SUR LA CONSTRUCTION DES METHODES DE LIMITATION QUI SONT ÉQUIVALENTES ET PAS CONSISTENTES

Par

VLADETA VUČKOVIĆ (Zrenjanin)

RÉSUMÉ. — D'un théorème, analogue à la proposition classique de Cauchy pour les suites réelles, on déduit un moyen de construction des méthodes de limitation qui ont le même doma ne et qui ne sont pas consisten'es.

1. Dans leur article [1] MM. Mazur et Orlicz étudient deux méthodes permanentes de limitation qui ont le même domaine[1] et qui ne sont pas consistentes. Un exemple analogue se trouve de même chez M. Ł. Vlodarski [2]. Nous nous proposons ici de montrer la source commune de ces exemples et de donner une méthode générale de construction de telles procédés, par une proposition analogue à celle de Cauchy. Nous allons établir d'abord deux théorèmes de ce genre et ensuite, par leur application, obtenir la construction en question.

2. Soit $\{v_n\}$ une suite réelle, strictement croissante, qui tend vers $+\infty$. Alors la proposition classique de Cauchy, dont nous avons parlé, peut être formulée comme suit:

De

$$\frac{u_n v_n - u_{n-1} v_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} \to u, \quad n \to \infty, \tag{2.1}$$

il s'ensuit que

$$u_n \to u, \quad n \to \infty$$

pour toute suite $\{u_n\}$.

---

[1] „Wirkungsfeld"

Nous nous demandons maintenant que peut on conclure sur la suite réelle $\{u_n\}$ si, dans (2.1), on échange l'ordre des v_n, c'est-à-dire si

$$\frac{u_n v_{n-1} - u_{n-1} v_n}{v_n - v_{n-1}} \to u, \quad n \to \infty. \tag{2.1}$$

Au lieu de (2.1) on peut introduire l'expression

$$\frac{u_n p_n - u_{n-1} p_{n-1}}{p_n - p_{n-1}},$$

avec $p_n = 1/v_n$. C'est de cette manière que nous allons envisager le problème cité et introduire la définition suivante :

DÉFINITION: *Étant donnée une suite réelle $\{p_n\}$ qui est strictement décroissante et qui tend vers zéro, désignons par P l'ensemble de toutes les suites de la forme*

$$\{\tau_n + c/p_n\}, \tag{2.3}$$

où c est une constante réelle et $\{\tau_n\}$ une suite réelle et convergente, satisfaisant à la condition

$$\tau_n - \tau_{n-1} = o\left(\frac{p_{n-1} - p_n}{p_{n-1}}\right), \quad n \to \infty. \tag{2.4}$$

Remarquons que dans le cas

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{p_n}{p_{n-1}} < 1, \tag{2.5}$$

la condition (2.4) est toujours remplie, car dans ce cas

$$o\left(\frac{p_{n-1} - p_n}{p_{n-1}}\right) = o(1).$$

Une première réponse à la question proposée fournit le

THÉORÈME 1. *Pour qu'une suite $\{u_n\}$ appartienne à P il faut et il suffit que la suite*

$$U_1 = u_1; \quad U_n = \frac{u_n p_n - u_{n-1} p_{n-1}}{p_n - p_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{2.6}$$

converge.

Démonstration. La condition est nécéssaire. Soit $\{u_n\} \in P$. On a alors

$$U_n - \tau_n = \frac{p_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} (\tau_n - \tau_{n-1}) = \frac{p_{n-1}}{p_{n-1} - p_n} \, o\left(\frac{p_{n-1} - p_1}{p_{n-1}}\right) = o(1),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} \tau_n .$$

La condition est suffisante. Supposons que $U_n \to u$, $n \to \infty$. Du système d'équations

$$U_\nu (p_\nu - p_{\nu-1}) = u_\nu p_\nu - u_{\nu-1} p_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

on obtient

$$u_n = \frac{1}{p_n} p_1 U_1 - \frac{1}{p_n} \sum_{\nu=2}^{n} U_\nu (p_{\nu-1} - p_\nu), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2.7}$$

Définissons une constante c par

$$c = p_1 U_1 - \sum_{\nu=2}^{\infty} U_\nu (p_{\nu-1} - p_\nu), \tag{2.8}$$

la série au second membre étant absolument convergente. Cette constante est bien déterminée par les suites $\{p_n\}$ et $\{U_n\}$. Remarquons qu'on peut s'arranger que c de (2.8) coïncide avec la constante c de (2.3). En introduisant la suite

$$\tau_n = \frac{1}{p_n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} U_\nu (p_{\nu-1} - p_\nu), \tag{2.9}$$

on voit immédiatement qu'on a

$$u_n = \tau_n + c/p_n \tag{2.10}$$

et pour prouver que $\{u_n\} \in P$ il n'y a plus qu'à montrer que la suite $\{\tau_n\}$ est convergente et satisfait à (2.4).

A cet effet considérons la différence

$$\tau_n - u = \frac{1}{p_n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (U_\nu - u)(p_{\nu-1} - p_\nu) = \frac{o(1)}{p_n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (p_{\nu-1} - p_\nu) = o(1), \quad n \to \infty .$$

Il s'ensuit que τ_n converge et que

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} U_n = u. \tag{2.11}$$

Formons enfin la différence

$$\tau_n - \tau_{n-1} = \left(\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_{n-1}}\right) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} U_\nu (p_{\nu-1} - p_\nu) - U_n \frac{p_{n-1} - p_n}{p_{n-1}}.$$

En multipliant par $p_{n-1}/(p_{n-1} - p_n)$, on a

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-1} - p_n}(\tau_n - \tau_{n-1}) = \frac{1}{p_n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} U_\nu (p_{\nu-1} - p_\nu) - U_n =$$

$$= \frac{1}{p_n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (U_\nu - U_n)(p_{\nu-1} - p_\nu) = o(1), \quad n \to \infty,$$

d'où il s'ensuit que $\{\tau_n\}$ satisfait à (2.4).

Remarquons que la preuve du théorème 1 est une généralisation des considérations des MM. Mazur et Orlicz dans la section 2.5.1 de leur étude [1], relatives au cas particulier $p_n = c^{-n}$, $c > 1$. La preuve du théorème 2, qui suit, est toutefois indépendente de leurs considérations.

La condition que la suite (2.6) converge n'est pas unique. Une autre est contenue dans le

THÉORÈME 2. *Pour qu'une suite* $\{u_n\}$ *appartienne à* P, *il faut et il suffit que la suite*

$$V_1 = A_1, \quad V_n = \frac{p_n u_n - p_{n-1} u_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} + p_n u_n, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{2.12}$$

converge.

D é m o n s t r a t i o n. Condition nécessaire. Soit $\{u_n\} \in P$. De

$$V_n - \tau_n = \frac{p_{n-1}}{p_n - p_{n-1}}(\tau_n - \tau_{n-1}) + p_n \tau_n + c = c + o(1), \ n \to \infty$$

il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \tau_n + c.$$

La preuve que la condition est aussi suffisante s'obtient par une double application du théorème 1.

Soit $\lim V_n = u$. Nous introduisons les suites

$$\alpha_n = \prod_{\nu=1}^{n} [1+(p_\nu - p_{\nu-1})], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.13}$$

qui convergent évidemment (avec $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$),

$$t_n = u_n \alpha_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.14}$$

et

$$U_n = \frac{t_n p_n - t_{n-1} p_{n-1}}{p_n - p_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{2.15}$$

À cause de

$$\alpha_n = (1 + p_n - p_{n-1}) \alpha_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

on a, pour $n = 2, 3, \ldots,$

$$\begin{aligned} \frac{U_n}{\alpha_{n-1}} &= \frac{p_n u_n (1 + p_n - p_{n-1}) - p_{n-1} u_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} = \\ &= \frac{p_n u_n - p_{n-1} u_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} + p_n u_n = V_n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Les suites $\{\alpha_n\}$ et $\{V_n\}$ étant convergentes d'après les suppositions du théorème 2, il en est de même de la suite $\{U_n\}$ et on peut appliquer le théorème 1 et conclure que $\{t_n\} \in P$. De (2.3) et (2.14) il s'ensuit alors que la suite $\{u_n\}$ est de la forme

$$u_n = \tau_n/\alpha_n + c/(\alpha_n p_n), \tag{2,17}$$

où $\{\tau_n\}$ est une suite convergente qui satisfait à (2.4).

Nous allons montrer que le quotient τ_n/α_n satisfait également à la condition (2.4). On a

$$\frac{\tau_n}{\alpha_n} - \frac{\tau_{n-1}}{\alpha_{n-1}} = \frac{\tau_n - \tau_{n-1} + \tau_{n-1} (p_{n-1} - p_n)}{\alpha_{n-1} (1 + p_n - p_{n-1})}$$

et, étant donné que

$$\tau_n - \tau_{n-1} = o\left(\frac{p_{n-1} - p_n}{p_{n-1}}\right),$$

on a

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-1} - p_n}\left(\frac{\tau_n}{\alpha_n} - \frac{\tau_{n-1}}{\alpha_{n-1}}\right) = \frac{o(1) + \tau_{n-1}\, p_{n-1}}{\alpha_{n-1}(1 + p_n - p_{n-1})} = o(1), \quad n \to \infty,$$

c'est à dire

$$\frac{\tau_n}{\alpha_n} - \frac{\tau_{n-1}}{\alpha_{n-1}} = o\left(\frac{p_{n-1} - p_n}{p_{n-1}}\right). \tag{2.18}$$

Appliquons maintenant encore une fois le théorème 1, cette fois-ci à la suite $\{u_n\}$ définie par (2.17). Nous allons montrer qu'elle satisfait à la condition du théorème 1. On a

$$\frac{p_n u_n - p_{n-1} u_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} = \frac{(p_n \tau_n)/\alpha_n - (p_{n-1}\tau_{n-1})/\alpha_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} + c\,\frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{\alpha_n \alpha_{n-1}(p_n - p_{n-1})} =$$

$$= \frac{\tau_n}{\alpha_n} + \frac{p_{n-1}}{p_n - p_{n-1}}\left(\frac{\tau_n}{\alpha_n} - \frac{\tau_{n-1}}{\alpha_{n-1}}\right) + \frac{c}{\alpha_n}$$

et, à cause de (2.18),

$$\frac{p_n u_n - p_{n-1} u_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} = \frac{\tau_n + c}{\alpha_n} + o(1) \to \frac{\lim \tau_n + c}{\lim \alpha_n}, \quad n \to \infty.$$

En appliquant le théorème 1, on déduit finalement $\{u_n\} \in P$, c.q.f.d.

3. Pour appliquer les résultats obtenus pour la construction des méthodes de limitation dont on a parlé dans № 1, supposons qu'une suite $\{p_n\}$ soit donnée strictement décroissante et convergente avec la limite zéro, et construisons les procédés de limitation A et B de la manière suivante: pour $u = \{u_n\}$

$$A_n(u) = \frac{p_n u_n - p_{n-1} u_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} + p_n u_n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

$$B_n(u) = \frac{p_n u_n - p_{n-1} u_{n-1}}{p_n - p_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

$$A_1(u) = B_1(u) = u_1.$$

Dès théorèmes 1 et 2 il s'ensuit que le domaine des méthodes A et B est le même, notamment l'ensemble P. Les suites u de cet ensemble étant de la forme

$$\{\tau_n + c/p_n\},$$

on voit que

$$A(u) = \lim_{n\to\infty} A_n(u) = \lim_{n\to\infty} \tau_n + c,$$

$$B(u) = \lim_{n\to\infty} B_n(u) = \lim_{n\to\infty} \tau_n,$$

et de là que les méthodes A et B ne sont pas consistentes en cas que $c \neq 0$. Il est évident que $c = 0$ seulement pour les suites convergentes faisant partie de P.

Si on a de plus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_n}{p_{n-1}} < 1,$$

toutes les suites convergentes font partie de l'ensemble P. Dans ce cas A et B font exemple de deux méthodes de limitation avec le même domaine, qui limitent toutes les suites convergentes vers leur limite ordinaire et qui ne sont pas consistentes.

4. En prenant pour $\{p_n\}$ des suites particulières, on peut obtenir des théorèmes sur la vitesse de divergence. Ainsi du théorème 1, avec $p_n = 1/n$ on obtient le

THÉORÈME 3. *Pour qu'une suite* $\{s_n\}$ *soit de la forme*

$$s_n = \tau_n + c \cdot n,$$

où $\{\tau_n\}$ *est une suite convergente qui satisfait à la condition*

$$\tau_n - \tau_{n-1} = o(1/n),$$

et $c = $ *const., il faut et il suffit que*

$$s_n - s_{n-1} - \frac{s_n}{n} \sim \frac{-\lim_{\nu\to\infty} \tau_\nu}{n}, \quad n \to \infty.$$

De quelque intérêt peut aussi être le

THÉORÈME 4. *Pour qu'une suite* $\{s_n\}$ *soit de la forme*

$$s_n = \tau_n + c \cdot (n+1)!\,,$$

où $\{\tau_n\}$ *est une suite convergente et* $c = const.$, *il faut et il suffit que*

$$s_{n-1} - \frac{s_n - s_{n-1}}{n} \to \lim_{\nu \to \infty} \tau_\nu\,, \quad n \to \infty\,.$$

Le résultat suit du théorème 1 en prenant $p_n = 1/(n+1)!$.

(Reçu le 23 mai 1956)

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Mazur et W. Orlicz — On linear methods of summability *Studia Math.* **XIV** (1954), 129—160.

[2] Ł. Wlodarski — Sur les méthodes continues de limitation (I). *Ibid.* **XIV** (1954), 161—187.