ÜBER DIE ASSYMPTOTIK ORTHOGONALER POLYNOME

Von

GÉZA FREUD (Budapest)

ZUSAMMENFASSUNG. — $\Phi_n(f;\, z)$ sei die Folge der normierten und auf dem Einheitskreise mit der Gewichtsfunktion $f(\theta) \in L$ orthogonalen Polynome (vgl. (1)). Gilt $f^{-1} \in L$ und an einer Stelle γ $f(\theta) - f(\gamma) = O(|\theta-\gamma|)$ mit $f(\gamma) > 0$, dann wird $\Phi_n(f;\, e^{i\gamma}) = O(1)$. Ist ausserdem $0 < m \leqq f(\theta) \leqq M$, dann zeigen wir die Gültigkeit der assymptotischen Formel (6), welche unter anderen Bedingungen zuerst von G. Szegö aufgestellt wurde. Endlich werden diese Sätze auf normierte Orthogonalpolynome über einem endlichen reellen Intervall übertragen,

EINLEITUNG

Zuerst betrachten wir Orthogonalpolynome auf dem Einheitskreise. Es sei $0 \leqq f(\theta) \in L$ eine für reelle θ definierte nach 2π periodische Funktion mit $\log f(\theta) \in L$; dann gibt es eine eindeutig definierte Polynomfolge $\{\Phi_n(f; z)\}$ mit folgenden Eigenschaften: a) $\Phi_n(z)$ ist von genauem Grade n; b) die Φ_n bilden ein normiertes Orthogonalsystem mit dem Gewicht $f(\theta)$ auf dem Einheitskreise, d. h.[1]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\, \overline{\Phi_n(e^{i\theta})}\, \Phi_m(e^{i\theta})\, d\theta = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n; \end{cases} \tag{1}$$

c) der Koeffizient $\varkappa_n(f)$ von z^n in Φ_n ist reell und positiv.

Für die Untersuchung des Verhaltens der Φ_n sind einige Resultate von S. N. Bernstein und G. Szegö[2] grundlegend, die wir in Kürze hier schildern.

---

[1] Wie üblich, bedeutet $\bar{a}$ die komplexe konjugierte zu a.

[2] G. Szegö: Orthogonal Polynomials. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, Vol. XXIII' New York, 1939.

Es sei $f(\theta)=\{u_m(\theta)\}^{-1}$ wobei u_m ein trigonometrisches Polynom höchstens m—ter Ordnung bedeutet. Infolge eines Resultates von L. Fejér und F. Riesz gibt es dann ein gewöhnliches Polynom höchstens m—ten Grades, so dass

$$u_m(\theta)=|h_m(e^{i\theta})|^2 \tag{2}$$

besteht und dieses Polynom $h_m(z)$ ist eindeutig bestimmt, wenn man fordert, dass es keine Nullstellen innerhalb des Einheitskreises besitze und sein konstantes Glied reell und positiv sei. In diesem Fall gilt für $n\geqq m$ und $|z|=1$

$$\Phi_n(u_m^{-1}; z)=z^n\,\overline{h_m(z)}.\text{[3]} \tag{3}$$

Um eine Darstellung von $h_m(z)$ zu gewinnen, setzt man

$$D(f; z)\overset{def}{=}\exp\{k(f; z)\} \tag{4}$$

wobei $k(f; z)$ jene in $|z|\leq 1$ reguläre Funktion bedeutet, dessen Realteil in den Randpunkten $z=e^{i\theta}$ fast überall die Randwerte $\frac{1}{2}\log f(\theta)$ besitzt, und so erhält man für den Fall $f=g_m^{-1}$

$$h_m(z)=[D(u_m^{-1}; z)]^{-1}. \tag{5}$$

Hieraus vermutet man, dass für $|z|=1$

$$\Phi_n(f; z)=z^n\{\overline{D(f; z)}\}^{-1}+o(1) \tag{6}$$

auch unter allgemeineren Bedingungen gültig bleibt. S. N. Bernstein zeigte, dass für $f(\theta)$, welche einer gleichmässigen Dini-Lipschitzschen Bedingung

$$f(\theta+h)-f(\theta)=O(\log^{-\beta}|h|^{-1}),\ \beta>1$$

---

[3]) Die für jedes z gültige Darstellung von $\Phi_n(u_m^{-1}; z)$ erhält man folgendermassen: $h_m^*(z)$ sei das Polynom, welches man erhält, wenn man die Koeffiziente von $h_m(z)$ durch ihre komplexe konjugierte ersetzt. Dann ist

$$\Phi_n(u_m^{-1};\ z)=z^n\,h_m^*(z^{-1}),$$

gültig für jedes z, falls $n\geqq m$.

genügen, (6) für jedes $|z|=1$ besteht. G. Szegö stellte ein Kriterium, welches aus dem lokalen Verhalten von $f(\theta)$ in der Nähe der Stelle $\theta=\gamma$ auf die Gültigkeit von (6) an derselben Stelle schliessen lässt.

Kriterium von G. Szegö: Es habe $f(\theta)$ die Form

$$f(\theta)=f_1(\theta)\prod_{k=1}^{l}|e^{i\theta}-e^{i\theta_k}|^{\sigma_k}$$

mit $\sigma_k>0$, $f_1(\theta)$ sei im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar und $f_1(\theta)\geqq m>0$, ferner sei $f(\theta)$ an der Stelle $\theta=\gamma$ differenzierbar und

$$\frac{f(\gamma+h)-f(\gamma)}{h}-f'(\gamma)=O(|h|); \tag{7}$$

unter diesen Bedingungen ist (6) an der Stelle $z=e^{i\gamma}$ gültig.

Seit diesem Resultat von G. Szegö aus dem Jahre 1922 scheint die Frage nach einem besseren lokalen Kriterium offen zu stehen. Bemerkenswert ist folgendes halblokales Kriterium.[4]

Kriterium von J. L. Geronimus: Es sei in einem Teilintervall $[\gamma_1, \gamma_2]$

$$0<m\leqq f(\theta)\in \mathrm{Lip}\,\alpha,\quad \alpha>\frac{1}{2},$$

dann besteht (6) mit $z=e^{i\theta}$ gleichmässig in θ für jedes innere Teilintervall von (γ_1, γ_2).

Wir werden in vorliegender Arbeit folgendes „echt lokales" Kriterium beweisen:

SATZ I. *Es sei für jedes* θ

$$0<m\leqq f(\theta)\leqq M \tag{8}$$

erfüllt, und in der Nähe der Stelle γ *sei*

$$f(\theta)-f(\gamma)=O(|\theta-\gamma|), \tag{9}$$

dann ist (6) *für* $z=e^{i\gamma}$ *befriedigt.*

Obwohl bei Szegö die Bedingung (8) nicht auftritt, kann dieser Satz als eine Verallgemeinerung des Szegö-schen Kriteriums betrachtet werden, da wir weder Riemannsche Integrierbarkeit noch Differenzierbarkeit von f

---

[4] J. L. Geronimus, *Dokladi A. N. S.S.S.R.*, **103** (1955), S. 185—188.

fordern. Eine zweite, mit der Assymptotik eng zusammenhängende Frage ist, unter welchen Bedingungen die Orthogonalpolynome beschränkt bleiben. Nach einer vor 50 Jahren ausgeprochenen Vermutung von V. A. Stekloff, welche seitdem weder bewiesen noch widerlegt wurde, sollte die Folge der Orthogonalpolynome sogar gleichmässig beschränkt bleiben, wenn die Gewichtsfunktion eine streng positive untere Schranke besitzt. Die weitgehendste Resultate sind die von J. L. Geronimus[5]; wir erwähnen zwei typische unter ihnen:

a) Es sei $0<m\leqq f(\theta)\leqq M$ und $f\in \mathrm{Lip}\,(^1/_2, 2)$, d. h.

$$\int_{-\pi}^{+\pi}[f(\theta+h)-f(\theta)]^2\,d\theta=O(|h|),$$

dann gilt gleichmässig in θ: $\Phi_n(f; e^{i\theta})=O(1)$.

b) Es sei $f(\theta)=k(\theta)f_1(\theta)$, wobei $\Phi_n(f_1; e^{i\gamma})=O(1)$, und es sei $0<m\leqq k(\theta)\leqq M$ und in einem, die Stelle γ enthaltenden Intervall sei $k\in \mathrm{Lip}\,1$; dann ist auch $\Phi_n(f; e^{i\gamma})=O(1)$.

Bezüglich dieser Frage muss noch eine sehr merkwürdige Arbeit von T. Frey erwähnt werden, welche nächstens in Acta Math. Ac. Sci. Hung. erscheinen wird.

Wir zeigen folgendes neues lokales Kriterium der Beschränktheit der Φ_n:

SATZ II: *Es sei $0\leqq f^*\in L$ und auch $f^{*-1}\in L$; ferner sei $f^*(\gamma)>0$ und in einer Umgebung von γ sei*

$$f^*(\theta)-f^*(\gamma)=O(|\theta-\gamma|);$$

dann ist die Folge $\{\Phi_n(f^*; e^{i\gamma})\}$ beschränkt.

Im letzten Teil der vorliegenden Arbeit werden mit Hilfe einer Formel von G. Szegö diese Resultate auf Orthogonalpolynome über einem endlichen Intervall übertragen.

---

[5] J. L. Geronimus, loc. cit.[4], und *Izvestija A. N. S. S. S. R.*, Ser. Mat. **16** (1952), S. 469—480. b) verallgemeinert einen Satz von J. Korous.

EINIGE HILFSSÄTZE

HILFSSATZ I. *Es sei $F(\theta) \in L$ eine nach 2π periodische beschränkte Funktion, und in der Umgebung der Stelle γ sei*

$$F(\theta)-F(\gamma)=O(|\theta-\gamma|). \tag{10}$$

Die Jacksonschen Näherungspolynome $u_n(\theta)$ von $F(\theta)$, definiert mit der Relation

$$u_n(\theta)=\int_{-\pi}^{+\pi} J_n(t)\,F(\theta+t)\,dt;\quad J_n(t)\overset{def}{=}\frac{3}{2\pi N(2N^2+1)}\left(\frac{\sin Nt/2}{\sin t/2}\right)^4, \tag{11}$$

$$N=\left[\frac{n}{2}\right]$$

haben dann folgende Eigenschaften:

a)

$$F(\theta)-u_n(\theta)=O(1)\ (|\theta-\gamma|+n^{-1}); \tag{12}$$

b) *alle $u_n(\theta)$ liegen zwischen denselben Schranken, wie $F(\theta)$;*

c)

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}[F(\theta)-u_n(\theta)]^2\,d\theta=0. \tag{13}$$

B e w e i s: Aus der Definition (11) von $J_n(t)$ folgt

$$\int_{-\pi}^{+\pi} J_n(t)\,dt=2\int_0^{\pi} J_n(t)\,dt=1$$

und

$$0\leqq J_n(t)\leqq 100\ \mathrm{Min}\,(n,\ n^{-3}|t|^{-4}).$$

Aus der Positivität des Kernes $J_n(t)$ sieht man sofort, dass b) besteht. Es ist infolge (10)

$$F(\theta+t)+F(\theta-t)-2F(\theta)=O(|\theta-\gamma|)+O(|t|)$$

und somit erhalten wir

$$u_n(\theta)-F(\theta)=\int_0^\pi [F(\theta+t)+F(\theta-t)-2F(\theta)]\,J_n(t)\,dt=$$

$$=O(|\theta-\gamma|)+\int_0^\pi \operatorname{Min}\,(n, n^{-3}t^{-4})\,O(t)\,dt=O(1)\,[|\theta-\gamma|+n^{-1}]$$

und das zeigt die Eigenschaft a).

Da $F\in L_2$ ist, gilt

$$[J_2(t;F)]^2\overset{def}{=}\int_{-\pi}^{+\pi}[F(\theta+t)+F(\theta-t)-2F(\theta)]^2\,d\theta\to 0$$

und somit erhält man mit Hilfe der Minkowskischen Ungleichung

$$\int_{-\pi}^{+\pi}[F(\theta)-u_n(\theta)]^2\,d\theta=\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\int_0^\pi [F(\theta+t)+F(\theta-t)-2F(\theta)]\,J_n(t)\,dt\right\}^2 d\theta\leqq$$

$$\leqq\left\{\int_0^\pi J_n(t)\,J_2(t;F)\,dt\right\}^2\leqq 100\left\{n\int_0^{n^{-1}}J_2(t,F)\,dt+n^{-3}\int_{n^{-1}}^{\pi}t^{-4}J_2(t;F)\,dt\right\}\to 0$$

also zeigten wir auch Eigenschaft c). Damit sind wir mit dem Beweise des Hilfssatzes fertig.

Es sei $f^*\in L$,

$$s_n(f^*;z_1,z_2)\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{n}\overline{\Phi_k(f^*;z_1)}\,\Phi_k(f^*;z_2);$$

dann gilt infolge (1) für jedes Polynom $\pi_n(z)$ höchstens n-ten Grades

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\pi_n(e^{i\theta})\,s_n(f^*;e^{i\theta},e^{i\gamma})\,f^*(\theta)\,d\theta=\pi_n(e^{i\gamma}). \tag{14}$$

HILFSSATZ II: *Für beliebige $f_1 \in L$, $f_2 \in L$ besteht die Identität*

(15)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_n(f_1; e^{i\theta}, e^{i\gamma})\, s_n(f_2; e^{i\theta}, e^{i\lambda})\, [f_1(\theta) - f_2(\theta)]\, d\theta =$$

$$\frac{\varkappa_n(f_2)}{\varkappa_n(f_1)}\, \Phi_n(f_2; e^{i\gamma}) - \Phi_n(f_1; e^{i\gamma})$$

($\varkappa_n(f)$ *bedeutet den Koeffizienten von z^n in $\Phi_n(f; z)$*).

Beweis: Zunächst folgt unmittelbar aus (14)

(15a)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_n(f_1; e^{i\theta})\, s_n(f_2; e^{i\theta}, e^{i\gamma})\, f_2(\theta)\, d\theta = \Phi_n(f_1; e^{i\gamma}).$$

Aus der Orthogonalitätseigenschaft von $\Phi_n(f_1; z)$ folgert man sofort, dass für jedes Polynom n-ten Grades $\pi_n(z) = A z^n + \ldots$ die Relation

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_n(f_1; e^{i\theta})\, \overline{\pi_n(e^{i\theta})}\, f_1(\theta)\, d\theta = \frac{\overline{A}}{\varkappa_n(f_1)}$$

besteht. Man sieht sofort, dass der Koeffizient von $\overline{z}_1^n$ in $s_n(f_2; z_1, z_2)$

$$A = \varkappa_n(f_2)\, \Phi_n(f_2; e^{i\gamma})$$

gleich ist, und hieraus folgert man

(15b)
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_n(f_1; e^{i\theta})\, s_n(f_2; e^{i\theta}, e^{i\gamma})\, f_1(\theta)\, d\theta = \frac{\varkappa_n(f_2)}{\varkappa_n(f_1)}\, \Phi_n(f_2; e^{i\gamma}):$$

(15a) und (15b) ergeben (15), w. z. b. w.

HILFSSATZ III. *Es sei $F(\theta) = \{f(\theta)\}^{-1}$, $\{u_n(\theta)\}$ die Näherungspolynome von $F(\theta)$ (vgl. Hilfssatz I), dann ist*

(16)
$$\lim_{n=\infty} \frac{\varkappa_n(u_n^{-1})}{\varkappa_n(f)} = 1.$$

Beweis: Aus der Darstellung (3) und (5) ersieht man, dass

$$\varkappa_n(u_n^{-1}) = h_n(0) = [D(u_n^{-1}; 0)]^{-1} = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \log u_n(\theta)\, d\theta\right\}$$

besteht. Anderseits ist nach einem bekannten Satze von G. Szegö[6])

$$\lim_{n=\infty} \varkappa_n(f) = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \log f(\theta)\, d\theta\right\} > 0.$$

Nun liegen sowohl $f(\theta)$ wie auch alle $u_n(\theta)$ infolge (8) und Hilfssatz I, b) zwischen zwei streng positiven Schranken, so dass man aus (13) erhält

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} [\log f(\theta) + \log u_n(\theta)]\, d\theta = 0,$$

und hieraus folgt unsere Behauptung.

BEWEIS DER HAUPTSÄTZE

Man setze in (15) $f_1 = f$, $f_2 = u_n^{-1}$. Auf der linken Seite steht

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_n(f; e^{i\theta})\, s_n(u_n^{-1}; e^{i\theta}, e^{i\gamma})\, \{f(\theta) - [u_n(\theta)]^{-1}\}\, d\theta \tag{17}$$

und wir zeigen, dass das gegen Null strebt.

Mit einiger Rechnung erhält man die Darstellung[7])

$$s_n(u_n^{-1}; z_1, z_2) = \frac{\overline{h_n(z_1)}\, h_n(z_2) - (z_1 z_2)^{n+1}\, h_n(z_1)\, \overline{h_n(z_2)}}{1 - \bar{z}_1 z_2}$$

gültig für jedes $|z_1| = |z_2| = 1$. Infolge $|h_n(e^{i\varphi})|^2 = u_n(\varphi)$ (Vgl. (2)) und Hilfssatz I b) ergibt sich hieraus

$$s_n(u_n^{-1}; e^{i\theta}, e^{i\gamma}) = \frac{O(1)}{|\theta - \gamma|}. \tag{18a}$$

Da s_n ein trigonometrisches Polynom n—ten Grades in θ ist, ist die Bernsteinsche Ungleichung $\left|\frac{d}{d\theta} s_n\right| \leqq n \operatorname{Max} |s_n|$ gültig. Nimmt $|s_n|$ sein Maximum für $\theta = \varphi$ an, so muss also auch im ganzen Intervall

6) G. Szegö, loc. cit², S. 293.

7) Vgl. G. Szegö, loc cit², S. 286.

$(\varphi - 1/2n,\ \varphi + 1/2n)$ $|s_n| \geqq 1/2 \operatorname{Max} |s_n|$ bestehen. Nach (18) nimmt aber $s_n(u_n^{-1}; e^{i\theta}, e^{i\gamma})$ in jedem Intervall von der Länge n^{-1} in θ wenigstens einen Wert an, der dem Betrage nach kleiner als $O(n)$ bleibt und daher wird auch der Grössenordnung nach dieselbe Abschätzung für jedes θ befriedigt sein:[8])

$$s_n(u_n^{-1};\ e^{i\theta}, e^{i\gamma}) = O(n). \tag{18b}$$

Beide Abschätzungen (18a), (18b) zusammen ergeben

$$s_n(u_n^{-1};\ e^{i\theta}, e^{i\gamma}) = O(1) \operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{|\theta-\gamma|}\right). \tag{18}$$

Wir zerlegen das Integral (17) indem wir zuerst von $\gamma-\delta$ bis $\gamma+\delta\ (0<\delta<\pi)$ und dann auf dem übrigen Teil integrieren. Aus Hilfssatz I, a) und b) ergibt sich

$$f(\theta) - u_n^{-1}(\theta) = O(1)\ (|\theta-\gamma| + n^{-1}), \tag{19}$$

so dass man aus (18) und (19) erhält

$$\left|\int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} \Phi_n(f; e^{i\theta})\, s_n(u_n^{-1}; e^{i\theta}, e^{i\gamma})\, \{f(\theta) - [u_n(\theta)]^{-1}\}\, d\theta\right| \leqq$$

$$\leqq O(1) \int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} |\Phi_n(f; e^{i\theta})| \operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{|\theta-\gamma|}\right)(|\theta-\gamma| + n^{-1})\, d\theta \leqq$$

(20)

$$\leqq O(1) \operatorname{Min}\, [f(\theta)]^{-1/2} \int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} |\Phi_n(f; e^{i\theta})|\, [f(\theta)]^{1/2}\, d\theta \leqq$$

$$\leqq O(1)\, \delta^{1/2} \int_{-\pi}^{+\pi} |\Phi_n(f; e^{i\theta})|^2 f(\theta)\, d\theta = O(1)\, \delta^{1/2}$$

---

8) Oder man kann auch so schliessen:

$$|s_n(u_n^{-1};\ e^{i\theta}, e^{i\gamma})|^2 \leqq s_n(u_n^{-1};\ e^{i\theta}, e^{i\theta})\ s_n(u_n^{-1};\ e^{i\gamma}, e^{i\gamma})$$

und infolge Hilfssatz I b) ist

$$s_n(u_n^{-1};\ e^{i\varphi}, e^{i\varphi}) = O(n).$$

und dass kann mit passender Wahl von δ beliebig klein gemacht werden. Der zweite Teil des Integrals (17) kann unter Benützung von Hilfssatz I, a) abgeschätzt werden, indem man auch (18) beachtet:

$$\left|\int\limits_{\gamma+\delta}^{2\pi+\gamma-\delta} \Phi_n(f; e^{i\theta})\, s_n(u_n^{-1};\; e^{i\theta}, e^{i\gamma})\, \{f(\theta)-[u_n(\theta)]^{-1}\}\, d\theta\,\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{O(1)}{\delta}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} |\Phi_n(f; e^{i\theta})|\;\; [f(\theta)]^{1/2}\, \{f(\theta)-[u_n(\theta)]^{-1}\}\, d\theta \leqq$$

$$\leqq \frac{O(1)}{\delta}\left\{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} |\Phi_n(f; e^{i\theta})|^2 f(\theta)\, d\theta\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_{-\pi}^{+\pi} |f(\theta)-[u_n(\theta)]^{-1}|^2\, d\theta\right\}^{1/2} \to 0,$$

für festes δ, mit wachsendem n. Damit zeigten wir, dass der Ausdruck (17) gegen Null strebt. Beachtet man (15) (mit $f_1 = f$, $f_2 = u_n^{-1}$) und (16), dann ergibt sich

$$\Phi_n(f; e^{i\gamma}) = \Phi_n(u_n^{-1}, e^{i\gamma}) + o(1) = e^{in\gamma}\{D(u_n^{-1}; e^{i\gamma})\}^{-1} + o(1)$$

da (vgl. (3) und (2)) $|\Phi_n(u_n^{-1}; e^{i\gamma})|^2 = [u_n(\gamma)]^{-1}$ beschränkt ist.

Es muss also noch gezeigt werden, dass

$$\lim_{n=\infty} D(u_n^{-1}; e^{i\gamma}) = D(f; e^{i\gamma})$$

besteht. Aus der Definition (4) von $D(f; z)$ ist ersichtlich, dass es genügt zu zeigen dass der Imaginärteil

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} [\log u_n(\theta) - \log\;\; u_n(\gamma)]\, \operatorname{cotg}\frac{\gamma-\theta}{2}\, d\theta$$

von $k(u_n^{-1}; e^{i\gamma})$ gegen den Imaginärteil

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} [\log f(\theta) - \log f(\gamma)]\, \operatorname{cotg}\frac{\gamma-\theta}{2}\, d\theta$$

von $k(f; e^{i\gamma})$ strebt, d. h.

$$\text{(21)}\quad \lim_{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} [\log f(\theta) - \log f(\gamma) + \log u_n(\theta) - \log u_n(\gamma)] \operatorname{cotg} \frac{\gamma-\theta}{2} d\theta = 0$$

befriedigt ist. Infolge der gleichmässigen Beschränktheit der $\{u_n\}$ ist $u'_n(\theta) = O(n)$ gleichmässig in n und θ, beachtet man also dass $\{u_n(\theta)\}$ infolge Hilfssatz I b) und $F(\theta) = f^{-1}(\theta)$ oberhalb einer positiven Konstante bleibt, dann ergibt sich

$$\log u_n(\theta) - \log u_n(\gamma) = O(n)\,|\theta - \gamma|$$

und somit wird

$$\text{(21a)}\quad \int_{\gamma-n^{-2}}^{\gamma+n^{-2}} [\log f(\theta) - \log f(\gamma) + \log u_n(\theta) - \log u_n(\gamma)] \operatorname{cotg} \frac{\gamma-\theta}{2} d\theta = O(n^{-1}).$$

Aus (19) und aus Hilfssatz I b) erhält man

$$\log f(\theta) - \log f(\gamma) + \log u_n(\theta) - \log u_n(\gamma) = O(1)\ (|\theta - \gamma| + n^{-1})$$

und somit

$$\text{(21b)}\quad \int_{\gamma+n^{-2}}^{\gamma+\delta} [\log f(\theta) - \log f(\gamma) + \log u_n(\theta) - \log u_n(\gamma)] \operatorname{cotg} \frac{\gamma-\theta}{2} d\theta = $$
$$= O\left(\frac{\log n}{n}\right) + \delta\, O(1).$$

Endlich ergibt sich für ein festes δ infolge Hilfssatz I b) und c)

$$\text{(21c)}\quad \int_{\gamma+\delta}^{\gamma+2\pi-\delta} [\log f(\theta) - \log f(\gamma) + \log u_n(\theta) - \log u_n(\gamma)] \operatorname{cotg} \frac{\gamma-\theta}{2} d\theta = \delta^{-1} o(1).$$

Für den Intervall $[\gamma - \delta,\ \gamma - n^{-2}]$ erhält man natürlich genau dieselbe Abschätzung, wie (21b). Mit der Wahl von δ kann das zweite Glied an der rechten Seite von (21b) beliebig klein gemacht werden, und danach wird für festes δ sowohl die rechte Seite von (21a) und (21c), wie das erste Glied an der rechten Seite von (21b) beliebig klein. Damit haben wir (21) bewiesen und auch den Beweis unseres Satzes I zu Ende geführt.

Nun wenden wir uns zum Beweise des Satzes II.

Es sei $0 < m < f^*(\gamma) < M$, und wir wählen ein festes, genügend kleines δ, so dass für $|\theta - \gamma| \leqq \delta$ auch noch $0 < m \leqq f^*(\theta) \leqq M$ besteht.

Wir setzen

$$f(\theta)=\begin{cases} f^*(\theta) & \text{für } m<f^*(\theta)<M \\ m & \text{für } f^*(\theta)\leqq m \\ M & \text{für } f^*(\theta)\geqq M \end{cases}$$

Es sei wieder $F=f^{-1}$ und $u_n(\theta)$ seien wieder die Polynome im Hilfssatz I. Aus dem Hilfssatz II erhalten wir mit $f_1=f^*$, $f_2=u_n^{-1}$

$$|\Phi(f^*;\ e^{i\gamma})|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|\Phi_n(f^*;\ e^{i\theta})|\ |s_n(u_n^{-1};\ e^{i\theta}, e^{i\gamma})|\cdot|u_n^{-1}(\theta)-f^*(\theta)|\,d\theta+$$

$$+\frac{\varkappa_n(u_n^{-1})}{\varkappa_n(f^*)}|\Phi_n(u_n^{-1};\ e^{i\gamma})|. \tag{22}$$

Aus (18) ergibt sich

$$\int_{-\pi}^{+\pi}|\Phi_n(f^*;\ e^{i\theta})|\ |s_n(u_n^{-1};\ e^{i\theta}, e^{i\gamma})|\ |u_n^{-1}(\theta)-f^*(\theta)|\,d\theta\leqq$$

$$\leqq O(1)\int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta}|\Phi_n(f^*;\ e^{i\theta})|\ \mathrm{Min}\left(n, \frac{1}{|\theta-\gamma|}\right)|u_n^{-1}(\theta)-f^*(\theta)|\,d\theta+$$

$$+\delta^{-1}O(1)\int_{\gamma+\delta}^{\gamma+2\pi-\delta}|\Phi_n(f^*;e^{i\theta})|\,u_n^{-1}(\theta)\,d\theta+\delta^{-1}O(1)\int_{\gamma+\delta}^{\gamma+2\pi-\delta}|\Phi_n(f^*;\ e^{i\theta})|\,f^*(\theta)\,d\theta.$$

Nun ist infolge Hilfssatz I, b)

$$\int_{\gamma+\delta}^{\gamma+2\pi-\delta}|\Phi_n(f^*;\ e^{i\theta})|\,u_n^{-1}(\theta)\,d\theta\leqq M\int_{-\pi}^{+\pi}|\Phi_n(f^*;\ e^{i\theta})|\,d\theta\leqq$$

$$\leqq M\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{f^*(\theta)}\right\}^{1/2}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}|\Phi_n(f^*;e^{i\theta})|^2 f^*(\theta)\,d\theta\right\}^{1/2}=O(1)$$

und offenbar gilt auch

$$\int_{\gamma+\delta}^{\gamma+2\pi-\delta}|\Phi_n(f^*;e^{i\theta})|\,f^*(\theta)\,d\theta\leqq\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}f^*(\theta)\,d\theta\right\}^{1/2}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}|\Phi_n(f^*;e^{i\theta})|^2 f^*(\theta)\,d\theta\right\}^{1/2}=O(1).$$

Beachtet man noch, dass im Intervall $[\gamma-\delta, \gamma+\delta]$ $f^*(\theta)\equiv f(\theta)$ ist, so folgt aus (19) mit derselben Überlegung, wie (20), dass auch

$$\int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} |\Phi_n(f^*; e^{i\theta})| \operatorname{Min}\left(n, \frac{1}{|\theta-\gamma|}\right) |u_n^{-1}(\theta)-f(\theta)|\, d\theta = O(1)$$

befriedigt ist. Aus allen diesen Abschätzungen ergibt sich, dass das erste Glied auf der rechten Seite von (22) beschränkt ist; infolge Hilfssatz III ist auch $\varkappa_n(u_n^{-1})$ beschränkt, und $\varkappa_n(f^*)$ strebt infolge $f^{*-1} \in L$ gegen eine streng positive Zahl. Die Beschränktheit von $\Phi_n(u_n^{-1}; e^{i\gamma})$ folgt aus der Darstellung (3) und (2) und Hilfssatz I b). Somit bleibt auch das zweite Glied auf der rechten Seite von 22 beschränkt, und der Beweis des Satzes II ist beendet.

ÜBERGANG AUF EIN REELLES ENDLICHES ORTHOGONALITÄTSINTERVALL

Es sei $0 \leqq w(x) \in L$ eine in $[-1, +1]$ definierte reelle Gewichtsfunktion, und $\{p_n(x)\}$ sei die normierte Folge von Orthogonalpolynome bezüglich dieser Gewichtsfunktion, d. h. $\{p_n(x)\}$ sei vom genauen Grade n, der Koeffizient von x^n in $\{p_n(x)\}$ sei positiv und es gelte

$$\int_{-1}^{+1} p_n(x)\, p_m(x)\, w(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m = n, \\ 0 & \text{für} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Es besteht folgender wichtiger Zusammenhang zwischen diesen Orthogonalpolynomen und den Orthogonalpolynomen auf dem Einheitskreise:[9]

Es bedeute $\{\Phi_n(z)\}$ die Folge der Orthogonalpolynome auf dem Einheitskreise mit der Gewichtsfunktion $f(\theta) = w(\cos\theta)\,|\sin\theta|$, es sei ferner $x = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$ mit $|z|=1$. Dann gilt

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{1 + \frac{\Phi_{2n}(0)}{\varkappa_{2n}(f)}\right\}^{-1/2} [z^{-n}\,\Phi_{2n}(z) + z^n\,\Phi_{2n}(z^{-1})]$$

und G. Szegö zeigte auch dass unter recht allgemeinen Bedingungen $\Phi_n(0)$ gegen Null strebt. Aus dieser Formel kann man Satz I und II sofort auf Sätze bezüglich Orthogonalpolynome über $[-1, +1]$ umschreiben:

---

[9] Vgl. G. Szegö, loc. cit.[2], S. 287.

SATZ III: *Es sei* $0 < \mu \leqq \sqrt{1-x^2}\, w(x) \leqq M$, *und in einer Umgebung der Stelle* ξ $(-1 < \xi < +1)$ *sei*

$$w(x) - w(\xi) = O(|x-\xi|). \tag{23}$$

Dann besitzen die Orthogonalpolynome $\{p_n(x)\}$ *an der Stelle* ξ *die assymptotische Darstellung*

$$(1-\xi^2)^{1/4} [w(\xi)]^{1/2} p_n(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\gamma + \beta) + o(1)$$

wobei γ *und* β *mit den Gleichungen*

$$\xi = \cos\gamma, \quad e^{i\beta} = \operatorname{sign} D(w(\cos\theta)|\sin\theta|;\ e^{i\beta})$$

definierte, von n unabhängige Zahlen sind.

SATZ IV. *Es sei* $w \in L$ *und*

$$[w(x)\ (1-x^2)]^{-1} \in L,\ w(\xi) > 0\ (-1 < \xi < +1)$$

und in einer Umgebung der Stelle ξ *sei* (23) *befriedigt. Dann gilt*

$$p_n(w; \xi) = O(1).$$

(Eingegangen am 14-III-1957)