SUR QUELQUES FORMULES DE LA GÉOMÉTRIE CONFORME DU SOUS-ESPACE

Par

MILEVA PRVANOVIĆ (Novi Sad)

1. L'objet de recherches de la géométrie conforme du sous-espace d'un espace riemannien sont les propriétés du sous-espace qui restent invariables par rapport à la transformation conforme d'espace ambiant. Dans son travail [3] consacré à ce problème, A. Fialkow introduit „le tenseur métrique conforme" et „la métrique conforme", puis définit „la dérivée covariante conforme" ayant toutes les propriétés de la dérivée covariante ordinaire mais étant invariable par rapport à la transformation conforme. En appliquant la dérivée covariante conforme aux espaces conformes osculateurs et normaux du sous-espace, il obtient les formules conformes de Frenet du sous-espace, et en exprimant les conditions d'intégrabilité de ces équations il parvient aux équations conformes de Gauss et Codazzi.

Nous introduisons, dans §2 et §3, une nouvelle opération, et en l'appliquant à un champ de tenseurs unitaires, normaux au sous-espace mais n'appartenant pas à leurs espaces osculateurs, nous déduisons certaines équations, invariables par rapport à la transformation conforme. Le paragraphe 4 traite le cas spécial où le sous-espace est la courbe.

2. Envisageons l'espace riemannien V_n plongé dans l'espace riemannien V_m et supposons les métriques de ses deux espaces positives. Soit, au point P du sous-espace V_n, E_{n_0} l'espace tangent et $E_{n_0+n_1+\ldots+n_x}$ l'espace osculateur du degré x, où $n_0+n_1+\ldots+n_x$ est le nombre de la dimension. L'espace osculateur $E_{n_0+n_1+\ldots+n_t}$ $(0 \leqslant t < x)$ appartient à chaque espace osculateur $E_{n_0+n_1+\ldots+n_{t+1}}$, $E_{n_0+n_1+\ldots+n_{t+2}}, \ldots, E_{n_0+n_1+\ldots+n_x}$ et tous les espaces osculateurs de V_n appartiennent à l'espace local R_m de V_n du point P.

Il existe, pour chaque point de V_n le nombre entier k, tel que chaque espace osculateur du degré plus grand que k coïncide avec l'espace osculateur du degré k.

Puis considérons, en chaque point du sous-espace V_n, les espaces normaux R_{n_x} $(x=1,2,\ldots)$. Un tel espace est l'espace du plus grand nombre de dimensions appartenant à l'espace osculateur $E_{n_0+n_1+\ldots+n_x}$ et étant normal à l'espace osculateur $E_{n_0+n_1+\ldots+n_{x-1}}$. En désignant par $\overset{x}{B}{}^{q_x}_{p_x}$ et $\overset{x}{a}_{p_x q_x}$ le tenseur unitaire et le tenseur fondamental de R_{n_x} et par $a_{\alpha\beta}$ le tenseur fondamental d'espace ambiant V_m, nous avons

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \overset{x}{a}_{p_x q_x}=a_{\alpha\beta}\overset{x}{B}{}^{\alpha}_{p_x} B^{\beta}_{q_x} \\ \overset{x}{B}{}^{\alpha}_{p_x}\overset{y}{B}{}^{q_y}_{\alpha}=\begin{cases}\delta^x_y & \text{pour } x=y\\ 0 & \text{pour } x\neq y;\ x,y=0,1,2,\ldots,k,\end{cases}\end{cases}$$

où x prend les valeurs de 0 jusqu'à k et $\overset{0}{a}_{p_0 q_0}$ et $\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0}$ sont, respectivement, le tenseur métrique et le tenseur unitaire du sous-espace V_n.

L'espace riemannien $\overline{V}_m$, dont la métrique est positive, est conforme avec l'espace V_m si son tenseur $\overline{a}_{\alpha\beta}$ de la première forme fondamentale s'exprime de la manière suivante

$$(2.2)\qquad \overline{a}_{\alpha\beta}=e^{2\sigma}a_{\alpha\beta};\quad \overline{a}^{\alpha\beta}=e^{-2\sigma}a^{\alpha\beta}.$$

Ceci étant, les symboles de Christoffel $\overline{\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}}$ et $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}$ d'espace $\overline{V}_m$ et V_m liés par la relation

$$(2.3)\qquad \overline{\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}}=\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}+\delta^{\alpha}_{\beta}\sigma_{\gamma}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\sigma_{\beta}-a_{\beta\gamma}a^{\alpha\tau}\sigma_{\tau},$$

où

$$\sigma_{\alpha}=\frac{\partial\sigma}{\partial y^{\alpha}},$$

tandis que y^{α} sont les coordonnées d'espace V_m[1].

Le sous-espace V_n de V_m se transforme, par la transformation conforme (2.2), en sous-espace $\overline{V}_n$ d'espace $\overline{V}_m$. Le tenseur unitaire $\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0}$ du sous-espace est invariable par rapport à la transformation conforme. Alors,

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \overset{\overline{0}}{B}{}^{\alpha}_{p_0}=\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0};\quad \overset{\overline{0}}{B}{}^{p_0}_{\alpha}=\overset{0}{B}{}^{p_0}_{\alpha};\\ \overset{\overline{0}}{a}_{p_0 q_0}=e^{2\sigma}\overset{0}{a}_{p_0 q_0};\quad \overset{\overline{0}}{a}{}^{p_0 q_0}=e^{-2\sigma}\overset{0}{a}{}^{p_0 q_0};\\ \delta^{p_0}_{.0}=\overset{\overline{0}}{a}{}^{p_0 r_0}\overset{\overline{0}}{a}_{r_0 q_0}=\overset{0}{a}{}^{p_0 r_0}\overset{0}{a}_{r_0 q_0}=\delta^{p_0}_{q_0}\end{cases}$$

[1]) $\overline{y}^{\alpha}$ étant les coordonnées d'espace $\overline{V}_m$, nous supposons que $\overline{y}^{\alpha}=y^{\alpha}$ aux points correspondants.

Imaginons en chaque point du sous-espace V_n un espace vectoriel linéaire K_{n_1} appartenant à l'espace local R_m, étant normal à l'espace tangent E_{n_0}, mais n'appartenant pas à l'espace osculateur $E_{n_0+n_1}$, c'est à dire ne coïncidant pas avec l'espace normal R_{n_1}. Il s'ensuit que

$$\overset{1}{g}_{i_1j_1}=a_{\alpha\beta}\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{i_1}\overset{1}{P}{}^{\beta}_{j_1}\,;\quad \overset{1}{P}{}^{\alpha}_{i_1}\overset{1}{P}{}^{j_1}_{\alpha}=\delta^{j_1}_{i_1}\,;\quad \overset{1}{P}{}^{\alpha}_{i_1}\overset{0}{B}{}^{p_0}_{\alpha}=0\,, \tag{2.5}$$

où $\overset{1}{P}{}^{j_1}_{i_1}$ et $\overset{1}{g}_{i_1j_1}$ désignent, respectivement, le tenseur unitaire et le tenseur fondamental d'espace K_{n_1}; ces quantités appartiennent avec les indices $i_1, j_1, \ldots$ à l'espace K_{n_1}.

Si le tenseur $\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{i_1}$ est invariable par rapport à la transformation conforme (2.2), c'est-à-dire si

$$\overset{\overline{1}}{P}{}^{\alpha}_{i_1}=\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{i_1}\,, \tag{2.6}$$

il résulte de (2.5)

$$\overset{\overline{1}}{g}_{i_1j_1}=e^{2\sigma}\overset{1}{g}_{i_1j_1}\,;\quad \overset{\overline{1}}{g}{}^{i_1j_1}=e^{-2\sigma}\overset{1}{g}{}^{i_1j_1}\,;\quad \overline{\delta}{}^{i_1}_{j_1}=\delta^{i_1}_{j_1}\,;\quad \overset{\overline{1}}{P}{}^{i_1}_{\alpha}=\overset{1}{P}{}^{j_1}_{\alpha}\,. \tag{2.7}$$

Désignons par $\overline{\nabla}$ la dérivée covariante par rapport à l'espace $\overline{V}_m$. En appliquant au tenseur $\overset{\overline{1}}{P}{}^{\alpha}_{i_1}$ les D-symboles de van der Wearden et Bartolotti ([1], I, pp. 95, II, pp. 118, [4], pp. 254), il suit

$$\overline{D}_{r_0}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\alpha}_{l_1}=\overset{\overline{0}}{B}{}^{\beta}_{r_0}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\gamma}_{l_1}\overline{\nabla}_{\beta}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\alpha}_{\gamma}=\overset{\overline{0}}{B}{}^{\beta}_{r_0}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\gamma}_{l_1}(\partial_{\beta}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\alpha}_{\gamma}+\overline{\{{}^{\alpha}_{\beta\varepsilon}\}}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\varepsilon}_{\gamma}-\overline{\{{}^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\}}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\alpha}_{\varepsilon})\,,$$

d'où, en vertu de (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) et de la relation analogue à la relation précédante dans l'espace V_m,

$$\overline{D}_{r_0}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\alpha}_{l_1}=D_{r_0}\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{l_1}+\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{r_0}\overset{1}{P}{}^{\varepsilon}_{l_1}\sigma_{\varepsilon}\;. \tag{2.8}$$

Mais, puisque $\overset{\overline{0}}{B}{}^{p_0}_{\alpha}=\overset{0}{B}{}^{p_0}_{\alpha}$, nous obtenons de (2.8) et grâce à (2.1):

$$\overset{\overline{0}}{B}{}^{p_0}_{\alpha}\overline{D}_{r_0}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\alpha}_{l_1}=\overset{0}{B}{}^{p_0}_{\alpha}D_{r_0}\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{l_1}+\delta^{p_0}_{r_0}\overset{1}{P}{}^{\varepsilon}_{l_1}\sigma_{\varepsilon}\,,$$

à savoir

$$\overset{\overline{0}}{B}{}^{\beta}_{p_0}\overset{\overline{0}}{B}{}^{p_0}_{\alpha}\overline{D}_{r_0}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\alpha}_{l_1}=\overset{0}{B}{}^{\beta}_{p_0}\overset{0}{B}{}^{p_0}_{\alpha}D_{r_0}\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{l_1}+\overset{0}{B}{}^{\beta}_{r_0}\overset{1}{P}{}^{\varepsilon}_{l_1}\sigma_{\varepsilon}\,.$$

En retranchant cette équation de l'équation (2.8), nous avons

$$\overline{D}_{r_0}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\beta}_{l_1}-\overset{\overline{0}}{B}{}^{\beta}_{p_0}\overset{\overline{0}}{B}{}^{p_0}_{\alpha}\overline{D}_{r_0}\overset{\overline{1}}{P}{}^{\alpha}_{l_1}=D_{r_0}\overset{1}{P}{}^{\beta}_{l_1}-\overset{0}{B}{}^{\beta}_{p_0}\overset{0}{B}{}^{p_0}_{\alpha}D_{r_0}\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{l_1}\,,$$

ce qui signifie que le tenseur

$$\overset{2}{T}_{r_0 l_1}^{\cdot\,\cdot\,\beta} \equiv \mathfrak{D}_{r_0} \overset{1}{P}{}_{l_1}^{\beta} \equiv D_{r_0} \overset{1}{P}{}_{l_1}^{\beta} - \overset{0}{B}{}_{p_0}^{\beta} \overset{0}{B}{}_{\alpha}^{p_0} D_{r_0} \overset{1}{P}{}_{l_1}^{\alpha} \tag{2.9}$$

est invariable par rapport à la transformation conforme.

Il est facile de montrer que

$$\overset{0}{B}{}_{\beta}^{p_0} \mathfrak{D}_{r_0} \overset{1}{P}{}_{l_1}^{\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \overset{1}{P}{}_{\beta}^{k_1} \mathfrak{D}_{r_0} \overset{1}{P}{}_{l_1}^{\beta} = 0\,,$$

c'est à dire que le tenseur $\overset{2}{T}_{r_0 l_1}^{\cdot\,\cdot\,\beta}$, appartenant avec l'indice r_0 à l'espace $K_{n_0} = E_{n_0}$ et avec l'indice l_1 á l'espace K_{n_1}, appartient avec l'indice β à un espace linéaire K_{n_2} qui est normal tant à K_{n_0} que à K_{n_1}.

$\overset{2}{P}{}_{l_2}^{k_2}$ étant les composantes du tenseur unitaire et $\overset{2}{g}_{i_2 j_2}$ les composantes du premier tenseur fondamental d'espace K_{n_2}, nous pouvons écrire:

$$\begin{gathered} \overset{2}{g}_{i_2 j_2} = a_{\alpha\beta} \overset{2}{P}{}_{i_2}^{\alpha} \overset{2}{P}{}_{j_2}^{\beta}\,, \\ \overset{2}{P}{}_{i_2}^{\alpha} \overset{0}{B}{}_{\alpha}^{p_0} = 0; \quad \overset{2}{P}{}_{i_2}^{\alpha} \overset{1}{P}{}_{\alpha}^{j_1} = 0; \quad \overset{2}{P}{}_{i_2}^{\alpha} \overset{2}{P}{}_{\alpha}^{j_2} = \delta_{i_2}^{j_2}\,, \end{gathered} \tag{2.10}$$

où par les indices grecs ou par les indices de la suite $i_2, j_2, k_2, \ldots.$ nous dénotons que la quantité appartient à l'espace K_{n_2}.

Si le tenseur $\overset{2}{P}{}_{i_2}^{\alpha}$ est invariable par rapport à la transformation conforme, nous pouvons répéter le procédé précédant et conclure que le tenseur

$$\mathfrak{D}_{r_0} \overset{2}{P}{}_{l_2}^{\alpha} = D_{r_0} \overset{2}{P}{}_{l_2}^{\alpha} - \overset{0}{B}{}_{l_0}^{\alpha} \overset{0}{B}{}_{\beta}^{l_0} D_{r_0} \overset{2}{P}{}_{l_2}^{\beta}$$

est invariable par rapport à la transformation conforme, et qu'il satisfait aux équations

$$\overset{1}{P}{}_{\alpha}^{k_1} (\mathfrak{D}_{r_0} \overset{2}{P}{}_{l_2}^{\alpha} + \overset{2}{T}_{r_0\,\cdot\,l_2}^{\cdot\,\alpha}) = 0,$$

$$\overset{2}{P}{}_{\alpha}^{j_2} (\mathfrak{D}_{r_0} \overset{2}{P}{}_{l_2}^{\alpha} + \overset{2}{T}_{r_0\,\cdot\,l_2}^{\cdot\,\alpha}) = 0,$$

$$\overset{0}{B}{}_{\alpha}^{p_0} (\mathfrak{D}_{r_0} \overset{2}{P}{}_{l_2}^{\alpha} + \overset{2}{T}_{r_0\,\cdot\,l_2}^{\cdot\,\alpha}) = 0,$$

où le tenseur

$$\overset{2}{T}_{r_0\,\cdot\,\alpha}^{\cdot\,l_1\,\cdot} \equiv \mathfrak{D}_{r_0} \overset{1}{P}{}_{\alpha}^{l_1} \equiv D_{r_0} \overset{1}{P}{}_{\alpha}^{l_1} - \overset{0}{B}{}_{\alpha}^{p_0} \overset{0}{B}{}_{p_0}^{\beta} D_{r_0} \overset{1}{P}{}_{\beta}^{l_1}$$

est invariable par rapport à la transformation conforme.

Donc, le tenseur

$$\overset{3}{T}{}_{r_0\,l_2}^{\cdot\,\cdot\,\alpha} = \mathfrak{D}_{r_0} \overset{2}{P}{}_{l_2}^{\alpha} + \overset{2}{T}{}_{r_0\,\cdot\,l_2}^{\cdot\,\alpha}$$

est invariable par rapport à la transformation conforme et appartient: avec l'indice r_0 à K_{n_0}, avec l'indice l_2 à K_{n_2} et avec l'indice α à un espace linéaire K_{n_3} qui est, de son côté, contenu dans l'espace local R_m et qui est normal tant à K_{n_0} qu'à K_{n_1} et K_{n_2}.

En procédant ainsi, nous obtenons enfin les équations

$$\mathfrak{D}_{r_0} \overset{1}{P}{}_{l_1}^{\alpha} = \overset{2}{T}{}_{r_0\,l_1}^{\cdot\,\cdot\,\alpha},$$

(2.11)

$$\mathfrak{D}_{r_0} \overset{a}{P}{}_{l_a}^{\alpha} = \overset{a+1}{T}{}_{r_0\,l_a}^{\cdot\,\cdot\,\alpha} - \overset{a}{T}{}_{r_0\,\cdot\,l_a}^{\cdot\,\alpha},$$

$$a = 2, 3, \ldots, k; \quad \overset{k+1}{T}{}_{r_0\,l_k}^{\cdot\,\cdot\,\alpha} = 0,$$

qui sont, aussi bien que les tenseurs $\overset{0}{B}{}_{p_0}^{\alpha}$ et $\overset{1}{P}{}_{l_1}^{\alpha}$, invariables par rapport à la transformation (2.2). Le tenseur $\overset{a}{T}{}_{r_0\,l_{a-1}}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}$ appartient avec l'indice α à l'espace K_{n_a} qui est plongé dans l'espace local R_m et qui est normal à chaque espace linéaire: $K_{n_0}, K_{n_1}, \ldots, K_{n_{a-1}}$, tandis que $\overset{a}{P}{}_{l_a}^{k_a}$ est le tenseur unitaire de cet espace. Enfin, l'opération $\mathfrak{D}$ est définie de la manière suivante:

$$\mathfrak{D}_{r_0} \overset{a}{P}{}_{l_a}^{\alpha} = D_{r_0} \overset{a}{P}{}_{l_a}^{\alpha} - \overset{0}{B}{}_{k_0}^{\alpha} \overset{a}{B}{}_{\beta}^{k_0} D_{r_0} \overset{0}{P}{}_{l_a}^{\beta},$$

$$\mathfrak{D}_{r_0} \overset{a}{P}{}_{\alpha}^{l_a} = D_{r_0} \overset{a}{P}{}_{\alpha}^{l_a} - \overset{0}{B}{}_{\alpha}^{p_0} \overset{a}{B}{}_{p_0}^{\beta} D_{r_0} \overset{0}{P}{}_{\beta}^{l_a}.$$

Les équations (2.11) sont analogues aux formules de Frenet de V_n par rapport à V_m ([1], II pp. 120; [4] pp. 276). Aussi nous pouvons les appeler formules de Frenet de la géométrie conforme du sous-espace V_n d'espace riemmanien V_m par rapport au champ des tenseurs $\overset{1}{P}{}_{l_1}^{\alpha}$. On peut les écrire aussi sous la forme

(2.12) $$\mathfrak{D}_{r_0} \overset{1}{P}{}_{\alpha}^{l_1} = \overset{2}{T}{}_{r_0\,\cdot\,\alpha}^{\cdot\,l_1},$$

$$\mathfrak{D}_{r_0} \overset{a}{P}{}^{l_a}_{\alpha} = \overset{a+1}{T}{}^{\cdot\, l_a}_{r_0\, \cdot\, \alpha} - \overset{a}{T}{}^{\cdot\,\cdot\, l_a}_{r_0 \alpha}, \tag{2.12}$$

$$a = 2, 3, \ldots, k; \quad \overset{k+1}{T}{}^{\cdot\, l_k}_{n_0\, \cdot\, \alpha} = 0.$$

3. Considérons le tenseur $M_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}$ qui est invariable par rapport à la transformation conforme

$$\overline{M}_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\alpha} = M_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\alpha},$$

et qui appartient: avec l'indice r_0 à K_{n_0}, avec l'indice q_x à K_{n_x} et avec l'indice α à l'espace K_{n_a}. En appliquant au tenseur $\overline{M}_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}$ les D-symbols, nous avons

$$\overline{D}_{p_0} \overline{M}_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\tau} = \overline{\overset{0}{B}}{}^{\alpha}_{p_0} \overline{\overset{0}{B}}{}^{\rho}_{r_0} \overline{\overset{x}{P}}{}^{\chi}_{q_x} \overline{\nabla}_{\alpha} \overline{M}_{\rho\chi}^{\cdot\,\cdot\,\tau} = \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} \overset{x}{P}{}^{\chi}_{q_x} \left(\partial_{\alpha} M_{\rho\chi}^{\cdot\,\cdot\,\tau} + \overline{\begin{Bmatrix}\tau\\ \alpha\varepsilon\end{Bmatrix}} M_{\rho\chi}^{\cdot\,\cdot\,\varepsilon} - \right.$$

$$\left. - \overline{\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \alpha\rho\end{Bmatrix}} M_{\varepsilon\chi}^{\cdot\,\cdot\,\tau} - \overline{\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \alpha\chi\end{Bmatrix}} M_{\rho\varepsilon}^{\cdot\,\cdot\,\tau} \right) = \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} \overset{x}{P}{}^{\chi}_{q_x} \left[\partial_{\alpha} M_{\rho\chi}^{\cdot\,\cdot\,\tau} + \left(\begin{Bmatrix}\tau\\ \alpha\varepsilon\end{Bmatrix} + \delta^{\tau}_{\alpha} \sigma_{\varepsilon} + \delta^{\tau}_{\varepsilon} \sigma_{\alpha} - \right.\right.$$

$$\left. - a_{\alpha\varepsilon} a^{\tau\lambda} \sigma_{\lambda} \right) M_{\rho\chi}^{\cdot\,\cdot\,\varepsilon} - \left(\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \alpha\rho\end{Bmatrix} + \delta^{\varepsilon}_{\alpha} \sigma_{\rho} + \delta^{\varepsilon}_{\rho} \sigma_{\alpha} - a_{\alpha\rho} a^{\varepsilon\lambda} \sigma_{\lambda} \right) M_{\varepsilon\chi}^{\cdot\,\cdot\,\tau} -$$

$$\left. - \left(\begin{Bmatrix}\varepsilon\\ \alpha\chi\end{Bmatrix} + \delta^{\varepsilon}_{\alpha} \sigma_{\chi} + \delta^{\varepsilon}_{\chi} \sigma_{\alpha} - a_{\alpha\chi} a^{\varepsilon\lambda} \sigma_{\lambda} \right) M_{\rho\varepsilon}^{\cdot\,\cdot\,\tau} \right].$$

Mais,

$$a_{\alpha\chi} \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0} \overset{x}{P}{}^{\chi}_{q_x} = 0; \quad \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0} M_{\rho\alpha}^{\cdot\,\cdot\,\tau} = 0; \quad a_{\alpha\varepsilon} \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0} M_{\rho\chi}^{\cdot\,\cdot\,\varepsilon} = 0,$$

puisque le tenseur $M_{\rho\alpha}^{\cdot\,\cdot\,\tau}$ appartient, selon la supposition, aux espaces K_{n_x} et K_{n_a}, qui sont normaux à l'espace $K_{n_0} = E_{n_0}$. Alors,

$$\begin{aligned} \overline{D}_{p_0} \overline{M}_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\tau} &= D_{p_0} M_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\tau} + \sigma_{\varepsilon} M_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\varepsilon} \overset{0}{B}{}^{\tau}_{p_0} - \sigma_{\rho} M_{p_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\tau} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} + \\ &+ a_{p_0 r_0} a^{\varepsilon\lambda} \sigma_{\lambda} M_{\varepsilon\chi}^{\cdot\,\cdot\,\tau} \overset{x}{P}{}^{\chi}_{q_x} - \sigma_{\alpha} M_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\tau} \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

d'où

$$\overline{\overset{0}{B}}{}^{t_0}_{\nu} \overline{D}_{p_0} \overline{M}_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\nu} = \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu} D_{p_0} M_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\nu} + \sigma_{\varepsilon} M_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\varepsilon} \delta^{t_0}_{p_0} - \sigma_{\rho} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} M_{p_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\nu} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu} +$$

$$+ a_{p_0 r_0} a^{\varepsilon\lambda} \sigma_{\lambda} M_{\varepsilon\chi}^{\cdot\,\cdot\,\nu} \overset{x}{P}{}^{\chi}_{q_x} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu} - \sigma_{\alpha} M_{r_0 q_x}^{\cdot\,\cdot\,\nu} \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}$$

et

$$\overset{0}{\overline{B}}{}^{\tau}_{t_0}\overset{0}{\overline{B}}{}^{t_0}_{\nu}\overline{D}_{p_0}\overline{M}_{r_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}=\overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}D_{p_0}M_{r_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}+\sigma_{\varepsilon}M_{r_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\varepsilon}\overset{0}{B}{}^{\tau}_{p_0}-\sigma_{\rho}\overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0}M_{p_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}\overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0}+$$

$$+a_{p_0 r_0}a^{\varepsilon\lambda}\sigma_{\lambda}M_{\varepsilon\chi}^{\cdot\cdot\,\nu}\overset{x}{P}{}^{\chi}_{q_x}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}\overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0}-\sigma_{\alpha}M_{r_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}\overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0}.$$

En retranchant la dernière relation de l'équation (3.1), nous obtenons

$$\overline{D}_{p_0}\overline{M}_{r_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\tau}-\overset{0}{\overline{B}}{}^{\tau}_{t_0}\overset{0}{\overline{B}}{}^{t_0}_{\nu}\overline{D}_{p_0}\overline{M}_{r_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}=D_{p_0}M_{r_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\tau}-\overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}D_{p_0}M_{r_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}-\sigma_{\rho}M_{p_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\tau}\overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0}+$$

$$+a_{p_0 r_0}a^{\varepsilon\lambda}\sigma_{\lambda}M_{\varepsilon\chi}^{\cdot\cdot\,\tau}\overset{x}{P}{}^{\chi}_{q_x}-\sigma_{\alpha}M_{r_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\tau}\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0}+\sigma_{\rho}\overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0}M_{p_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}\overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0}-$$

$$-a_{p_0 r_0}a^{\varepsilon\lambda}\sigma_{\lambda}M_{\varepsilon\chi}^{\cdot\cdot\,\nu}\overset{x}{P}{}^{\chi}_{q_x}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}\overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0}+\sigma_{\alpha}M_{r_0 q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{p_0}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}\overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0},$$

d'où

$$\overline{D}_{[p_0}\overline{M}_{r_0]q_x}^{\cdot\cdot\,\tau}-\overset{0}{\overline{B}}{}^{\tau}_{t_0}\overset{0}{\overline{B}}{}^{t_0}_{\nu}\overline{D}_{[p_0}\overline{M}_{r_0]q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}=D_{[p_0}M_{r_0]q_x}^{\cdot\cdot\,\tau}-\overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}D_{[p_0}M_{r_0]q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}$$

ce qui signifie que le tenseur

$$\mathfrak{D}_{[p_0}M_{r_0]q_x}^{\cdot\cdot\,\tau}\equiv D_{[p_0}M_{r_0]q_x}^{\cdot\cdot\,\tau}-\overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\nu}D_{[p_0}M_{r_0]q_x}^{\cdot\cdot\,\nu}$$

est invariable par rapport à la transformation conforme (2.2) d'espace.

C'est pourquoi, en appliquant les $\mathfrak{D}$-symbols aux équations (2.11), nous concluons que les formules

(3.2)

$$\mathfrak{D}_{[p_0}\mathfrak{D}_{r_0]}\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{l_1}=\mathfrak{D}_{[p_0}\overset{2}{T}{}_{r_0]\,l_1}^{\cdot\cdot\,\alpha}$$

$$\mathfrak{D}_{[p_0}\mathfrak{D}_{r_0]}\overset{a}{P}{}^{\alpha}_{q_a}=\mathfrak{D}_{[p_0}\overset{a+1}{T}{}_{r_0]\,q_a}^{\cdot\cdot\,\alpha}-\mathfrak{D}_{[p_0}\overset{a}{T}{}_{r_0]\cdot q_a}^{\cdot\,\alpha}$$

sont invariables par rapport à la transformation conforme.

Comme, par définition, on a

$$\mathfrak{D}_{p_0}(\mathfrak{D}_{r_0}\overset{a}{P}{}^{\alpha}_{q_a})=D_{p_0}(\mathfrak{D}_{r_0}\overset{a}{P}{}^{\alpha}_{q_a})-\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{t_0}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\beta}D_{p_0}(\mathfrak{D}_{r_0}\overset{a}{P}{}^{\beta}_{q_a})=$$

$$=D_{p_0}(D_{r_0}\overset{a}{P}{}^{\alpha}_{q_a}-\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{k_0}\overset{0}{B}{}^{k_0}_{\gamma}D_{r_0}\overset{a}{P}{}^{\gamma}_{q_a})-\overset{0}{B}{}^{\alpha}_{t_0}\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\beta}D_{p_0}(D_{r_0}\overset{a}{P}{}^{\beta}_{q_a}-\overset{0}{B}{}^{\beta}_{b_0}\overset{0}{B}{}^{b_0}_{\chi}D_{r_0}\overset{a}{P}{}^{\chi}_{q_a})=$$

$$= D_{p_0} D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\alpha}_{q_a} - (D_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{k_0}) \overset{0}{B}{}^{k_0}_{\gamma} (D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\gamma}_{q_a}) - \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{k_0} (D_{p_0} \overset{0}{B}{}^{k_0}_{\gamma}) (D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\gamma}_{q_a}) -$$

$$- \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{k_0} \overset{0}{B}{}^{k_0}_{\gamma} D_{p_0} D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\gamma}_{q_a} - \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{t_0} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\beta} D_{p_0} D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\beta}_{q_a} + \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{t_0} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\beta} (D_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\beta}_{b_0}) \overset{0}{B}{}^{b_0}_{\chi} (D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\chi}_{q_a}) +$$

$$+ \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{t_0} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\beta} \overset{0}{B}{}^{\beta}_{b_0} (D_{p_0} \overset{0}{B}{}^{b_0}_{\chi}) (D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\chi}_{q_a}) + \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{t_0} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\beta} \overset{0}{B}{}^{\beta}_{b_0} \overset{0}{B}{}^{b_0}_{\chi} D_{p_0} D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\chi}_{q_a},$$

et comme

$$\overset{0}{B}{}^{t_0}_{\beta} (D_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\beta}_{b_0}) = 0,$$

et de

$$\overset{0}{B}{}^{k_0}_{\gamma} \overset{a}{P}{}^{\chi}_{q_a} = 0$$

il suit

$$\overset{0}{B}{}^{k_0}_{\gamma} D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\gamma}_{q_a} = - \overset{a}{P}{}^{\gamma}_{q_a} D_{r_0} \overset{0}{B}{}^{k_0}_{\gamma} = - \overset{a}{P}{}^{\gamma}_{q_a} \overset{1}{H}{}_{r_0\cdot\gamma}^{\cdot k_0},$$

où $\overset{1}{H}{}_{r_0\cdot\gamma}^{\cdot k_0}$ est le tenseur de première courbure ([1], II, pp. 120; [4], pp. 276) du sous-espace V_n relative à l'espace ambiant V_m, nous avons

$$\mathfrak{D}_{p_0} \mathfrak{D}_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\alpha}_{q_a} = D_{p_0} D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\alpha}_{q_a} - \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{t_0} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\beta} D_{p_0} D_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\beta}_{q_a} + \overset{1}{H}{}_{p_0 k_0}^{\cdot\cdot\alpha} \overset{1}{H}{}_{r_0\cdot\gamma}^{\cdot k_0} \overset{a}{P}{}^{\gamma}_{q_a}.$$

Alors, nous pouvons exprimer les équations (3.2) sous la forme

$$D_{[p_0} D_{r_0]} \overset{a}{P}{}^{\alpha}_{q_a} - \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{t_0} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\beta} D_{[p_0} D_{r_0]} \overset{a}{P}{}^{\beta}_{q_a} + \overset{1}{H}{}_{[p_0|k_0|}{}^{\alpha} \overset{1}{H}{}_{r_0]\cdot\gamma}^{\cdot k_0} \overset{a}{P}{}^{\gamma}_{q_a} =$$

$$= \mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a+1}{T}{}_{r_0]q_a}^{\cdot\cdot\alpha} - \mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a}{T}{}_{r_0]\cdot q_a}^{\cdot\alpha} \tag{3.3}$$

$$\overset{1}{T}{}_{r_0 q_0}^{\cdot\cdot\alpha} = \overset{k+1}{T}{}_{r_0 q_k}^{\cdot\cdot\alpha} = 0; \quad a = 1, 2, \ldots, k.$$

D'autre part, si $\underset{t}{i}{}^{\chi}$ $(t = 1, 2, \ldots, a)$ est un t-èdre d'espace K_{n_a}, nous pouvons poser, dans un système spécial des coordonnées,

$$P^{p_a}_{r_0 q_a} = - \underset{r_0}{i}{}^{\alpha} \underset{q_a}{i}{}^{\beta} \nabla_{\alpha} \overset{p_a}{i}_{\beta}.$$

Alors, pour un vecteur v_{q_a} d'espace K_{n_a} il est

$$D_{[p_0} D_{r_0]} v_{q_a} = (- \partial_{[p_0} P^{t_a}_{r_0] q_a} + P^{l_0}_{[p_0 r_0]} P^{t_a}_{l_0 q_a}) \, v_{t_a} = -1/2 \overset{a}{P}{}_{p_0 r_0 q_a}^{\cdot \; \cdot \; \cdot \; t_a} \, v_{t_a} \, ,$$

d'où

$$D_{[p_0} D_{r_0]} \overset{a}{P}{}^{\alpha}_{q_a} = 1/2 \, \overset{0}{B}{}^{\nu}_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\tau}_{q_a} P_{\nu\rho\tau}{}^{\alpha} - 1/2 \, \overset{a}{P}{}^{\alpha}_{q_a} \overset{a}{P}{}_{p_0 r_0 q_a}^{\cdot \; \cdot \; \cdot \; p_a} ,$$

et les équations (3.3) prennent la forme

$$\begin{aligned} & (P_{\nu\rho\tau}{}^{\alpha} - \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{t_0} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\beta} P_{\nu\rho\tau}{}^{\beta}) \, \overset{0}{B}{}^{\nu}_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\tau}_{q_a} - \overset{a}{P}{}^{\alpha}_{p_a} \overset{a}{P}{}_{p_0 r_0 q_a}{}^{p_a} = \\ & = 2 \mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a+2}{T}{}_{r_0] q_a}^{\cdot \; \cdot \alpha} - 2 \mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a}{T}{}_{r_0] \cdot q_a}^{\cdot \; \alpha} - 2 \overset{1}{H}{}_{[p_0 | k_0 |}^{\cdot \quad \cdot \; \alpha} \overset{1}{H}{}_{r_0] \cdot \chi}^{\cdot \; k_0} \overset{a}{P}{}^{\chi}_{q_a} . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Les équations (3.3), aussi bien que les équations (3.4) sont invariables par rapport à la transformation conforme (2.2).

Pour obtenir les nouvelles équations de la géométrie conforme du sous-espace V_n d'espace V_m, remarquons que

$$\overset{a}{T}{}_{r_0 q_{a-1}}^{\cdot \; \cdot \quad \chi} = \overset{a}{T}{}_{r_0 q_{a-1}}^{\cdot \; \cdot \quad t_a} \overset{a}{P}{}^{\chi}_{t_a} ,$$

à savoir

$$\overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\chi} \overset{a}{T}{}_{r_0 q_{a-1}}^{\cdot \; \cdot \quad \chi} = \overset{a}{T}{}_{r_0 q_{a-1}}^{\cdot \; \cdot \quad t_a} \overset{a}{P}{}^{\chi}_{t_a} \overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\chi} = 0 .$$

C'est pourquoi

$$D_{p_0} (\overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\chi} \overset{a}{T}{}_{r_0 q_{a-1}}^{\cdot \; \cdot \quad \chi}) = 0 ,$$

d'où

$$\begin{aligned} \overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\chi} D_{p_0} \overset{a}{T}{}_{r_0 q_{a-1}}^{\cdot \; \cdot \quad \chi} &= - \overset{a}{T}{}_{r_0 q_{a-1}}^{\cdot \; \cdot \quad \chi} D_{p_0} \overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\chi} = \\ &= - \overset{a}{T}{}_{r_0 q_{a-1}}^{\cdot \; \cdot \quad \chi} (D_{p_0} \overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\chi} - \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\chi} \overset{0}{B}{}^{\nu}_{t_0} D_{p_0} \overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\nu}) \end{aligned}$$

puisque

$$\overset{a}{T}{}_{r_0 q_{a-1}}^{\cdot \; \cdot \quad \chi} \overset{0}{B}{}^{t_0}_{\chi} = 0 .$$

Alors,

$$\overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\varkappa} D_{p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} = - \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} \mathfrak{D}_{p_0} \overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\varkappa},$$

d'où, en vertu de (2.12)

$$\overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\varkappa} D_{p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} = - \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} \left(- \overset{a-1}{T}{}^{\cdot\ l_{a-1}}_{p_0 \varkappa} + \overset{a}{T}{}^{\cdot\ l_{a-1}}_{p_0\ \cdot\ \varkappa} \right),$$

et comme

$$\overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} \overset{a-1}{T}{}^{\cdot\ l_{a-1}}_{p_0 \varkappa} = \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ t_a}_{r_0 q_{a-1}} \overset{a-1}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ l_{a-1}}_{p_0 k_{a-2}} \overset{a}{P}{}^{\varkappa}_{t_a} \overset{a-2}{P}{}^{k_{a-2}}_{\varkappa} = 0,$$

nous avons

$$\overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\varkappa} D_{p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} = - \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ l_{a-1}}_{p_0\ \cdot\ \varkappa}.$$

D'autre part

$$\overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\varkappa} \mathfrak{D}_{p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} = \overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\varkappa} \left(D_{p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} - \overset{0}{B}{}^{\varkappa}_{k_0} \overset{0}{B}{}^{k_0}_{\nu} D_{p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \nu}_{r_0 q_{a-1}} \right) =$$

$$= \overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\varkappa} D_{p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}},$$

et par suite

$$\overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\varkappa} \mathfrak{D}_{r_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} = - \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0 q_{a-1}} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ l_{a-1}}_{p_0\ \cdot\ \varkappa}.$$

Par une voie analogue, nous déduisons les équations suivantes, invariables par rapport à la transformation conforme,

$$(3.5)\qquad \begin{aligned}
&\left(\mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0] q_{a-1}}\right) \overset{a-1}{P}{}^{l_{a-1}}_{\varkappa} = - \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{[r_0 | q_{a-1} |} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ l_{a-1}}_{p_0]\ \cdot\ \varkappa} \\
&\left(\mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0] q_{a-1}}\right) \overset{a}{P}{}^{k_a}_{\varkappa} = D_{[p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ k_a}_{r_0] q_{a-1}} \\
&\left(\mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0] q_{a-1}}\right) \overset{a+1}{P}{}^{k_{a+1}}_{\varkappa} = \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{[r_0 | q_{a-1} |} \overset{a+1}{T}{}^{\cdot\ k_{a+1}}_{p_0] \varkappa} \\
&\left(\mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a}{T}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa}_{r_0] q_{a-1}}\right) \overset{b}{P}{}^{k_b}_{\varkappa} = 0 \quad \text{pour} \quad b \neq a-1, a, a+1
\end{aligned}$$

$$(3.5)\qquad (\mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a}{T}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,\varkappa}_{\cdot\,q_a}) \overset{a-2}{P}{}^{k_{a-2}}_{\varkappa} = -\overset{a}{T}{}_{[r_0}{}^{\cdot\,\varkappa\,\cdot}_{\cdot\,|q_a|} \overset{a-1}{T}{}_{p_0]}{}^{\cdot\,k_{a-2}\,\cdot}_{\cdot\qquad\varkappa}$$

$$(\mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a}{T}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,\varkappa}_{\cdot\,q_a}) \overset{a-1}{P}{}^{k_{a-1}}_{\varkappa} = D_{[p_0} \overset{a}{T}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,k_{a-1}}_{\cdot\,q_a}$$

$$(\mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a}{T}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,\varkappa}_{\cdot\,q_a}) \overset{a}{P}{}^{k_a}_{\varkappa} = \overset{a}{T}{}_{[r_0}{}^{\cdot\,\varkappa\,\cdot}_{\cdot\,|q_a|} \overset{a}{T}{}_{p_0]\varkappa}{}^{\cdot\,k_a}$$

$$(\mathfrak{D}_{[p_0} \overset{a}{T}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,\varkappa\,\cdot}_{\cdot\,q_a}) \overset{b}{P}{}^{k_b}_{\varkappa} = 0, \quad \text{pour} \quad b \neq a-2,\ a-1,\ a.$$

En vertu de cela, nous obtenons de (3.4) les équations

$$\overset{0}{B}{}^{\nu}_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\tau}_{q_a} \overset{a-2}{P}{}^{s_{a-2}}_{\alpha} P_{\nu\rho\tau}{}^{\alpha} = 2\overset{a}{T}{}_{[r_0}{}^{\cdot\,\varkappa\,\cdot}_{\cdot\,|q_a|} \overset{a-1}{T}{}_{p_0]}{}^{\cdot\,s_{a-2}\,\cdot}_{\cdot\qquad\varkappa} - 2\overset{a-2}{P}{}^{s_{a-2}}_{\alpha} \overset{a}{P}{}^{\varkappa}_{q_a} \overset{1}{H}{}_{[p_0|k_0|}{}^{\alpha} \overset{1}{H}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,k_0}_{\cdot\,\varkappa}$$

$$\overset{0}{B}{}^{\nu}_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\tau}_{q_a} \overset{a-1}{P}{}^{s_{a-1}}_{\alpha} P_{\nu\rho\tau}{}^{\alpha} = -2D_{[p_0} \overset{a}{T}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,s_{a-1}}_{\cdot\,q_a} - 2\overset{a-1}{P}{}^{s_{a-1}}_{\alpha} \overset{a}{P}{}^{\varkappa}_{q_a} \overset{1}{H}{}_{[p_0|k_0|}{}^{\alpha} \overset{1}{H}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,k_0}_{\cdot\,\varkappa}$$

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} \overset{0}{B}{}^{\nu}_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\tau}_{q_a} \overset{a}{P}{}^{s_a}_{\alpha} P_{\nu\rho\tau}{}^{\alpha} &= \overset{a}{P}{}_{p_0 r_0 q_a}^{\cdot\ \cdot\ \cdot\ s_a} - 2\overset{a}{T}{}_{[r_0}{}^{\cdot\,\varkappa\,\cdot}_{\cdot\,|q_a|} \overset{a}{T}{}_{p_0]}{}^{\cdot\,s_a}_{\cdot\ \varkappa} - \\ &\quad -2\overset{a+1}{T}{}_{[r_0|q_a|}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa} \overset{a+1}{T}{}_{p_0]}{}^{\cdot\,s_a\,\cdot}_{\cdot\qquad\varkappa} - 2\overset{1}{H}{}_{[p_0|k_0|}{}^{\alpha} \overset{1}{H}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,k_0}_{\cdot\,\varkappa} \overset{a}{P}{}^{\varkappa}_{q_a} \overset{a}{P}{}^{s_a}_{\alpha} \end{aligned}$$

$$\overset{0}{B}{}^{\nu}_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\tau}_{q_a} \overset{a+1}{P}{}^{s_{a+1}}_{\alpha} P_{\nu\rho\tau}{}^{\alpha} = 2D_{[p_0} \overset{a+1}{T}{}_{r_0]q_a}{}^{\cdot\ \cdot\ s_{a+1}} - 2\overset{1}{H}{}_{[p_0|k_0|}{}^{\alpha} \overset{1}{H}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,k_0}_{\cdot\,\varkappa} \overset{a}{P}{}^{\varkappa}_{q_a} \overset{a+1}{P}{}^{s_{a+1}}_{\alpha}$$

$$\overset{0}{B}{}^{\nu}_{p_0} \overset{0}{B}{}^{\rho}_{r_0} \overset{a}{P}{}^{\tau}_{q_a} \overset{a+2}{P}{}^{s_{a+2}}_{\alpha} P_{\nu\rho\tau}{}^{\alpha} = 2\overset{a+1}{T}{}_{[r_0|q_a|}{}^{\cdot\ \cdot\ \varkappa} \overset{a+2}{T}{}_{p_0]\varkappa}{}^{\cdot\,s_{a+2}} - 2\overset{1}{H}{}_{[p_0|k_0|}{}^{\alpha} \overset{1}{H}{}_{r_0]}{}^{\cdot\,k_0}_{\cdot\,\varkappa} \overset{a}{P}{}^{\varkappa}_{q_a} \overset{a+2}{P}{}^{s_{a+2}}_{\alpha},$$

de même invariables par rapport à la transformation conforme. Elles sont analogues aux équations de Gauss et de Codazzi de V_n de V_m. Pour cette raison nous les appellerons équations conformes de Gauss et Codazzi de sous-espace V_n d'espace rimannien V_m, par rapport au champ de tenseurs $\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{i_1}$.

4. Envisageons maintenant le cas où le sous-espace V_n est une courbe, c'est-à-dire le cas $r=1$. Alors, nous nous servons de la dérivation absolue au lieu de la dérivée covariante. Par example, si nous appliquons au tenseur

$$(4.1)\qquad \overline{w}_{\alpha\beta}^{\gamma} = e^{\sigma}\, w_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

appartenant, avec tous ces indices, à l'espace qui est normale au vecteur unitaire $\bar{\xi}^\alpha$ de la tangente de la courbe $\bar{C}$: $\bar{y}^\alpha = \bar{y}^\alpha(\bar{s})$, la dérivation absolue, nous aurons

$$\frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{d}{d\bar{s}} \bar{w}_{\alpha\beta}^{\gamma} - \overline{\left\{ {\mu \atop \alpha\ \tau} \right\}} \bar{w}_{\mu\beta}^{\gamma} \bar{\xi}^\tau - \overline{\left\{ {\mu \atop \tau\ \beta} \right\}} \bar{w}_{\alpha\mu}^{\gamma} \bar{\xi}^\tau + \overline{\left\{ {\gamma \atop \mu\ \tau} \right\}} \bar{w}_{\alpha\beta}^{\mu} \bar{\xi}^\tau .$$

De là, en vertu de (4.1), (2.3) et du fait que, par la transformation conforme, on a

$$\bar{\xi}^\alpha = e^{-\sigma} \xi^\alpha ,$$

nous obtenons

$$\frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{d}{d\bar{s}} (e^\sigma w_{\alpha\beta}^{\gamma}) - \left(\left\{ {\mu \atop \alpha\ \tau} \right\} + \delta_\alpha^\mu \sigma_\tau + \delta_\tau^\mu \sigma_\alpha - a_{\alpha\tau} a^{\mu\lambda} \sigma_\lambda \right) w_{\mu\beta}^{\gamma} \xi^\tau -$$

$$- \left(\left\{ {\mu \atop \tau\ \beta} \right\} + \delta_\tau^\mu \sigma_\beta + \delta_\beta^\mu \sigma_\tau - a_{\tau\beta} a^{\mu\lambda} \sigma_\lambda \right) w_{\alpha\mu}^{\gamma} \xi^\tau +$$

$$+ \left(\left\{ {\gamma \atop \mu\ \tau} \right\} + \delta_\mu^\gamma \sigma_\tau + \delta_\tau^\gamma \sigma_\mu - a_{\mu\tau} a^{\gamma\lambda} \sigma_\lambda \right) w_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^\tau$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\beta}^{\gamma} + a_{\alpha\tau} a^{\mu\lambda} \sigma_\lambda w_{\mu\beta}^{\gamma} \xi^\tau + a_{\tau\beta} a^{\mu\lambda} \sigma_\lambda w_{\alpha\mu}^{\gamma} \xi^\tau + w_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^\gamma \sigma_\mu . \tag{4.2}$$

Après la multiplication de cette relation par $\bar{\xi}^\alpha = e^{-\sigma} \xi^\alpha$, nous avons

$$\bar{\xi}^\alpha \frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\alpha\beta}^{\gamma} = e^{-\sigma} \left(\xi^\alpha \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\beta}^{\gamma} + a^{\mu\lambda} \sigma_\lambda w_{\mu\beta}^{\gamma}\right)$$

d'où

$$\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}^\nu \frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\nu\beta}^{\gamma} = \xi_\alpha \xi^\nu \frac{\delta}{\delta s} w_{\nu\beta}^{\gamma} + a_{\alpha\tau} a^{\mu\lambda} \sigma_\nu w_{\mu\beta}^{\gamma} \xi^\tau . \tag{4.3}$$

De la même manière

$$\bar{\xi}^\beta \frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\alpha\beta}^{\gamma} = e^{-\sigma} \left(\xi^\beta \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\beta}^{\gamma} + a^{\mu\lambda} \sigma_\lambda w_{\alpha\mu}^{\gamma}\right)$$

$$\bar{\xi}_\beta \bar{\xi}^\nu \frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\alpha\nu}^{\gamma} = \xi_\beta \xi^\nu \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\nu}^{\gamma} + a_{\tau\beta} a^{\mu\lambda} \sigma_\lambda w_{\alpha\mu}^{\gamma} \xi^\tau , \tag{4.4}$$

et enfin

$$\bar{\xi}_\gamma \frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\alpha\beta}^{\gamma} = e^\sigma \left(\xi_\gamma \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\beta}^{\gamma} + w_{\alpha\beta}^{\mu} \sigma_\mu \right)$$

$$\bar{\xi}^\gamma \bar{\xi}_\nu \frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \xi^\gamma \xi_\nu \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\beta}^{\gamma} + w_{\alpha\beta}^{\mu} \xi^\gamma \sigma_\mu . \tag{4.5}$$

En retranchant les équations (4.3), (4.4), (4.5) de l'équation (4.2) on obtient

$$\frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}^\nu \frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\nu\beta}{}^{\gamma} - \bar{\xi}_\beta \bar{\xi}^\nu \frac{\delta}{\delta \bar{s}} \bar{w}_{\alpha\nu}{}^{\gamma} - \bar{\xi}^\gamma \bar{\xi}_\nu \frac{\delta}{\delta \bar{s}} w_{\alpha\beta}{}^{\nu} =$$

$$= \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \xi_\alpha \xi^\nu \frac{\delta}{\delta s} w_{\nu\beta}{}^{\gamma} - \xi_\beta \xi^\nu \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\nu}{}^{\gamma} - \xi^\gamma \xi_\nu \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\beta}{}^{\nu},$$

ce qui signifie que le tenseur

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} w_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \xi_\alpha \xi^\nu \frac{\delta}{\delta s} w_{\nu\beta}{}^{\gamma} - \xi_\beta \xi^\nu \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\nu}{}^{\gamma} - \xi^\gamma \xi_\nu \frac{\delta}{\delta s} w_{\alpha\beta}{}^{\nu}$$

est invariable par rapport à la transformation (2.2).

On peut montrer, de la même manière, que le tenseur

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_s} w^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} = \frac{\delta}{\delta s} w^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} - \xi_{\alpha_1} \xi^\sigma \frac{\delta}{\delta s} w^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_q}_{\sigma\, \alpha_2 \ldots \alpha_p} -$$

$$- \xi_{\alpha_r} \xi^\sigma \frac{\delta}{\delta s} w^{\beta_1 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1} \sigma\, \alpha_{r+1} \ldots \alpha_p} - \cdots - \xi^{\beta_t} \xi_\sigma \frac{\delta}{\delta s} w^{\beta_1 \ldots \beta_{t-1} \sigma\, \beta_{t+1} \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_p}$$

se transforme, par la transformation (2.2), de telle sorte que

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}\bar{s}} \bar{w}^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = e^{(p-q-1)\sigma} \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} w^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha \ldots \alpha_p},$$

à condition que le tenseur

$$\bar{w}^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = e^{(p-q)\sigma} w^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha \ldots \alpha_p}$$

appartient, avec tous ces indices, à l'espace qui est normal au vecteur tangent ξ^α de la courbe C.

Spécialement, le vecteur $\bar{w}^\alpha_1 = e^{-\sigma} w^\alpha_1$ étant normal au vecteur de la tangente de la courbe, mais ne coïncidant pas avec son vecteur de première courbure, la direction du vecteur

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} w^\alpha_1 = \frac{\delta}{\delta s} w^\alpha_1 - \xi^\alpha \xi_\nu \frac{\delta}{\delta s} w^\nu_1$$

est normale tant au vecteur ξ^α qu'au vecteur w^α_1; aussi il est invariable par rapport à la transformation conforme. Puis, en désignant par w^α_2 le vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} w^\alpha_1$, on peut montrer que la direction du vecteur

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} \underset{2}{w^\alpha} = \frac{\delta}{\delta s} \underset{2}{w^\alpha} - \xi^\alpha \xi_\nu \frac{\delta}{\delta s} \underset{1}{w^\alpha}$$

est invariable par rapport à la transformation conforme, et que le vecteur

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} \underset{2}{w^\alpha} + \overset{1}{k} \underset{1}{w^\alpha} = \overset{2}{k} \underset{3}{w^\alpha},$$

où

$$(\overset{1}{k})^2 = a_{\alpha\beta} \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} \underset{1}{w^\alpha} \right) \left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} \underset{2}{w^\beta} \right),$$

est normal aux vecteurs ξ^α, $\underset{1}{w^\alpha}$ et $\underset{2}{w^\alpha}$.

De cette façon nous obtenons les équations conformes de Frenet

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} \underset{1}{w^\alpha} = \overset{1}{k} \underset{2}{w^\alpha}$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}s} \underset{a}{w^\alpha} = -\overset{a-1}{k} \underset{a-1}{w^\alpha} + \overset{a}{k} \underset{a+1}{w^\alpha} \qquad (a = 2, 3, \ldots, k;\ \overset{n}{k} = 0)$$

de la courbe C, par rapport au champ de vecteurs $\underset{1}{w^\alpha}$, données par K. Yano [2] comme les équations de Frenet de la géométrie concirculaire, pour le cas

$$\underset{1}{w^\alpha} = \frac{\delta^3 y^\alpha}{\delta s^3} + \frac{\delta y^\alpha}{\delta s} a_{\beta\gamma} \frac{\delta^2 y^\beta}{\delta s^2} \frac{\delta^2 y^\gamma}{\delta s^2}.$$

(Reçu le 5 juin 1957)

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. A. Schouten und D. J. Struik — Einführung in neueren Methoden der Differentialgeometrie I, II, Noordhoff, Groningen (1935; 1938)

[2] K. Yano — Concircular Geometry III, Theory of Curves, *Proc. Imperial Academy*, **XVI** № 9 (1940).

[3] A. Fialkow — Conformal Differential Geometry, *Trans. Amer. Math. Soc.* **56**, № 22 (1944).

[4] J. A. Schouten — Ricci Calculus, Springer-Verlag, Berlin (1954).