# CONSTRUCTION DE QUELQUES FORMES LINÉAIRES POSITIVES

Par

IVAN VIDAV (Ljubljana)

Considérons l'* algèbre $\mathfrak{B}$ sur le corps complexe — contenant l'élément unité $\mathbf{1}$ — engendrée par trois éléments autoadjoints $a, b, c$, parmi lesquels existent les relations de commutation suivantes

$$bc-cb=ia, \quad ca-ac=ib, \quad ab-ba=ic, \quad i=\sqrt{-1}. \tag{I}$$

Tout élément $z \in \mathfrak{B}$ est un polynôme en $a, b, c$. En vertu des relations (I) on peut écrire $z$ sous la forme

$$z=\sum \alpha_{prs}\, a^p\, b^r\, c^s. \tag{1}$$

Les coefficients $\alpha_{prs}$ sont des nombres complexes.

Une forme linéaire $f(z)$ sur $\mathfrak{B}$ est dite positive, si l'on a $f(zz^*) \geqq 0$ pour tout $z \in \mathfrak{B}$. On a alors $f(z^*)=\overline{f(z)}$ et $f(\mathbf{1})>0$, si $f(z)\not\equiv 0$. Soit $x$ un élément autoadjoint de $\mathfrak{B}$. Nous dirons que le nombre réel $\lambda$ est une valeur propre de $x$, s'il existe une forme linéaire positive $f(z)$ telle que l'on ait $f[(x-\lambda)^2]=0$*). On appelle alors $f(z)$ la forme propre de $x$ correspondant à la valeur propre $\lambda$. Une valeur propre est simple, s'il n'existe à un facteur près, qu'une seule forme propre.

Le but de cette note est de chercher toutes les valeurs propres de l'élément autoadjoint

$$m=a^2+b^2+c^2. \tag{2}$$

---

*) Dans tout ce qui suit nous écrirons simplement $\lambda$, $\mu$, etc. au lieu de $\lambda\mathbf{1}$, $\mu\mathbf{1}$.

Cet élément est permutable aux éléments générateurs $a$, $b$, $c$, donc à tous les éléments de $\mathfrak{B}$

(3) $$am-ma=0, \quad bm-mb=0, \quad cm-mc=0.$$

Les relations de commutation (I) jouent un rôle important dans la mécanique quantique et dans la théorie de la représentation du groupe des rotations. It n'est pas donc peut-être sans intérêt de trouver les valeurs propres et de construire les formes propres correspondantes sans faire aucune hypothèse sur la nature des éléments $a$, $b$, $c$. Toutes les méthodes employées ici sont d'ailleurs bien connues (voir [1], pp. 95–99, [2], [3], pp. 65–67).

Considérons maintenant l'élément

(4) $$u=a-ib, \quad \text{donc} \quad u^*=a+ib.$$

On a alors les relations de commutation suivantes

(5) $$uc-cu=u. \quad u^*c-cu^*=-u^*, \quad u^*u-uu^*=2c$$

et

(6) $$u^*u=a^2+b^2+c=m+c-c^2, \quad uu^*=m-c-c^2.$$

De (5) on déduit immédiatement

(7) $$u^n c-cu^n=nu^n, \quad u^{*n}c-cu^{*n}=-nu^{*n},$$

où $n$ est un nombre entier positif. En vertu des relations (3), (4) et (6), on peut mettre tout élément $z \in \mathfrak{B}$ sous la forme

(8) $$z=\sum m^p u^r u^{*s}(\alpha_{prs}c+\beta_{prs}).$$

Donc

$$z^*=\sum m^p(\overline{\alpha}_{prs}c+\overline{\beta}_{prs})u^s u^{*r},$$

ou, en tenant compte de (7),

$$z^*=\sum m^p u^s u^{*r}[\overline{\alpha}_{prs}c+(r-s)\overline{\alpha}_{prs}+\overline{\beta}_{prs}].$$

Supposons qu'il existe une valeur propre $\mu$ de l'élément autoadjoint $m$ et soit $f(z)$, $f(1)=1$, une forme propre correspondante. De $f[(m-\mu)^2]=0$ on déduit $f(m)=f(a^2+b^2+c^2)=\mu$. Donc $f(a^2)\leqq\mu$, $f(b^2)\leqq\mu$, $f(c^2)\leqq\mu$.

Introduisons maintenant dans l'espace $\mathfrak{B}$ le produit scalaire par la formule $(z/t)=f(t^*z)$. Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des éléments $z\in\mathfrak{B}$ tels que

$f(z^*z)=0$. L'ensemble $\mathfrak{J}$ est un idéal à gauche de $\mathfrak{B}$. L'espace quotient $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$, muni de ce produit scalaire, est un espace préhilbertien séparé. Désignons par $\mathfrak{H}$ son complété. Soit $x$ un élément quelconque de $\mathfrak{B}$. L'opérateur de multiplication à gauche par $x$ dans $\mathfrak{B}$, $z\rightarrow xz$, définit un opérateur linéaire $X$ dans $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$. A tout élément de $\mathfrak{B}$ correspond donc dans l'espace $\mathfrak{H}$ un opérateur linéaire dont le domaine de définition $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ est dense dans $\mathfrak{H}$. Soient alors $A$, $B$, $C$ les opérateurs dans $\mathfrak{H}$ qui correspondent aux éléments générateurs $a$, $b$, $c$. Du fait que $f(z)$ est une forme propre de l'élément $m$ qui est permutable à tout élément de $\mathfrak{B}$, on déduit la relation

$$A^2+B^2+C^2=\mu I, \tag{9}$$

$I$ étant l'opérateur identité. Les opérateurs hermitiens $A$, $B$, $C$ sont donc bornés.

*L'espace $\mathfrak{H}$ est de dimension finie.*

D é m o n s t r a t i o n. La première relation (7) entraîne l'équation

$$U^nC-CU^n=nU^n$$

où l'opérateur $U=A-iB$ correspond à l'élément $u$. Il en résulte $n\|U^n\|\leqq$ $\leqq 2\|C\|\,\|U^n\|$ ($\|X\|$ étant la norme de l'opérateur $X$ dans $\mathfrak{H}$). Donc, pour $n>2\|C\|$, on a $\|U^n\|=0$, d'où $U^n=0$ et $U^{*n}=0$. L'opérateur $U$ est nilpotent. Il en résulte $u^n\equiv 0$, $(\mathfrak{J})$ et $u^{*n}\equiv 0$, $(\mathfrak{J})$, si $n>2\|C\|$ (c'est -à-dire, $u^n$ et $u^{*n}$ appartiennent à l'idéal $\mathfrak{J}$). Donc, pour tout $z\in\mathfrak{B}$ on a

$$z\equiv\sum u^r u^{*s}(\alpha_{rs}c+\beta_{rs}),\ (\mathfrak{J})$$

où $s$, $r\leqq 2\|C\|$, $\alpha_{rs}$ et $\beta_{rs}$ étant des nombres complexes. La dimension de $\mathfrak{H}$, étant au plus égale à $2(1+2\|C\|)^2$, est par conséquent finie.

L'opérateur $C$, étant autoadjoint dans un espace de dimension finie, a le spectre purement discret. Soit $\lambda$ la valeur propre la plus grande de $C$. Il existe donc une forme positive $f_0(z)$ telle que l'on ait

$$f_0[(m-\mu)^2]=0,\quad f_0[(c-\lambda)^2]=0. \tag{10}$$

On suppose $f_0(1)=1$. Il s'ensuit de (10) que $f_0[(c-\lambda)z(c-\lambda)]=0$ quel que soit $z\in\mathfrak{B}$. Pour $z=uu^*$ on en déduit

$$f_0[u(c-\lambda-1)^2u^*]=0.$$

Si l'on avait $f_0(uu^*) \neq 0$, le nombre $\lambda+1$ serait une valeur propre de $C$, et $\lambda$ ne serait pas la plus grande valeur propre. Donc $f_0(uu^*)=0$. Comme $uu^*=m-c-c^2$, on a la relation suivante

$$\mu=\lambda(\lambda+1). \tag{11}$$

Soit $k$ un nombre entier positif tel que $f_0(u^{*k}u^k) \neq 0$. En posant $f_k(z)=f_0(u^{*k}zu^k)/f_0(u^{*k}u^k)$, on déduit immédiatement de (7) que $f_k[(c+k-\lambda)^2]=0$. Le nombre $\lambda-k$ est donc une valeur propre de $c$ et, bien entendu, de l'opérateur $C$, si $f_0(u^{*k}u^k) \neq 0$. Cet opérateur étant borné, il en résulte que l'on a $f_0(u^{*k}u^k)=0$ pour $k$ assez grand. Calculons $f_0(u^j u^k)$. En tenant compte des relations (5) et (7) on obtient d'abord par un calcul facile l'identité

$$u^{*j}u^k=u^{*j-1}u^k u^*+2\,ku^{*j-1}u^{k-1}c-k(k-1)u^{*j-1}u^{k-1}. \tag{12}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Schwarz, on a $|f_0(zu^*)|^2 \leq f_0(zz^*)f_0(uu^*)= =0$. Donc $f_0(zu^*)=0$ pour tout $z \in \mathfrak{B}$. De même, $f_0[(c-\lambda)^2]=0$ implique $f_0[z(c-\lambda)]=f_0[(c-\lambda)z]=0$, d'où $f_0(zc)=f_0(cz)=\lambda f_0(z)$. Par suite,

$$f_0(u^{*j}u^k)=k(2\lambda+1-k)f_0(u^{*j-1}u^{k-1}),$$

d'où

$$f_0(u^{*j}u^k)=0, \text{ si } j \neq k, \text{ et } f_0(u^{*k}u^k)=(k!)^2\binom{2\lambda}{k}. \tag{13}$$

Comme le nombre $f_0(u^{*k}u^k)$ est positif ou nul, il s'ensuit de cette formule que $2\lambda$ doit être un nombre entier positif et que $f_0(u^{*k}u^k)=0$, si $k>2\lambda$. Nous avons ainsi démontré le théorème:

*L'opérateur $C$ a $2\lambda+1$ valeurs propres $\lambda, \lambda-1, \lambda-2, \ldots, -\lambda$. Toute valeur propre de l'élément $m$ est de la forme $\mu=\lambda(\lambda+1)$, où $2\lambda$ est un nombre entier positif ou nul.*

Comme

$$f_0(zu^*)=0, \quad f_0(zc)=\lambda f_0(z),$$

on a pour tout élément (8)

$$f_0(z)=\sum \mu^p(\alpha_{p00}\lambda+\beta_{p00}). \tag{14}$$

La forme $f_0(z)$ est donc bien déterminée. *La valeur propre $\lambda$ de $C$ est simple.* Démontrons maintenant l'existence de $f_0(z)$. La forme $f_0(z)$, définie par la formule (14), est évidemment linéaire. Pour tout $z \in \mathfrak{B}$ on a

$$f_0(zz^*)=\sum\sum \mu^{p+p'}f_0[u^{*s}(\alpha_{pos}c+\beta_{pos})(\overline{\alpha}_{p'os'}c+\overline{\beta}_{p'os'})u^{s'}].$$

Par un calcul facile on obtient de (7), (12) et (13):

$$f_0(zz^*) = \sum\sum \mu^{p+p'}(s!)^2\binom{2\lambda}{s}[\alpha_{pos}(\lambda-s)+\beta_{pos}]\ [\overline{\alpha}_{p'os}(\lambda-s)+\overline{\beta}_{p'os}].$$

Il en résulte

$$f_0(zz^*) = \sum_s (s!)^2\binom{2\lambda}{s}\left\{\sum_p \mu^p[\alpha_{pos}(\lambda-s)+\beta_{pos}]\right\}\left\{\overline{\sum \mu^p[\alpha_{pos}(\lambda-s)+\beta_{pos}]}\right\} \geqq 0.$$

Donc, la forme $f_0(z)$, définie par (14), est positive.

Il s'ensuit que l'élément $m = a^2+b^2+c^2$ possède toutes les valeurs propres $\mu = \lambda(\lambda+1)$, où $2\lambda$ est un nombre entier positif ou nul. Comme les nombres $\lambda - k, k = 0, 1, 2, \ldots, 2\lambda$, sont les valeurs propres de $C$, il existe une forme positive $f(z)$ telle qu'on ait

$$f[(m-\mu)^2] = 0, \quad f[(c-\gamma)^2] = 0$$

où $\gamma$ est l'une de ces valeurs propres. *Cette forme est unique.* Nous le savons déjà, si $\gamma = \lambda$. Supposons maintenant que $f(z)$ est unique pour toutes les valeurs propres plus grandes que $\gamma$. Soient alors $f'(z)$ et $f''(z)$, $f'(1) = f''(1) = 1$, deux formes propres appartenant à la valeur $\gamma$, donc $f'[(m-\mu)^2] = f''[(m-\mu)^2] = 0$ et $f'[(c-\gamma)^2] = f''[(c-\gamma)^2] = 0$. Comme $\gamma < \lambda$, on a $f'(uu^*) = f''(uu^*) = \mu - \gamma(\gamma+1) \neq 0$. Les formes $f_1(z) = f'(uzu^*)/f'(uu^*)$ et $f_2(z) = f''(uzu^*)/f''(uu^*)$ correspondent donc à la valeur propre $\gamma+1 > \gamma$. Par suite, d'après ce que nous avons supposé $f_1(z) \equiv f_2(z)$, d'où $f'(uzu^*) \equiv \equiv f''(uzu^*)$ quel que soit $z \in \mathfrak{B}$. Il en résulte $f'(uu^*zuu^*) \equiv f''(uu^*zuu^*)$. $f'$ et $f''$ étant formes propres pour l'élément $uu^*$, on a $f'(z) \equiv f''(z)$. Nous avons ainsi démontré que toutes les valeurs propres de $C$ sont simples.

Considérons encore l'espace hilbertien $\mathfrak{H}$ ayant pour le produit scalaire $(z/t) = f_0(t^*z)$, $f_0(z)$ étant la forme construite ci-dessus. De $(u^k/u^k) = f_0(u^{*k}u^k) = (k!)^2\binom{2\lambda}{k}$ on déduit $u^k \equiv 0$, $(\mathfrak{J})$, si $k > 2\lambda$. On a de même $u^* \equiv 0$, $(\mathfrak{J})$, puisque $(u^*/u^*) = f_0(uu^*) = 0$. Donc, pour tout $z \in \mathfrak{B}$,

$$z \equiv \sum \mu^p(\alpha_{pro}\lambda + \beta_{pro})u^r, \ (\mathfrak{J});\ 0 \leqq r \leqq 2\lambda.$$

Les vecteurs $1, u, u^2, \ldots, u^{2\lambda}$ forment une base de l'espace $\mathfrak{H}$ qui est par conséquent de dimension $2\lambda+1$. Puisque $(u^k/u^{k'}) = f_0(u^{*k'}u^k) = 0$ pour $k' \neq k$, ces vecteurs sont orthogonaux. Posons $e_k = u^k/\omega_k$, où

$\omega_k = k! \sqrt{\binom{2\lambda}{k}}$. Les vecteurs $e_0, e_2, \ldots . e_{2\lambda}$ forment une base orthonormale de $\mathfrak{H}$. D'autre part, on a

$$u e_k = \frac{u^{k+1}}{\omega_k} = \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} e_{k+1} = \sqrt{(k+1)\ (2\lambda - k)}\, e_{k+1}$$

et

$$c e_k = \frac{c\, u^k}{\omega_k} = \frac{u^k c - k\, u^k}{\omega_k} = (\lambda - k)\, e_k .$$

On peut donc représenter les opérateurs $U$ et $C$ par les matrices

$$V = \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{2\lambda} & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2(2\lambda-1)} & . \; 0 \\ . & . & \ldots\ldots\ldots & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & \sqrt{2\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -\lambda \end{Vmatrix}$$

*(Reçu le 30 octobre 1957)*

## BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Chevalley — Théorie des groupes de Lie. T. III, (1955).

[2] I. M. Gelfand — Z. Y. Šapiro — Representations of the group of rotations of 3-dimensional space and their applications. *Amer. Math. Soc. Translations, Series* 2, *Volume* 2, pp. 207—316.

[3] B. L. van der Waerden — Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Die Grundlehren d. Math. Wiss., Bd. XXXVI, (1932).