ABBILDUNG GEWISSER OPERATIONEN DURCH DIE ZWEIDIMENSIONALE LAPLACE-TRANSFORMATION

von

BOGOLJUB STANKOVIĆ (Novi Sad)

ZUSAMMENFASSUNG — Es wird gezeigt welche Funktionalbeziehung zwischen den Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ bestehen muss, wenn die, diesen Funktionen durch die zweidimensionale Laplace-Transformation zugeordneten, Funktionen $\varphi(u, v)$ bzw. $\frac{1}{u^{\mu}\, v^{\beta}}\, \varphi\left(\frac{1}{v^{\nu}}, \frac{1}{u^{\rho}}\right)$ lauten.

Die eindimensionale Laplace-Transformation wird heute sehr häufig zur Lösung verschiedener mathematischer Probleme verwendet. Dagegen ist die zweidimensionale Laplace-Transformation nur in letzten Jahren zur Geltung gekommen, besonders seit dem Erscheinen der Abhandlung: D. Voelker und G. Doetsch — „Die zweidimensionale Laplace-Transformation" [4]. Im Vorwort zu diesem Buch haben die Verfasser bemerkt, dass es bei der zweidimensionalen Laplace-Transformation hauptsächlich darauf ankommt, zu gewissen allgemeinen an einer Funktion ausgeführten Operationen die entsprechenden Operationen an der zugeordneten Funktion ausfindig zu machen. Die Sätze, die hier bewiesen werden, sind von eben solcher Art und können sehr vorteilhaft verwendet werden, wenn zu einer gegebenen „Bildfunktion" die „Originalfunktion" gesucht wird. Die hier erhaltenen Ergebnisse sind Verallgemeinerungen von denjenigen die ich in (2) und (3) gefunden habe.

Zuerst geben wir die Bezeichnungen und schicken einige Bemerkungen voraus.

1. Die Grundlage dieser Arbeit bildet die Funktion

$$\Phi(\mu, \nu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\mu+\nu k)},$$

die von E. M. Wright für $\nu > 0$ [5] und für $-1 < v < 0$ [6], definiert worden ist. Einige Eigenschaften dieser Funktion, besonders solche, die sich auf ihre Integrale beziehen, sind in [2] angegeben. Bei dieser Funktion wird immer der erste Parameter mit μ oder β und der zweite mit ν oder ρ bezeichnet, wobei im Folgenden vorausgesetzt wird: entweder $v > 0$ $(\rho > 0)$ und $\mu > 0$ $(\beta > 0)$, oder $-1 < v < 0$ $(-1 < \rho < 0)$ und μ (β) beliebig.

Ausserdem bezeichnen wir die Funktion $\Phi(\mu, v; -z^{\nu})$ kurz mit $\Phi(-z^{\nu})$; ebenso statt $\Phi(\beta, \rho; -z^{\rho})$ schreiben wir $\Phi(-z^{\rho})$.

2. Das endliche Rechteck $u_0 \leqq u \leqq u_1$, $v_0 \leqq v \leqq v_1$ werden wir mit $D(u_0, u_1; v_0, v_1)$ bezeichnen, wobei die Zahlen u_0, u_1, v_0, v_1 positiv sein sollen. Für das Rechteck $D(0, \infty; 0, \infty)$ schreiben wir kurz R^{+2}.

3. Das uneigentliche Doppelintegral definieren wir mit D. Voelker und G. Doetsch (4) in folgender Weise:

$$\iint_{R^{+2}} \overset{*}{G}(x, y)\, dx\, dy = \lim_{X, Y \to \infty} \int_0^X \int_0^Y \overset{*}{G}(x, y)\, dx\, dy,$$

was mit

$$\iint_{R^{+}} \overset{*}{G}(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \iint_{P_n} \overset{*}{G}(x, y)\, dx\, dy$$

äquivalent ist. Dabei werden mit P_n diejenigen Rechtecke $D(0, u_n; 0, v_n)$ bezeichnet, welche die Eigenschaft besitzen, dass man zu jedem gegebenen Quadrat Q aus dem ersten Quadranten eine Zahl n_0 finden kann so dass $Q \subset P_n$ für alle $n \geqq n_0$ wird.

4. Es sei $h(\xi, \eta; x, y)$ im Bereich $\Omega: \xi \geqq \xi_1, \ \eta \geqq \eta_1; \ x \geqq 0, \ y \geqq 0$ gegeben und das Integral

$$\iint_{R^{+}} h(\xi, \eta; x, y)\, dx\, dy$$

konvergent. Es bestehe noch die Beziehung

$$H_1(\xi, \eta; x, y) \leqq h(\xi, \eta; x, y) \leqq H_2(\xi, \eta; x, y)$$

für alle Punkte des Bereiches Ω; wobei $H_i(\xi, \eta; x, y)$, $H_i(x, y) = \lim\limits_{\xi, \eta \to \infty} H_i(\xi, \eta; x, y)$, $(i = 1, 2)$ im Quadranten R^{+2} integrierbar sind und die Beziehung

$$\lim_{\xi, \eta \to \infty} \iint\limits_{R^{+2}} H_i(\xi, \eta; x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{R^{+2}} H_i(x, y)\, dx\, dy$$

befriedigen.

Dann nennen wir die Funktionen $H_i(\xi, \eta; x, y)$, die Beschränkungsfunktionen hinsichtlich der Vertauschung von Operationen Limes und Integration.

SATZ I. 1. *Die Funktion $f(x, y)$ sei in allen Punkten von R^{+2} stetig;*

2. *Das Integral*

$$\iint\limits_{R^{+2}} e^{-ux-vy} f(x, y)\, dx\, dy = \varphi(u, v)$$

soll für alle Punkte (u, v) des Rechtecks $D(u_0, u_1; v_0, v_1)$ konvergieren;

3. *Die Funktion $e^{-ux-vy} g(x, y; \xi_0, \eta_0)$ die durch das Integral*

$$e^{-ux-vy} g(x, y; \xi_0, \eta_0) = e^{-ux-vy} \int_0^{\xi_0} \int_0^{\eta_0} \Phi(-\xi x^{\nu})\, x^{\mu-1}\, \Phi(-\mu y^{\rho})\, y^{\beta-1} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

definiert ist, soll für alle (u, v) des Rechtecks $D(u_0^{1/\nu}, u_1^{1/\nu}; v_0^{1/\rho}, v_1^{1/\rho})$ ihre Beschränkungsfunktionen hinsichtlich der Vertauschung von Operationen Limes und Integration besitzen.

Dann besteht zwischen der Funktion $\gamma(u, v)$, die durch das Integral

$$\gamma(u, v) = \iint\limits_{R^{+2}} e^{-ux-vy} g(x, y; \infty, \infty)\, dx\, dy$$

definiert ist, und der Funktion $\varphi(u, v)$ *die Beziehung*

$$\Upsilon(u, v) = \frac{1}{u^{\mu} v^{\beta}} \varphi\left(\frac{1}{u^{\nu}}, \frac{1}{v^{\rho}}\right)$$

für alle (u, v) *des Bereiches* $D(u_0^{1/\nu}, u_1^{1/\nu}; v_0^{1/\rho}, v_1^{1/\rho})$.

BEMERKUNG: Dieser Satz bleibt auch dann gültig, wenn die Funktion $f(x, y)$ endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt, in welchen sie absolut integrierbar ist.

Zuerst beweisen wir zwei Hilfssätze:

HILFSSATZ I. *Es sei*

$$\iint_{R^{+2}} e^{-ux-vy} \Phi(-\xi x^{\nu}) x^{\mu-1} \Phi(-\eta y^{\rho}) y^{\beta-1} \, dx \, dy = \frac{1}{u^{\mu}} e^{-\xi/u^{\nu}} \frac{1}{v^{\beta}} e^{-\eta/v^{\rho}} \tag{1}$$

und ausserdem soll dieses Integral absolut und gleichmässig für alle (ξ, η) *des Bereiches* $D(0, \xi_0; 0, \eta_0)$ *konvergieren.*

Beweis des Hilfssatzes. Wir beweisen zuerst, dass die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-ux} \Phi(-\xi x^{\nu}) x^{\mu-1} \, dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-vx} \Phi(-\eta y^{\rho}) y^{\beta-1} \, dy$$

im angegebenen Bereich absolut und gleichmässig konvergieren. Da diese beiden Integrale ihrer äusseren Form nach gleich sind, genügt es die Behauptung nur für eines zu beweisen. Betrachten wir deshalb das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-ux} \Phi(-\xi x^{\nu}) x^{\mu-1} \, dx \tag{2}$$

wobei $0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ ist. Auf Grund der Tatsache dass $\Phi(\mu, \nu; -\xi x^{\nu})$ eine stetige Funktion für alle $x \geqq 0$ ist und dass $\Phi(\mu, v; -\xi x^{\nu}) = O\left(e^{a(\xi x^{\nu})^{1/(1+\nu)}}\right)$ ist, muss das Integral (2) für $0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ und für jedes $u > 0$ absolut und gleichmässig konvergieren.

Nun können wir behaupten, dass das Integral (1) summierbar (integrierbar im Lebesgueschen Sinne) ist und dass es durch iterierte Integrale ausgedrückt werden kann (Satz von Fubini), so dass

$$\iint\limits_{R^{+2}} e^{-ux-vy}\, \Phi(-\xi x^{\nu})\, x^{\mu-1}\, \Phi(-\eta y^{\rho})\, y^{\beta-1}\, dx\, dy = \tag{3}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ux}\, \Phi(-\xi x^{\nu})\, x^{\mu-1}\, dx \int_0^{\infty} e^{-vy}\, \Phi(-\eta y^{\rho})\, y^{\beta-1}\, dy = \frac{1}{u^{\mu}}\, e^{-\xi/u^{\nu}}\, \frac{1}{v^{\beta}}\, e^{-\eta/v^{\rho}}$$

ist, was die Behauptung des Hilfssatzes I war.

HILFSSATZ II. *Die Funktionen $T_n(x, y)$ besitzen Beschränkungsfunktionen hinsichtlich der Vertauschung von Operationen Limes und Integration, und sollen alle wie auch ihr Grenzwert $T(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x,y)$ in R^{+2} integrierbar sein, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{R^{+2}} T_n(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{R^{+2}} T(x, y)\, dx\, dy.$$

Der Beweis dieses Hilfssatzes ist eine triviale Verallgemeinerung eines bekannten Satzes für die Funktionen einer Veränderlichen ([1], S. 295—297).

Beweis des Satzes I. — In diesem Beweis werden wir den Bereich $D(0, \xi_0;\ 0, \eta_0)$ kurz mit D bezeichnen.

Die Funktion $f(x, y)$ haben wir stetig vorausgesetzt und im Hilfssatz I bewiesen, dass das Integral (1) in D gleichmässig konvergiert, so dass wir jetzt schreiben können:

$$\iint\limits_{D} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \iint\limits_{R^{+2}} e^{-ux-vy}\, \Phi(-\xi x^{\nu})\, x^{\mu-1}\, \Phi(-\eta y^{\rho})\, y^{\beta-1}\, dx\, dy = \tag{4}$$

$$= \iint\limits_{R^{+2}} e^{-ux-vy}\, dx\, dy \iint\limits_{D} \Phi(-\xi x^{\nu})\, x^{\mu-1}\, \Phi(-\eta y^{\rho})\, y^{\beta-1}\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Der Grenzwert des Ausdruckes auf der linken Seite dieser Beziehung, wenn $\xi_0, \eta_0 \to \infty$, unter der Berücksichtigung der Beziehung (1) und der Voraussetzung 2. unseres Satzes, ergibt

$$\iint\limits_{R^{+2}} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \iint\limits_{R^{+2}} e^{-ux-vy}\,\Phi(-\xi x^{\nu})\,x^{\mu-1}\,\Phi(-\eta y^{\rho})\,y^{\beta-1}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{u^{\mu} v^{\beta}} \iint\limits_{R^{+2}} e^{-\xi/u^{\nu}-\eta/v^{\rho}} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \frac{1}{u^{\mu} v^{\beta}}\,\varphi\left(\frac{1}{u^{\nu}},\frac{1}{v^{\rho}}\right)$$

für alle (u,v) des Bereiches $D(u_0^{1/\nu},\ u_1^{1/\nu},\ v_0^{1/\rho},\ v_1^{1/\rho})$.

Der Grenzwert, des Integrals auf der rechten Seite von (4) seinerseits, wenn $\xi_0,\ \eta_0 \to \infty$ bzw. wenn P_n sämtliche erwähnten Rechtecke durchläuft, unter der Berücksichtigung des Hilfssatzes II und der Voraussetzung 3. unseres Satzes, ergibt

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{R^{+2}} e^{-ux-vy}\,dx\,dy \iint\limits_{P_n} \Phi(-\xi x^{\nu})\,x^{\mu-1}\,\Phi(-\eta y^{\rho})\,y^{\beta-1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \iint\limits_{R^{+2}} e^{-ux-vy}\,dx\,dy \iint\limits_{R^{+2}} \Phi(-\xi x^{\nu})\,x^{\mu-1}\,\Phi(-\eta y^{\rho})\,y^{\beta-1} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \gamma(u,v).$$

Also im Grenzfall lautet die Beziehung (4)

$$\frac{1}{u^{\mu} v^{\beta}}\,\varphi\left(\frac{1}{u^{\nu}},\ \frac{1}{v^{\rho}}\right) = \gamma(u,v),$$

was zu beweisen war.

Auf genau dieselbe Weise kann man auch den folgenden Satz beweisen:

SATZ II. 1. *Die Funktion* $f(x,y)$ *sei in allen Punkten von* R^{+2} *stetig;*

2. *Das Integral*

$$\iint\limits_{R^{+2}} e^{-ux-vy} f(x,y)\,dx\,dy = \varphi(u,v)$$

soll für alle Punkte (u,v) *des Rechtecks* $D(u_0,u_1;\ v_0,v_1)$ *konvergieren;*

3. *Die Funktionen* $e^{-ux-vy} g_1(x, y; \xi_0)$, $e^{-ux-vy} g_2(x, y; \eta_0)$, *die durch die Integrale*

$$e^{-ux-vy} g_1(x, y; \xi_0) = e^{-ux-vy} \int_0^{\xi_0} \Phi(-\xi x^{\nu}) x^{\mu-1} f(\xi, y)\, d\xi$$

$$e^{-ux-vy} g_2(x, y; \eta_0) = e^{-ux-vy} \int_0^{\eta_0} \Phi(-\eta y^{\rho}) y^{\beta-1} f(x, \eta)\, d\eta$$

definiert sind, besitzen Beschränkungsfunktionen hinsichtlich der Vertauschung von Operationen Limes und Integration für alle (u, v) *des Rechtecks* $D(u_0^{1/\nu}, u_1^{1/\nu}; v_0, v_1)$, *bzw.* $D(u_0, u_1; v_0^{1/\rho}, v_1^{1/\rho})$.

Dann bestehen zwischen den Funktionen, $\gamma_i(u, v)$ $(i=1, 2)$, *die durch die Integrale:*

$$\gamma_i(u, v) = \iint_{R+2} e^{-ux-vy} g_i(x, y; \infty)\, dx\, dy,$$

definiert sind und der Funktion $\varphi(u, v)$ *die Beziehung*

$$\gamma_1(u, v) = \frac{1}{u^{\mu}} \varphi\left(\frac{1}{u^{\nu}}, v\right); \quad \gamma_2(u, v) = \frac{1}{v^{\beta}} \varphi\left(u, \frac{1}{v^{\rho}}\right)$$

für alle (u, v) *des Bereiches* $D(u_0^{1/\nu}, u_1^{1/\nu}; v_0, v_1)$ *bzw.* $D(u_0, u_1; v_0^{1/\rho}, v_1^{1/\rho})$.

Um diese Sätze mit dem entsprechenden bekannten Sätzen vergleichen zu können, führen wir hier zwei Beziehungen an, welche zwischen den Funktionen von E. M. Wright und den wohlbekannten Funktionen bestehen.

Es ist so

$$\frac{2}{2\sqrt{\pi x^3}} e^{-\frac{1}{4x}} = x^{-1} \Phi(0, -1/2; -x^{-1/2}),$$

und

$${}_0F_m\left(\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}, 1; \quad -\frac{z}{m^m}\right) = \Phi(1, m; \quad -z), \quad m \in N;$$

$${}_0F_m(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta_1, k) \ldots (\beta_m, k)} \frac{z^k}{k!}$$

die Funktion der verallgemeinerten hypergeometrischen Reihe, wo $(\beta, k) = \Gamma(\beta + k) / \Gamma(\beta)$.

Betrachten wir die umfangreichsten Tafeln für die zweidimensionale Laplace-Transformation [4], dann sehen wir, dass eine Reihe von diesbezüglichen Formeln nur Spezialfälle unserer Sätzen sind (vgl. (4) S. 187, n⁰ 51, S. 184).

(Eingegangen am 15. Febraur 1957)

LITERATUR

[1] J. Karamata — Teorija i praksa Stieltjes-ova integrala. Beograd 1949.

[2] B. Stanković — O jednoj klasi singularnih integralnih jednačina. *Zbornik radova Mat. Inst.* **4** (1955), 81—130.

[3] __________ Inversion et invariantes de la transformation généralisée de Hankel. *Publ. Inst. Math. Ac. Serbe Sc.* **8** (1955), 37—52.

[4] D. Voelker und G. Doetsch — Die zweidimensionale Laplace-Transformation. Basel (1950).

[5] E. M. Wright — On the coefficients of power series having exponential singularities. *J. Lond. Math. Soc.* **8** (1933), 71—79.

[6] __________ The generalized Bessel function of order greater than one. *Quart. J. Math. Oxford series* **2** (1940), 36—48.