INVERSION D'UNE TRANSFORMATION INTÉGRALE

Par

BOGOLJUB STANKOVIĆ (Novi Sad)

SOMMAIRE: On annonce des résultats relatifs à l'inversion de la transformation intégrale dont le noyau est une fonction de E. M. Wright.

Dans cette note nous allons formuler des résultats relatifs à l'inversion de la transformation intégrale:

$$F(\sigma) = \int_0^\infty \Phi(0, -\nu; -y/\sigma^\nu) f(y) \frac{dy}{\nu y}. \tag{1}$$

où

$$\Phi(\mu, -\nu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\mu-k\nu)}, \quad 0 < \nu < 1,$$

est une fonction entière introduite par E. M. Wright. Cette transformation a été déjà examinée dans un article antérieur [2]; ici nous donnons une formule pour l'inversion analogue à celle de Post-Widder qui est bien connue dans la théorie de la transformation de Laplace.

Pour la valeur spéciale de ν, $\nu = 1/q$, $q \in N$, la transformation [1] appartient à une classe traitée par J. J. Hirschman et D. V. Widder [1]. Pour l'autre valeur de ν, $\nu = p/q$, q et $p \in N$, elle se réduit à celle examinée par D. V. Widder [4].

Nos résultats ont été obtenus d'une manière toute différente de celle des MM. Hirschman et Widder et dans le cas $\nu = p/q$, $p \neq 1$, le résultat pour la transformation [1] est plus précis. Cette manière peut être utilisée pour chaque transformation dont le noyau satisfait à une équation différentielle du même type que celle de la transformation [1].

THÉORÈME. *Soient:*

1. a_i, $i=1,2,\ldots,p-1$ *et* A *des constantes figurant dans l'équation différentielle:*

$$D^{q-1}\Phi(1-p/q,\,-p/q,\,z)=A\prod_{n=1}^{p-1}\left(1+\frac{z}{a_n}D\right)z\,\Phi(1-p/q,\,-p/q;\,z), \tag{2}$$

satisfaite par la fonction $\Phi(1-p/q,\,-p/q;\,z)$;

2. *L'opérateur*

$$\left(1+\frac{z}{a_n}D\right)^{-1}\ldots \underset{=}{\mathrm{def}} \frac{p/q}{z^{p/q}}\int\limits_{\infty}^{z} t^{p/q-1}\ldots dt\,;$$

3. $u_i(z)$ *une suite définie par la formule récursive:*

$$u_k(z)=\frac{(-1)^{q-1}}{A}\prod_{n=1}^{p-1}\left(1+\frac{z}{a_n}D\right)^{-1}D^{q-1}u_{k-1}(z),\qquad u_0(z)=\frac{1}{z}F(z^{-q/p})\,;$$

4. *L'intégrale*

$$\int\limits_0^{\infty}\Phi(1-p/q,\,-p/q;\,-yz)\,f(y)\,dy$$

convergente pour $z\geqslant z_0$; *alors*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Gamma(pk+1)}{\Gamma(qk+1)}\left[\frac{q}{pt}(pk)^{1-p/q}\right]^{qk+1}u_k\left[\frac{q}{pt}(pq)^{1-p/q}\right]=f(t)$$

pour chaque t *où* $f(t)$ *est continue.*

Nous ne donnons ici qu'une idée de la démonstration; pour la démonstration complète voir [3].

A l'aide d'une relation connue pour les fonctions de Wright, notre transformation revêt une forme plus commode

$$F(\sigma)=\int\limits_0^{\infty}\Phi(0,\,-p/q;\,-y/\sigma^{p/q})\,f(y)\,\frac{dy}{py/q}=$$

$$=\frac{1}{\sigma^{p/q}}\int\limits_0^{\infty}\Phi(1-p/q,\,-p/q;\,-y/\sigma^{p/q})\,f(y)\,dy,$$

d'où, par un changement de variable,

$$\frac{1}{z} F\left(z^{-q/p}\right)=\int_0^\infty \Phi\left(1-p/q,\ -p/q;\ -yz\right) f(y)\, dy. \tag{8}$$

Dans ce qui suit nous allons faire une suite d'opérations tout à fait formelles dont la validité n'est pas difficile à démontré.

En dérivant $q-1$ fois par rapport à z les deux membres de la relation (3) et tenant compte de l'équation différentielle (2), nous obtenons:

$$D_z^{q-1}\left[\frac{1}{z} F\left(z^{-q/p}\right)\right]=(-1)^{q-1}\int_0^\infty \Phi^{(q-1)}\left(1-p/q,-p/q;-yz\right) y^{q-1} f(y)\, dy,$$

$$=(-1)^{q-1} A \int_0^\infty \prod_{n=1}^{p-1}\left(1-yz\frac{D_{(-yz)}}{a_n}\right)(-yz)\, \Phi\left(1-p/q,\ -p/q;\ -yz\right) y^{q-1} f(y)\, dy,$$

$$=(-1)^{q-1} A \int_0^\infty \prod_{n=1}^{p-1}\left(1+z\frac{D_z}{a_n}\right)(-yz)\, \Phi\left(1-p/q,\ -p/q;\ -yz\right) y^{q-1} f(y)\, dy,$$

enfin

$$(-1)^{q-1}\frac{1}{A}\prod_{n=1}^{p-1}\left(1+\frac{z}{a_n} D_z\right)^{-1} D_z^{q-1}\left[\frac{1}{z} F\left(z^{-q/p}\right)\right]=$$

$$=\int_0^\infty \Phi\left(1-p/q,-pq;-yz\right) y^q f(y)\, dy.$$

En revenant à la notion du théorème, nous aurons:

$$u_0(z)=\frac{1}{z} F\left(z^{-p/q}\right), \quad u_1(z)=\int_0^\infty \Phi\left(1-p/q,\ -p/q;\ -yz\right) y^q f(y)\, dy.$$

Le même procédé, en le continuant, donne:

$$u_k(z)=\int_0^\infty \Phi\left(1-p/q,\ -p/q;\ -yz\right) y^{qk} f(y)\, dy,$$

ou

$$z^{kq+1} u_k(z)=\int_0^\infty \Phi\left(1-p/q,\ -p/q;\ -\tau\right) \tau^{qk} f\left(\frac{\tau}{z}\right) d\tau.$$

Il reste, donc, à vérifier la relation

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(pk+1)}{\Gamma(qk+1)} \int_0^\infty \Phi\,(1-p/q, -p/q; -\tau)\, \tau^{qk} f\left(\frac{\tau pt}{q} (pk)^{p/q-1}\right) d\tau.$$

Pour cela il faut remarquer que le noyau de cet intégrale prend son maximum pour $\tau = \frac{p}{q}(pk)^{1-p/q}$.

(Reçu le 14 mars 1956)

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. J. Hirschman and D. V. Widder — The Convolution Transform, Princeton University Press, 1955.

[2] Б. Становић — О једној класи сингуларних интегралних једначина, *Зборник радова Мат. инст. С.А.Н.* **4** (1955), 81—130.

[3] ——————— О инверзији једне интегралне трансформације, *Годишњак Филозофског факултета у Новом Саду*, бр. 1 (à paraitre).

[4] D. V. Widder — Symbolic inversions of the Fourier sine transform and of related transfotms, *Journal Indian Math. Soc.* **14** (1950), pp. 119—128.