\beta = r/2 - 1/5$ und ebenfalls (78) erfüllt, und aus Hilfssatz 15 ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq x} a_n(x-n)^{\chi} &= O\left(x^{\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2} - \chi\right) + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{2} + \chi\right) + \varepsilon}\right) = \\ &= O\left(x^{\frac{r}{2} - \frac{1}{10} + \frac{\chi}{5} + \varepsilon}\right) \quad \text{für } 0 \leq \chi \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nach (56) ist damit auch die zweite Hälfte der oberen Abschätzungen in (67) bewiesen.

Weiter ergibt sich aus (24) mit den oben berechneten Daten (68), und für hinreichend großes x folgt mit (72)

$$\frac{K}{2} x^r \leq \sum_{1 \leq n \leq x} |a_n|^2 = O\left(x^{\sigma^* + \varepsilon} \sum_{1 \leq n \leq x} |a_n|\right) = O\left(x^{\sigma^* + \bar{\sigma}_0 + \varepsilon}\right),$$

also (69). Dabei haben wir $\sigma^* \geq 0$ angenommen, was aber wegen (63) keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Addition der beiden letzten Ungleichungen liefert endlich (70).

Beispielsweise gibt es für jedes geradzahlige $r = 12$ oder ≥ 16 Dirichletreihen, die mit $N = l = 1$, $g = (-1)^{r/2}$ die Voraussetzungen des Satzes 13 erfüllen ([11], § 5). Insbesondere ist dieser Satz auf die Diskriminante der elliptischen Funktionen

$$\Delta(z) = q \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - q^{\nu})^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n, \quad q = e^{2\pi iz}, \quad \text{Im } z > 0,$$

mit $r = 12$ anwendbar (vgl. [12], S. 80). Daher liefern (65) und (67) für die Ramanujansche Funktion $\tau(n)$

$$x^{-\kappa} \sum_{1 \leq n \leq x} \tau(n) (x-n)^{\kappa} \left. \vphantom{\sum} \right\} = \sum_{1 \leq n \leq x} \tau(n) \log^{\kappa} \frac{x}{n} = \begin{cases} O(x^{2\kappa/4 - \kappa/2 - \varepsilon}) & \text{für } 0 \leq \kappa < \frac{23}{2} \\ O(x^{2\kappa/4 - \kappa/2 + \varepsilon}) & \text{für } \frac{1}{2} \leq \kappa < \frac{23}{2} \\ O(x^{\text{Min}(\sigma^*/3 + 4 - \kappa, (2\sigma^*/3 - 3), 59/10 - 4\kappa/5) + \varepsilon}) & \text{für } 0 \leq \kappa \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Die O -Abschätzung in (65) läßt sich (sogar ohne ε) aus einer Reihendarstellung des Fehlergliedes von Apostol — allerdings für ganzzahliges $\kappa > r - 1/2$ — entnehmen ([1]; vgl. Landau [16], (47) und [18], S. 137 für ganzzahliges $\kappa > r + 1/2$; für $r \geq 2$, $\kappa = 1, 2, 3$ bei Walfisz [36], und im Spezialfall $a_n = \tau(n)$ für reelles $\kappa \geq 1$ bei Hardy [7]).

Nach (72) und Hilfssatz 14 sind für $Z(s)$ auch die Voraussetzungen des Satzes 27 in [30] erfüllt. Die unteren Abschätzungen in (65), (66) und (67) habe ich dort schon angegeben. Die dortigen oberen Abschätzungen für $\sigma_{\kappa}(Z)$ sind hier in (65) und (67) durchweg verbessert worden, ebenfalls diejenigen für $\sigma_{\kappa}(Z^2)$ in (66) für $\kappa \geq 3/2$. Dagegen ist das in (66) behandelte Problem bereits von höherer Dimension, so daß beispielsweise für $\kappa = 0$ die in [30] durchgeführte Methode diesem Problem angemessener ist und bessere Resultate liefert.

Für $\kappa = 0$ sind die Abschätzungen in (67) (sogar ohne ε) bekannt (Walfisz [36], [37], Rankin [26]). Der erste Term bei μ in (67) liefert genau dann eine bessere Aussage als der zweite, wenn $\sigma^* < r/2 - 3/10$, also beispielsweise wenn die erweiterte Ramanujansche Vermutung $\sigma^* = (r-1)/2$ bekannt ist (vgl. Petersson [23], Schoeneberg [32], Eichler [5]).

$\sigma^* = (r-1)/2$ hat nach (69) wegen (74) $\bar{\sigma}_0 = (r+1)/2$ zur Folge. Dies hat kürzlich schon Walfisz [38] bemerkt, wo (70) auf anderem Wege (sogar in einer nicht auf Abszissen abgeschwächten Form) bewiesen wurde.

Gilt in (70) das Gleichheitszeichen, so wählen wir $\bar{\alpha} = \bar{\sigma}_0(Z)$. Dann ist in Satz 12 $\kappa_0 = 0$, und er liefert in diesem Falle die genaue Bestimmung sämtlicher Summierbarkeitsabszissen σ_{κ} einschliesslich der Konvergenzabszisse σ_0 .

14. Wir erwähnen noch, daß unter den Voraussetzungen des Satzes 12 für die Abszissen $\bar{\sigma}_x$ und $\tilde{\sigma}_x$ der absoluten und der starken Rieszschen Summierbarkeit ([22] und [30])

$$\sigma_{x+1} = \bar{\sigma}_x = \sigma_x = \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q} - \frac{x}{q} \quad \text{für } x \geq x_0 = q \left(\bar{\alpha} - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2q} \right)$$

gilt. Ist $q=1$, so lassen sich sämtliche Abszissen zu

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} - x, \quad x \geq 0, \quad \bar{\sigma}_x = \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} - x, \quad x \geq 0, \\ \tilde{\sigma}_x &= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} - x, \quad x \geq -\frac{1}{2}, \quad \sigma^* = \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bestimmen.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 13 gilt über (65) hinaus

$$\bar{\sigma}_x = \frac{r}{2} + \frac{1}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \geq \frac{1}{2}, \quad \tilde{\sigma}_x = \frac{r}{2} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \geq -\frac{1}{2},$$

es sind also sämtliche Abszissen der starken Rieszschen Summierbarkeit bestimmt. Ist überdies $\bar{\sigma}_0 = (r+1)/2$, so lassen sich neben den $\tilde{\sigma}_x$ auch sämtliche Abszissen der absoluten Rieszschen Summierbarkeit zu

$$(79) \quad \bar{\sigma}_x = \begin{cases} \frac{r}{2} + \frac{1}{4} - \frac{x}{2} & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{r}{2} + \frac{1}{2} - x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

angeben. Bemerkenswert ist der Knick dieser Funktion, der beim Überschreiten der Symmetriegeraden der Funktionalgleichung durch $\bar{\sigma}_x$ eintritt. (79) gilt auch noch für eine weitere Klasse von Dirichletreihen. Zu diesen gehört (mit $r=1$) das Quadrat der alternierenden ζ -Reihe, das Produkt zweier mit einem Nichthauptcharakter gebildeten Dirichletschen L-Reihen, aber auch die erzeugende Dirichletreihe des Fehlergliedes beim Dirichletschen Teilerproblem und beim Kreisproblem.

(Eingegangen am 20. Februar 1957)

LITERATUR

- [1] Apostol, T. M. — Identities involving the coefficients of certain Dirichlet series, *Duke Math. J.* **18** (1951), 517—525.
- [1 a] Bochner, S. - Chandrasekharan, K. — On Riemann's functional equation, *Ann. of Math.* (2) **63** (1956), 336—360.
- [2] Carlson, F. — Contributions à la théorie des séries de Dirichlet II, *Ark. Math. Astr. Fys.* **19 A** (1925—27), No. 25.
- [2 a] Chandrasekharan, K. - Mandelbrojt, S. — Sur l'équation fonctionnelle de Riemann, *C. R. Acad. Sci. Paris* **242** (1956), 2793—2796.
- [3] Chandrasekharan, K. - Minakshisundaram, S. — Typical means, Bombay 1952.
- [4] Chih, Tsungtao — The Dirichlet's divisor problem, *Sc. Rep. Nat. Tsing - Hua Univ.*, Ser. A. **5** (1950), 402—427.
- [5] Eichler, M. — Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzetafunktion, *Arch. Math.* **5** (1954), 355—366.
- [6] Grandjot, K. — Untersuchungen über Dirichletsche Reihen, *Math. Z.* **26** (1927), 593—618.
- [7] Hardy, G. H. — A further note on Ramanujan's arithmetical function $\tau(n)$, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **34** (1938), 309—315.
- [8] Hardy, G. H. - Riesz, M. — The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915.
- [9] Hecke, E. — Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923.
- [10] Hecke, E. — Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg*, **5** (1927), 199—224.
- [11] Hecke, E. — Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, *Math. Ann.* **112** (1936), 664—699.
- [12] Hecke, E. — Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung und ihre Nullstellen auf der Mittelgeraden, *Münch. Sitzungsber.* **1937**, 73—95.
- [13] Hua, L.-K. — The lattice points in a circle, *Quart. J. Oxford* **13** (1942), 18—29.
- [14] Landau, E. — Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, *Rend. Palermo* **26** (1908), 169—302.
- [15] Landau, E. — Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* **1912**, 687—771.
- [16] Landau, E. — Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen II, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* **1915**, 209—243.
- [17] Landau, E. — Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen III, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* **1917**, 96—101.
- [18] Landau, E. — Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen IV, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* **1924**, 137—150.

- [19] Landau, E. — Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1927.
- [19a] Lerch, M. — Aritmetické odvození Lejeune Dirichletových výsledků o počtu tříd kvadratických forem, *Rozpravy Česke Akad. Praze. Třída II*, **7** (1898), Číslo 5.
- [20] Lindelöf, E. — Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Paris 1905.
- [21] Neder, L. — Über Umkehrungen der Konvergenzsätze für Dirichletsche Reihen, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math. — phys. Kl.* **74** (1922), 99—105.
- [22] Obreschkoff, N. — Über die absolute Summierung der Dirichletschen Reihen, *Math. Z.* **30** (1929), 375—386.
- [23] Petersson, H. — Über die lineare Zerlegung der den ganzen Modulformen von höherer Stufe entsprechenden Dirichletreihen in vollständige Eulersche Produkte, *Acta Math.* **80** (1948), 191—221.
- [24] Ramanujan, S. — Some formulae in the analytic theory of numbers, *Messenger of Math.* **45** (1916), 81—84.
- [25] Rankin, R. A. — Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **35** (1939), 357—372.
- [26] Rankin, R. A. — Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. III. A note on the sum function of the Fourier coefficients of integral modular forms, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **36** (1940), 150—151.
- [27] Richert, H.-E. — Ein Gitterpunktproblem, *Math. Ann.* **125** (1953), 467—471.
- [28] Richert, H.-E. — Verschärfung der Abschätzung beim Dirichletschen Teilerproblem, *Math. Z.* **58** (1953), 204—218.
- [29] Richert, H.-E. — Über die Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung II, *Math. Z.* **58** (1953), 71—84.
- [30] Richert, H.-E. — Beiträge zur Summierbarkeit Dirichletscher Reihen mit Anwendungen auf die Zahlentheorie, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* **1956**, 77—125.
- [31] Schnee, W. — Über die Koeffizientendarstellungsformel in der Theorie der Dirichletschen Reihen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* **1910**, 1—42.
- [32] Schoeneberg, B. — Über den Zusammenhang der Eisensteinschen Reihen und Thetareihen mit der Diskriminante der elliptischen Funktionen, *Math. Ann.* **126** (1953), 177—184.
- [33] Titchmarsh, E. C. — The theory of functions, 2. ed., Oxford 1939.
- [34] Titchmarsh, E. C. — The theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford 1951.
- [35] Walfisz, A. — О певном загаднении делннкóв Рамануяана, *Prace mat.—fiz.* **35** (1927—28), 101—126.
- [36] Walfisz, A. — Über die Koeffizientensummen einiger Modulformen, *Math. Ann.* **108** (1933), 75—90.
- [37] Вальфиш, А. З. — О суммах коэффицентоь некоторых модулярных форм, *Сообщ. АН Груз. ССР* **16** (1955), 417—423.
- [38] Вальфиш, А. З. — О суммах модулей коэффицентоь некоторых модулярных форм, *Сообщ. АН Груз. ССР* **16** (1955), 497—502.