QUELQUES REMARQUES SUR LES HYPERMATRICES

Par

MIRKO STOJAKOVIĆ (Novi Sad)

Les matrices définies sur un anneau de matrices carrées ont été considérées par plusieurs auteurs (par exemple — [1], [2]. [3] etc.). On appelle de telles matrices „hypermatrices" surtout si l'anneau définissant des matrices carrées est commutatif. Dans la théorie des matrices on considère les matrices qui ont été subdivisées d'abord en sousmartices rectangulaires („partitioned matrices") et puis traitées dans les opérations matricielles comme si ces sousmatrices étaient les éléments usuels des matrices, le résultat étant toujours le même sous certaines conditions restrictives. Ces considérations ont conduit à définir pour ces matrices aussi les notions du déterminant, du mineur, de la matrice adjointe etc. Dans [1], [2], on donne quelques théorèmes sur ces notions mais dans le théorème fondamental sur le déterminant d'une hypermatrice on utilise la notion de la continuité étrangère à l'algèbre. On reprend ici ces questions en donnant les démonstrations algébriques des théorèmes.

A

Dans [3], Фадеев et Somински démontrent le théorème suivant:

Soit C une matrice d'ordre $mn \times mn$ partagée en n^2 sousmatrices A_{ij} carrées d'ordre $m \times m$, commutatives par rapport à la multiplication des matrices. Soit

$$B = \sum \pm A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{ni_n}; \; (i_1, i_2, \dots, i_n) = p\,(1, 2, \dots, n).$$

Alors, le déterminant de B est égal au déterminant de C.

La démonstration par induction totale suppose la régularité de la matrice A_{11}. Pour se débarasser de cette restriction on considère une matrice $C(\lambda)$ qui au lieu de A_{11} a $A_{11}+\lambda E_m$, le reste étant le même, et on compare les termes constants de $\det C(\lambda)$ et de $\det B(\lambda)$, où $B(\lambda)$ est une certaine fonction de $C(\lambda)$, ce qui donne le théorème même si $\det A_{11}=0$.

Dans [4] ce théorème est démontré en supposant que les sousmatrices

$$A'_k=\begin{bmatrix} A_{11} \,.\,.\, A_{1k} \\ . \quad ... \\ A_{k1} \,.\,.\, A_{kk} \end{bmatrix},$$

sont régulières. Par raison de continuité, d'après [4], le théorème est valable même si ces matrices A'_k ne sont pas régulières.

B

1°. — Si Q est un anneau de matrices $A, B, \ldots$ d'ordre $m\times m$ définies sur un anneau commutatif R des matrices carrées $a, b, \ldots$ d'ordre $n\times n$, définies à leur tour sur un corps commutatif K des scalaires $\alpha, \beta, \ldots$, on peut alors considérer Q comme le sousanneau de l'anneau des matrices carrées d'ordre $mn\times mn$ définies sur K. On peut, donc, définir deux espèces de déterminants d'un élément A de Q, l'une par rapport à R, l'autre par rapport à K. Notons ces deux déterminants par $\det_R A$ resp. $\det_K A$.

Soit

$$A\equiv[a_{ij}]\equiv[\alpha_{lk}];\ i, j=1, 2, \ldots m;\ l, k=1, 2, \ldots, mn$$
$$(a_{ij}\equiv[\alpha_{l_{(i,j)}\,k_{(i,j)}}]).$$

Alors,

$$\det_R A=\sum\pm(a_{1i_1}\,a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}),$$
$$\det_K A=\sum\pm(\alpha_{1i_1}\,\alpha_{2i_2}\cdots \alpha_{mn\,i_{mn}}),$$

$\det_R A$ étant la somme des éléments de R est lui-même un élément de R: $\det_R A\in R$.

Le théorème fondamental peut être énoncé maintenant de la façon suivante:

THÉORÈME 1. $\det_K A\equiv\det_K(\det_R A)$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après [5], il existe une et une seule fonction ϑ des élément d'un anneau $\mathcal{A}$ des matrices carrées d'ordre $k\times k$ qui vérifie les conditions suivantes:

a) $\vartheta(U+X+Y)\equiv\vartheta(U+X)+\vartheta(U+Y)$;

b) $\vartheta(WV)\equiv\vartheta(W)\vartheta(V)$,

pour tout $W, V\in \mathcal{A}$ et où

$$U=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{k1} & u_{k2} & \cdots & u_{kk} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad Y=\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_k \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$U, X, Y\in \mathcal{A}$. Cette fonction est le déterminant: $\vartheta(A)=\det(A)$ pour tout A. C'est donc d'après (a), (b) une fonction additive par rapport aux éléments de la première ligne de la matrice A et multiplicative.

Appliquons ce résultat au cas $\mathcal{A}\equiv Q$.

Soient données deux matrices quelconques A, B, de Q, $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, Alors

$$\det_R A=\sum_{i=1}^{m} a_{1i}\, M_{1i}$$

où M_{1i} est le complément algébrique de A_{1i}. Par suite, $\det_R A$ est une fonction algébrique homogène linéaire des éléments a_{1i} de la première ligne („bande") de A. Les éléments de la première ligne de la matrice $\det_R A$ sont les formes linéaires des éléments de la première ligne de A à cause de la multiplication „ligne par colonne" entre a_{1i} et M_{1i}. La fonction $\det_K(\det_R A)$ est elle aussi une fonction linéaire homogène des éléments de la première ligne de A (comme fonction linéaire des fonctions linéaires). Il suit que $\det_K(\det_R A)$ vérifie la condition (a), $\det_K A$ la vérifiant par définition même.

On a de même

$$\det_R(AB)=\det_R A\cdot\det_R B,$$

$$\det_K(AB)=\det_K A\cdot\det_K B,$$

par la définition et, comme d'après ce qui précède

$$\det_K(\det_R(AB))=\det_K(\det_R A\,\det_R B)=\det_K(\det_R A)\,\det_K(\det_R B),$$

on voit que $\det_K(\det_R A)$ vérifie aussi la condition (b). Une seule fonction vérifiant ces conditions à la fois, on conclut que

$$\det_K(\det_R A)=\det_K A$$

pour tout $A\in Q$, *CQFD*.

2°. — On peut aisément vérifier directement ce théorème dans un cas spécial.

Si $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un polynôme à coéfficients dans K, et si au lieu de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on pose dans $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les matrices scalaires

$$[\alpha_1 \delta_j^i], [\alpha_2 \delta_j^i], \ldots, [\alpha_n \delta_j^i]$$

on obtient la matrice

$$p([\alpha_1 \delta_j^i], \ldots, [\alpha_n \delta_j^i]).$$

Pour cette matrice la relation suivante est valable:

$$\det_K (p([\alpha_1 \delta_j^i], \ldots, [\alpha_n \delta_j^i])) = p^n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n).$$

Si maintenant $B^* \equiv [b_{ij}]$; $ij = 1, 2, \ldots, n$ est une hypermatrice de Q, R étant pour le moment l'ensemble des matrices scalaires $b_{ij} = [\beta_{ij} \delta_k^l]$; $l, k = 1, 2, \ldots, m$ on aura d'après ce qui précède

$$(*) \qquad \det_K B^* = \det_K(\det_R B^*) = \det_K (\sum \pm b_{i1} \cdots b_{ni_n}) = \det^m b,$$

où l'on a posé

$$b = \begin{bmatrix} \beta_{11} \cdots \beta_{1n} \\ \cdot \quad \cdots \\ \beta_{n1} \cdots \beta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Si A^* est une matrice de Q „scalaire" par rapport à R, c'est-à-dire une matrice qui dans la diagonale principale a une même matrice a d'ordre $m \times m$, le reste étant égal au zéro, alors, d'après le théorème de Laplace, d'après le théorème [1] et d'après (*)

$$\det_K A^* B^* = \det_K A^* \det_K B^* = \det_K (\det_R A^*) \cdot \det_K (\det_R B^*) = \det_K^n a \cdot \det_K^m b$$

ce qui est le

THÉORÈME 2. *Le déterminant du produit direct* $(A^* B^* \equiv) a \cdot \times b$ *des matrices* a, b (E g e r v á r y, [4], p. 215) *est égal au produit* $\det^n a \cdot \det^m b$.

3°. — Déduisons à titre d'une comparaison postérieure encore le théorème sur la matrice adjointe de $A \in Q$. Dans ce cas on peut encore distinguer deux espèces de matrices adjointes de A, l'une par rapport à R, l'autre par rapport à K. Nous désignerons ces deux matrices par $\mathrm{adj}_R A$ resp. $\mathrm{adj}_K A$ Il faut aussi noter que $\mathrm{adj}_R A \in Q$, tandis que pour $\mathrm{adj}_K A$ on ne peut rien dire sur l'appartenance à Q.

On sait que d'après la propriété fondamentale de la matrice adjointe

$$A \operatorname{adj}_R A = [(\det_R A)\, \gamma_k^l],$$

$$A \operatorname{adj}_K A = [(\det_K A)\, \beta_s^r]$$

$$\det_R A \cdot \operatorname{adj}_K (\det_R A) = [\det_K (\det_R A)\, \delta_j^i],$$

où

$$\gamma_k^l = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} & \text{pour } l \neq k, \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} & \text{pour } l = k, \end{cases}$$

$$l, k = 1, 2, \ldots, m; \quad \gamma_k^l \in R,$$

$$\beta_s^r = \begin{cases} 0 & \text{pour } r \neq s, \\ 1 & \text{pour } r = s; \quad r, s = 1, 2, \ldots, mn. \end{cases}$$

On a par suite

$$\begin{aligned} A \operatorname{adj}_K A &= [(\det_K A)\, \beta_s^r] = [\det (\det_R A)\, \beta_s^r] = \\ &= [[\det_K (\det_R A)\, \delta_j^i]\, \gamma_k^l] = [\det_R A \cdot \operatorname{adj}_K (\det_R A)\, \gamma_k^l] = \\ &= [\det_R A\, \gamma_k^l]\, [\operatorname{adj}_K (\det_R A)\, \gamma_k^l] = \\ &= A\, \{\operatorname{adj}_R A \cdot [\operatorname{adj}_K (\det_R A)\, \gamma_k^l]\} \end{aligned}$$

d'où le

THÉORÈME 3. (Egerváry [4], p. 215)

$$\operatorname{adj}_K A = \operatorname{adj}_R A \cdot [\operatorname{adj}_K (\det_R A)\, \gamma_k^l].$$

4°. — Soit

$$E_{mn} = [\varepsilon_{lk}]$$

la matrice d'ordre $mn \times mn$ dont les éléments ε_{lk} vérifient la condition

$$\varepsilon_{(i-1)\, m+k,\, j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq j \\ 1 & \text{pour } k = j; \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Cette matrice est orthogonale

$$E_{mn}^2 = 1$$

c'est-à-dire

$$E_{mn} = E_{mn}^{-1}.$$

Soit maintenant

$$D^* = [d_{ij}]$$

une hypermatrice de Q dont les éléments $d_{ij} \in R$ sont les matrices diagonales

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} \rho_{ij}^{(1)} & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ 0 & \rho_{ij}^{(2)} & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot\,\cdot & \rho_{ij}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

On peut aisément prouver que dans ce cas

$$E_{mn}^{-1} D^* E_{mn} = D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ 0 & d_2 & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot\,\cdot & d_m \end{bmatrix}$$

où

$$d_i = \begin{bmatrix} \rho_{11}^{(i)} & \cdot\,\cdot & \rho_{1n}^{(i)} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \rho_{n1}^{(i)} & \cdot\,\cdot & \rho_{nn}^{(i)} \end{bmatrix}.$$

D'après le théorème de Laplace

$$\det D^* = \det\,(E_{mn}^{-1} D^* E_{mn}) = \det d_1 \det d_2 \ldots \det d_m$$

ce qui se réduit au résultat mentionné plus haut

$$\det B^* = \det^m b$$

lorsque

$$d_1 = d_2 = \ldots = d_m = b.$$

Par exemple

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho_{11}^{(1)} & 0 & \rho_{12}^{(1)} & 0 \\ 0 & \rho_{11}^{(2)} & 0 & \rho_{12}^{(2)} \\ \rho_{21}^{(1)} & 0 & \rho_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & \rho_{21}^{(2)} & 0 & \rho_{22}^{(2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \rho_{11}^{(1)} & \rho_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ \rho_{21}^{(1)} & \rho_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{11}^{(2)} & \rho_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & \rho_{22}^{(2)} & \rho_{22}^{(2)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \rho_{11}^{(1)} & \rho_{12}^{(1)} \\ \rho_{21}^{(1)} & \rho_{22}^{(1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \rho_{11}^{(2)} & \rho_{12}^{(2)} \\ \rho_{21}^{(2)} & \rho_{21}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

On peut donc déduire le théorème 2 sur le déterminant d'un produit direct des matrices sans recours à l'intermédiaire de $\det_R$.

C

Nous terminons ces considérations par quelques conclusions sur l'accomodation du calcul formel matriciel aux besoins de la théorie précédente.

1°. — L'exemple d'une telle accomodation déjà connue est la règle d'après laquelle on écrit

$$\alpha \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

au lieu de

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

ce qui est permis à cause de l'isomorphisme entre le corps $k \equiv \{\alpha\}$ des scalaires α et le corps $K_m \equiv \{[\alpha]\}$ des matrices „scalaires"

$$[\alpha] \equiv \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \alpha \end{bmatrix}$$

d'un même ordre $m \times m$. Désignons cet isomorphisme par

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \alpha \end{bmatrix} \equiv \operatorname{im} \alpha \longleftrightarrow \alpha \text{ („image matricielle de } \alpha\text{")}$$

Nous pouvons appliquer ce passage de corps K au corps K_m aussi dans le cas d'une matrice quelconque

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \equiv [\alpha_{L},]$$

définie sur K et désigner la matrice $[\operatorname{im} \alpha_{ij}]$ par im $[\alpha_{jj}]$. Par un tel passage l'anneau R_n des matrices d'ordre $n \times n$ devient l'anneau R_{mn} des matrices d'ordre $mn \times mn$ isomorphe à R_n. On peut généraliser ce procédé de construction des anneaux isomorphes à R_n et passer par exemple de la matrice $a \in R_n$ à la matrice „diagonale"

$$\begin{bmatrix} a & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a \end{bmatrix}$$

ce qui conduit à l'anneau R^*_{mn} isomorphe à R_n donc aussi à R_{mn} etc.

2°. — Revenons maintenant au cas le plus général des matrices rectangulaires définies sur un corps K des scalaires.

Définition 1. (la loi de conformité multiplicative).

Soient A et B deux matrices d'ordre $r \times k$ et $l \times s$ respectivement, définies sur un même corps K des scalaires. Nous dirons que ces deux matrices vérifient la loi de conformité multiplicative si l'on a

$$d(k, l) = \min(k, l),$$

c'est-à-dire si le plus grand commun diviseur de k et l est l'un des nombres k, l. Si $k = l$ on a la loi de conformité multiplicative habituelle.

La loi de conformité additive restant comme d'habitude, nous pouvons énoncer le théorème bien connu: Les matrices carrées d'un même ordre sont les seules qui vérifient à la fois les deux lois de conformité mentionnées.

Définition 2.

Si A et B sont deux matrices, d'ordre $r \times k$, $l \times s$ respectivement, qui vérifient la loi de conformité multiplicative, on obtiendra le produit AB de ces deux matrices en procédant de la manière suivante: si $\min(k, l) = k$ (resp. $= l$) on partage les lignes (resp. les colonnes) de la matrice B (resp. A) dans leur ordre naturel de façon à obtenir $l : k$ (resp. $k : l$)-sousmatrices d'ordre $k \times s$ (resp. $r \times s$) et on effectue ensuite la composition „ligne par colonne" de chacune de ces sousmatrices de gauche (resp. de droite) avec A (resp. B).

Si $k = l$ on a le produit usuel de deux matrices A, B. Si $r = k = 1$ la matrice A se réduit au scalaire α et l'on a le produit d'une matrice B par le scalaire α. De même pour $l = s = 1$. Dans le cas général on opère donc d'après cette définition comme si l'on était toujours dans ce cas spécial: On considère la matrice correspondante (B ou A) comme „scalaire", on partage l'autre matrice (A ou B) en sousmatrices „coscalaires" (c'est-à-dire selon la loi de conformité habituelle où le nombre des lignes du premier facteur est égal au nombre des colonnes du second) et on multiplie du côté correspondant chacune de ces sousmatrices par ce scalaire.

On peut aisément vérifier le

THÉORÈME 4. *Si les matrices A, B, C vérifient la loi de conformité additive ou la loi de conformité multipicative-selon le cas, on aura toujours*

$$(A+B)\,C = AC + BC,$$
$$A\,(B+C) = AB + AC,$$
$$A\,(BC) = (AB)\,C.$$

Les opérations d'addition et de la multiplication définies ici vérifient donc encore les lois de l'association et de la distribution.

D'apès ces définitions on peut écrire les matrices d'ordre différent l'une auprès de l'autre dans un même produit dès que la loi de conformité multiplicative est vérifiée.

3°. — A titre d'exemple considérons de nouveau les anneaux mentionnés R_n, R_{mn}, R^*_{mn}. On a avec la nouvelle notation

$$E_{mn}\, a\, E_{mn} = \operatorname{im} a\, E_{mn}$$

pour tout $a \in R_n$. Ceci donne

$$a \cdot \times b = a \operatorname{im} b$$

et, à cause de

$$E_{mn}\, a \operatorname{im} b\, E_{mn} = E_{mn}\, a\, E^2_{mn} \operatorname{im} b\, E_{mn} = \operatorname{im} a \cdot b = a \times \cdot\, b,$$

on obtient tout à fait aisément la relation entre le produit direct gauche et le produit direct droit de deux matrices a, b.

La démonstration du théorème 3 (p. 6) est maintenant très simple:

$$A \operatorname{adj}_K A = \det_K I_{mn} = \det_K (\det_R A)\, I_{mn} =$$
$$= \det_R A \operatorname{adj}_K (\det_R A)\, I_{mn} = A\,(\operatorname{adj}_R A \operatorname{adj}_K (\det_R A)\, I_{mn}).$$

Ce sont des simplifications qui justifient l'introduction de notre définition 2 de la multiplication des matrices.

(Reçu le 22 février 1957)

LITTÉRATURE

[1] C. Stephanos — Sur une extension de calcul des substitutions linéaires, *Journal math. pures et appl.* **6** (1900), 73–126.

[2] J. W. Williamson — The latent roots of a matrix of special type, *Bull. Amer. Math. Soc.* **37** (1931), 585–590.

[3] Д. К. Фадеев — И. С. Сомински — Сборник задач по высшей алгебре — Москва, 1953, пп. 77, 208–209.

[4] E. Egerváry — On hypermatrices whose blocs are commutable in pairs and their applications in lattice-dynamics, *Acta sc. math. Szeged* **XV**, 3–4, (1954) 211–222.

[5] M. Stojaković — Une théorie générale axiomatique des déterminants, *Bull. de la soc. des math. et phys. de la RP Serbie*, **VI**, 1–2 (1954), pp. 41–55.

[6] Гантмахер — Теория матриц, п. 39, Москва 1953.