MERCERSCHE SÄTZE FÜR NICHTLINEÄRE MITTEL

Von
VLADETA VUČKOVIĆ (Zrenjanin)

ZUSAMMENFASSUNG — Beweis des Satzes: „Aus $x_n+q\,X_n \to (1+q)\,x$ $n\to\infty$ folgt $x_n \to x$, wenn $q > -1$", wo X_n ein allgemeines Mittel der Glieder positiver Zahlenfolge $\{x_n\}$ ist. Anwendung und Gegenbeispiele für geometrische und harmonische Mittel.

1. Das Ziel dieser Note ist der Beweis eines ziemlich allgemeinen Satzes der Mercerschen Art, der die Sätze mit geometrischem und harmonischem Mittel als Spezialfälle enthält. Für diese gebe ich auch Gegenbeispiele dass sie die beste seien, wie es im Sinne der ähnlichen Sätze üblich ist. Als wesentliches Hilfsmittel erweist sich dabei ein Satz über reele Folgen, den ich, anschliessend an eine Untersuchung des Herrn L. T. Cattabianchi [1], in [2] geben konnte, so dass die Sätze dieser Note als Beispiele der Anwendungsmöglichkeiten jenes Satzes betrachtet werden können.

2. Ich betrachte die positive Folge $\{x_n\}$ und aus ihren Gliedern zusammengesetztes Mittel $\{X_n\}$ das den folgenden zwei Bedingungen genügt:

$$\min_{1 \leqq \nu \leqq n} x_\nu \leqslant X_n \leqslant \max_{1 \leqq \nu \leqq n} x_\nu \tag{2.1}$$

$$\varliminf x_n \leqslant \varliminf X_n \leqslant \varlimsup x_n. \tag{2.2}$$

Der genannte Hauptsatz ist dann der

SATZ 1. *Sei* $q > -1$ *und*

$$y_n = (x_n + q\ X_n)/(1+q), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2.3}$$

Aus

$$y_n \to y, \quad n \to \infty, \tag{2.4}$$

folgt dann

(2.5) $$x_n \to y, \quad n \to \infty,$$

immer wenn entweder die Folge $\{X_n\}$ *monoton ist oder, im Falle dass sie nicht monoton ist, wenn zwischen den Gliedern der Folgen* $\{y_n\}$ *und* $\{X_n\}$ *folgende Inklusionen stattfinden:*

(2.6) *für jedes n für welches* $X_n \gtreqqless X_{n-1}$, *ist auch* $y_n \gtreqqless X_n$

(wobei in jeder Inklusion das gleiche Zeichen zu nehmen ist).

Den Beweis führe ich zuerst für monotone $\{X_n\}$. Es genügt die Beschränktheit dieser Folge zu zeigen. Für $q \geqslant 0$ ist dies trivial, es sei deswegen $-1 < q < 0$. Aus (2.4) und (2.3) folgt

(2.7) $$x_n \leqslant |q| X_n + M,$$

wo M eine positive Konstante bedeutet.

Ich führe zwei nicht abfallende Folgen

(2.8) $$\zeta_n = \max_{1 \leqq \nu \leqq n} x_\nu$$

und

(2.9) $$\xi_n = \max_{1 \leqq \nu \leqq n} X_\nu$$

ein. Wegen (2.1) ist zuerst

(2.10) $$X_n \leqslant \zeta_n \quad \text{für jedes } n = 1, 2, \ldots$$

und daraus

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq n} X_\nu \leqslant \max_{1 \leqq \nu \leqq n} \zeta_\nu = \zeta_n$$

d. h.

(2.11) $$\xi_n \leqslant \zeta_n \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Anderseits, aus (2.7) folgt wieder

$$\zeta_n \leqslant |q| \xi_n + M, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

und endlich, nach (2.11),

$$\xi_n \leqslant \frac{M}{1-|q|}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

woraus unmittelbar die Beschränktheit der Folge $\{X_n\}$ ersichtlich wird.

Der Fall wenn die Folge $\{X_n\}$ nicht monoton ist wird durch den folgenden, am Anfang erwähten Satz, erledigt:

Seien $\{X_n\}$ *und* $\{y_n\}$ *zwei reelle Folgen und die Folge* $\{X_n\}$ *nicht monoton. Wenn für jedes* n *für welches* $X_n \gtreqless X_{n-1}$, *auch* $y_n \gtreqless X_n$ *ist (wobei in jeder Inklusion das gleiche Zeichen zu nehmen ist) so gilt*

$$\underline{\lim}\, y_n \leqslant \underline{\overline{\lim}}\, X_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n.$$

(Zum Beweise siehe Vučković [2]). Weil aber die Folge $\{y_n\}$ nach (2.4) konvergiert, folgt dasselbe für die Folge $\{X_n\}$.

Aus (2.3) schliesst man endlich: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = y$ w.z.b.w.

3. Ich gebe jetzt zwei Sätze, derer je eine Hälfte Spezialfall des Satzes 1 ist, an:

SATZ 2. *Sei* $\{x_\nu\}$ *eine Folge positiver Zahlen und*

$$y_n = (x_n + q \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n})/(1+q), \quad q \neq -1, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.1}$$

Wenn $q > -1$ *so folgt aus*

$$y_n \to y, \quad n \to \infty,$$

immer

$$x_n \to y, \quad n \to \infty,$$

Wenn dagegen $q < -1$, *kann man immer eine divergente Folge* $\{x_n\}$ *finden, für welche die entsprechende Folge* $\{y_n\}$ *konvergiert.*

Beweis. Sei

$$X_n = \sqrt[n]{x_1, x_2, \ldots x_n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Daraus ergibt sich die Geltung von (2.1) und (2.2) und auch dass

$$x_n = X_n \left(\frac{X_n}{X_{n-1}}\right)^{n-1}.$$

Wenn jetzt $X_n \gtreqless X_{n-1}$ folgt gleich dass auch $x_n \gtreqless X_n$ ist, woraus mit (3.1) die Geltung der Inklusionen „wenn $X_n \gtreqless X_{n-1}$, es ist auch $y_n \gtreqless X_n$" folgt. Anwendung des Satzes 1 ergibt den Beweis der ersten Hälfte $(q > -1)$.

Um die zweite Hälfte des Satzes 2 zu beweisen schreibe ich die Folge $\{y_n\}$ in folgender Weise:

$$y_n = \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + q\sqrt[n]{\alpha_n}\right) \Big/ (1+q), \quad n = 1, 2, \ldots$$

(was mit $\alpha_1 = 1$, $\alpha_n = x_1 \ldots x_n$, $n \geqslant 2$ die Form (3.1) ergibt).

Nehme ich jetzt

$$\alpha_n = |\, q\,|^{n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

so ist

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = |\, q\,| \cdot |\, q\,|^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}}, \quad n = 3, 4, \ldots,$$

und

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} + q\sqrt[n]{\alpha_n} = 0, \quad n = 3, 4, 5, \ldots,$$

also die Folge $\{y_n\}$ konvergiert und doch die Folge

$$\sqrt[n]{\alpha_n} \sim |\, q\,|^{\lg n}$$

divergiert. Übertragung auf $\{x_n\}$ ergibt auch die Divergenz dieser Folge.

SATZ 3. *Sei $\{x_n\}$ eine Folge positiver Zahlen und*

$$y_n(1+q) = x_n + q \cdot \frac{n}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} 1/x_\nu}, \quad q \neq -1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Wenn $q > -1$ so folgt aus

$$y_n \to y, \quad n \to \infty$$

immer

$$x_n \to y, \quad n \to \infty.$$

Wenn dagegen $q < -1$ kann man immer eine divergente Folge $\{x_n\}$ finden für welche die entsprechende Folge $\{y_n\}$ konvergiert.

Beweis. Sei

$$X_n = n \Big/ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x_\nu}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

woraus sich die Geltung von (2.1) und (2.2) leicht ergibt. Es ist weiter

$$\frac{1}{x_n} = \frac{n}{X_n} - \frac{n-1}{X_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

dh.

$$x_n = \frac{X_n X_{n-1}}{n X_{n-1} - (n-1) X_n}. \tag{3.3}$$

Sei zuerst $X_n > X_{n-1}$. Daraus folgt für $n = 2, 3, \ldots$

$$(n-1) X_n > (n-1) X_{n-1}$$

also

$$X_{n-1} > n X_{n-1} - (n-1) X_n$$

und aus (3.3) auch

$$x_n > X_n,$$

was, mit (3.2), endlich

$$y_r > X_n$$

ergibt. Ähnlich kann man andere Inklusionen beweisen und so den Satz 1 anwenden, was die Geltung der ersten Hälfte des Satzes 3 ergibt ($q > -1$). Un die zweite Hälfte zu beweisen betrachten wir für $q < -1$ die Folge $\{x_n\}$ definiert durch:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{|q|}{|q|-1}, \quad \frac{1}{x_n} = \frac{|q|^{n-1} \cdot (n-1)!}{(|q|-1)(2|q|-1)\ldots(n|q|-1)}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Für $n \geqslant 3$ ist

$$\frac{1}{x_n} = |q| \left(\frac{n}{x_n} - \frac{n-1}{x_{n-1}} \right)$$

und daraus

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n} = |q| \frac{n}{x_n}.$$

was endlich

$$x_n + q \frac{n}{1/x_1 + \ldots + 1/x_n} = 0 \quad \text{für} \quad n \geqslant 3$$

ergibt, während

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{|q|}\right)\left(1 - \frac{1}{2\,|q|}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(n-1)\,|q|}\right)(n\,|q|-1)$$

divergiert.

(Eingegangen am 4 Januar 1956)

LITERATUR

[1] L. T. Cattabianchi — Sul teoremi di Mercer e Vijayaraghavan precisati per le successioni oscillanti. *Rivista Mat. Univ. Parma* **4** (1953), 337—361.

[2] V. Vučković — Ein Satz über reele Folgen, *Ibid.* **7**, fasc. **1—2** (1956). (Im Druck.)