SUR UNE RELATION D'ORDRE DANS LE GROUPE SYMÉTRIQUE

Par

MIRKO STOJAKOVIĆ (Novi Sad)

SOMMAIRE. — On démontre quelques théorèmes concernants les groupes symétriques ordonnés par l'ordre lexicographique et permettants' d'établir les tableaux de compositions de ces groupes.

Lehmer [1] et Mikhalsky [2] ont considéré quelques relations d'ordre dans le groupe symétrique et ont donné des procédés de formation automatique des tableaux de composition de ces groupes.

Nous définirons ici une „ordination lexicographique" du groupe symétrique et formulerons un certain nombre de théorèmes qui ont un interêt en soi et permettent en outre la construction automatique des tableaux de composition de ce groupe.

Soit σ_n le groupe symétrique de rang n, c'est-à-dire d'ordre $n!$ et $i_1, i_2, \ldots, i_n$ un élément de ce groupe, où $i_1, i_2, \ldots, i_n$ est une permutation de la suite $1, 2, \ldots, n$.

DÉFINITION I. Soit

$$a = (i_1, i_2, \ldots, i_n), \quad a \in \sigma_n,$$

ot

$$b = (j_1, j_2, \ldots, j_n), \quad b \in \sigma_n.$$

Nous posons

$$a > b$$

si, et seulement si

$$\sum_{p=1}^{n} (i_\nu - j_\nu)(n-1)^{n-\nu} > 0.$$

Puisque

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} (i_\nu - j_\nu)(n-1) = 0\right) \rightleftarrows (i_\nu = j_\nu) \quad \text{pour tout } \nu,$$

on aura dans ce cas

$$a = b.$$

C'est cet ordre que nous appellerons *l'ordre lexicographique* du groupe σ_n.

Ce groupe est alors totalement ordonné et soit

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n!},$$

la suite des éléments de σ_n rangés suivant l'ordre lexicographique ainsi défini.

DÉFINITOIN 2. Soit

$$\rho(a_\nu) = \nu \quad \text{et} \quad p(\nu) = a_\nu.$$

DÉFINITION 3. Soit

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu - \left[\dfrac{\nu}{(n-1)!}\right](n-1)! & \text{pour} \quad \nu \neq (n-1)!\,k, \quad k = 1, 2, \ldots \\ (n-1)! & \text{pour} \quad \nu = (n-1)!\,k, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

et

$$\bar{\bar{\nu}} = \begin{cases} \nu - \left[\dfrac{\nu}{(n-2)!}\right](n-2)! & \text{pour} \quad \nu \neq (n-2)!\,k, \quad k = 1, 2, \ldots \\ (n-2)! & \text{pour} \quad \nu = (n-2)!\,k, \quad k = 1, 2 \ldots \end{cases}$$

Il est évident que l'on a

$$\rho(p(\nu)) = \nu \qquad p(\rho(a_\nu)) = a_\nu;$$

$$(p(\alpha) = p(\beta)) \rightarrow (\alpha = \beta); \qquad (\rho(a_\alpha) = \rho(a_\beta)) \rightarrow (a_\alpha = a_\beta).$$

THÉORÈME 1. *Soit*

$$a_\nu = (i_1, i_2, \ldots, i_n);$$

alors

$$\nu = \rho(a_\nu) = 1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} (i_\mu - k_\mu - 1)\,(n-\mu)!,$$

où k_μ est le nombre des éléments de la suite $i_1, i_2, \ldots, i_{\mu-1}$ qui sont plus petits que i_μ.

THÉORÈME 2. *On a*

$$a_{\bar{\nu}} = (1, i'_2, i'_3, \ldots, i'_n),$$

où

$$i'_j = \begin{cases} i_j & \textit{pour} \quad i_j > i_1 \\ i_j + 1 & \textit{pour} \quad i_j < i_1 \end{cases} \qquad j = 2, \ldots, n$$

La démonstration de ces deux théorèmes ne présente pas de difficultés.

THÉORÈME 3. *Si*

$$a_\nu a_\mu = a_\lambda \quad et \quad \overline{\nu} = \nu$$

alors

$$a_{\overline{\lambda}} = a_{\overline{\nu}} a_{\overline{\mu}},$$

où le produit $a_\nu a_\mu$ de deux permutations a_ν, a_μ est donné par

$$a_\nu a_\mu = (i_1, i_2, \ldots, i_n)\ (j_1, j_2, \ldots j_n) = (j_{i_1}, j_{i_2}, \ldots, j_{i_n})$$

Démonstration. Soit

$$a_\nu = (1, i_2, \ldots, i_n), \quad a_\mu = (j_1, j_2, \ldots, j_n).$$

Posons

$$a_\lambda = (j_1, j_{i_2}, \ldots, j_{i_n}).$$

Alors

$$a_{\overline{\lambda}} = (1, j'_{i_2}, \ldots, j'_{i_n}), \quad a_{\overline{\nu}} = a_\nu, \quad a_{\overline{\mu}} = (1, j'_2, \ldots, j'_n)$$

et par conséquent

$$a_{\overline{\nu}} a_{\overline{\mu}} = (1, j'_{i_2}, j'_{i_3}, \ldots, j'_{i_n}) = a_{\overline{\lambda}}.$$

CORROLAIRE I. *On a*

$$\rho(a_\nu a_\mu) = \mu_{(1)} + \rho(a_{\overline{\nu}} a_{\overline{\mu}}) \quad pour \quad \overline{\nu} = \nu,$$

où $\mu_{(1)} = \mu - \overline{\mu}$.

Du théorème 3 et de la définition I il suit que

$$\rho(a_{\overline{\nu}} a_{\overline{\mu}}) = \rho(a_{\overline{\lambda}}) = \overline{\lambda} = \lambda - \lambda_{(1)} \quad \text{où} \quad \lambda_{(1)} = \lambda - \overline{\lambda},$$

mais $\lambda_{(1)} = \mu_{(1)}$ d'où l'énoncé du corrolaire.

LEMME I. *Si*

$$a_\alpha = (1, k_2, \ldots, k_n), \quad a_\nu = (l, i_2, \ldots, i_n)$$

et

$$a_\alpha a_\nu = (l, 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n),$$

alors

$$a_\alpha a_{\overline{\nu}} = (1, 2, \ldots, n) = a_1,$$

c'est-à-dire

$$a_\alpha^{-1} = a_{\overline{\nu}}.$$

Démonstration. Comme, d'une part, d'après corr. I

$$\rho(a_\alpha a_\nu) = \rho(a_{\overline{\alpha}} a_{\overline{\nu}}) + \nu_{(1)}, \quad \nu_{(1)} = \nu - \overline{\nu},$$

et de l'autre

$$\rho(a_\alpha a_\nu) = \rho(l, 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n) =$$

$$= (n-1)!(l-1)+1,\ \nu - \overline{\nu} = (n-1)!(l-1),$$

on a

$$\rho(a_\alpha a_{\overline{\nu}}) = (n-1)!(l-1)+1-(n-1)!(l-1) = 1;$$

$$a_\alpha a_{\overline{\nu}} = p(1) = (1, 2, \ldots, n),$$

ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME 4. *Si*

$$a_\nu = (2, i_2, \ldots, i_n),\ a_\mu = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$$

alors

$$a_\nu a_\mu = a_{\overline{\nu}}\, p(\lambda_{(2)} + \rho(a_{\overline{\overline{\mu}}})),$$

où d'après la définition 3

$$\lambda_{(2)} = \lambda - \overline{\overline{\lambda}} = (n-1)!(j_2-1) + (n-2)!(j_1-k_1-1)$$

où

$$k_1 = \begin{cases} 0 & \text{pour } j_1 > j_2, \\ 1 & \text{pour } j_1 < j_2. \end{cases}$$

Démonstration. Multiplions l'égalité à démontrer de gauche par

$$a_\alpha = (1, k_2, \ldots, k_n),$$

il résulte d'après Lemme I (pour $l=2$)

$$a_\alpha(a_\nu a_\mu) = (2, 1, 3, \ldots, n)(j_1, j_2, \ldots, j_n) = (j_2, j_1, j_3, \ldots, j_n) =$$

$$= a_\alpha a_{\overline{\nu}}\, p(\lambda_{(2)} + \rho(a_{\overline{\overline{\mu}}})) = p(\lambda_{(2)} + \rho(a_{\overline{\overline{\mu}}})).$$

et il reste à démontrer que l'on a

$$(j_2, j_1, j_3, \ldots, j_n) = p(\lambda_{(2)} + \rho(a_{\overline{\overline{\mu}}})).$$

Passons maintenant à la fonction ρ; il faut donc démontrer que l'on a

$$\rho(j_2, j_1, j_3, \ldots, j_n) = \lambda_{(2)} + \rho(a_{\overline{\overline{\mu}}})$$

Mais c'est évident d'après le théorème 1.

THÉORÈME 5. *Si*

$$a_\nu = (l, i_2, \ldots, i_n) \quad \textit{avec} \quad l = 2, 3, \ldots, n$$

et

$$a_\mu = (j_1, j_2, \ldots, j_n),$$

alors

$$a_\nu a_\mu = p\,((n-1)\,! + \bar{\nu}) \cdot p\,\{\mu - \bar{\mu} + \rho\,(p\,[(n-2)!\,(l-2) + 1] \cdot a_{\bar{\mu}})\}.$$

Démonstration. Soit

$$a_\alpha a_\nu = (l, 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n),$$

$$a_\alpha a_\nu a_\mu = (l, 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n)(j_1, j_2, \ldots, j_n) = (j_l, j_1, \ldots, j_{l-1}, j_{l+1}, \ldots, j_n),$$

$$a_\alpha p\,[(n-1)! + \bar{\nu}] = (2, 1, 3, \ldots, n).$$

En multipliant l'égalité à démontrer de gauche par a_α on aura

$$(j_l, j_1, \ldots, j_{l-1}, j_{l+1}, \ldots, j_n) = (2, 1, 3, \ldots, n)\; p\,\{\mu - \bar{\mu} + \rho\,(p\,[(n-2)!\,(l-2) + 1]\,a_{\bar{\mu}})\},$$

En multipliant cette égalité encore une fois, maintenant par $(2, 1, 3, \ldots, n)$, il vient

$$a_\lambda = (j_1, j_l, j_2, \ldots, j_{l-1}, j_{l+1}, \ldots, j_n) = p\,\{\mu - \bar{\mu} + \rho\,(p\,[(n-2)!\,(l-2) + 1]\,a_{\bar{\mu}})\},$$

ou, en passant d'abord à la fonction ρ:

$$\lambda = \bar{\lambda} + (\lambda - \bar{\lambda}) = \mu - \bar{\mu} + \rho\,(p\,[n-2)!\,(l-2) + 1]\,a_{\mu})$$

et puis à la fonction p, en éliminant de l'égalité précédente la quantité

$$\lambda - \bar{\lambda} = \mu - \bar{\mu} = (n-1)!\,(j_1 - 1),$$

il suit qu'il faut démontrer que l'on a

$$a_{\bar{\lambda}} = p\,(\bar{\lambda}) = p\,((n-2)!\,(l-2) + 1)\,a_{\bar{\mu}}.$$

A cause de

$$p\,((n-2)!\,(l-2) + 1) = (1, l, 2, 3, \ldots, l-1\;\; l+1, \ldots, n),$$

$$a_{\bar{\mu}} = (1, j'_2, j'_3, \ldots, j'_n),$$

$$a_{\bar{\lambda}} = 1, j'_l, j'_2, \ldots, j'_{l-1}, j'_{l+1}, \ldots, j'_n),$$

il reste à démontrer que l'on a

$$(1, j'_l, j_2, \ldots, j'_{l-1}, j'_{l+1}, \ldots, j'_n = (1, l, 2, 3, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n)(1, j'_2, j'_3 \ldots, j'_n)$$

ce qui est évident d'après la définition de produit de deux permutations. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Les théorèmes énocés permettent de trouver facilement l'ordre lexicographique d'une permutation donnée et, inversement, de trouver la permutation dont l'ordre lexicographique est donné. Ils permettent aussi la construction automatique du tableau de composition des groupes symétriques.

Pour faciliter au lecteur la vérification des énoncés précédents par des exemples, nous reproduisons ici le tableau de composition du groupe σ_4 ordonné par ordre lexicographique qui figure dans le tableau au lieu des permutations.

On peut utiliser ce tableau aussi pour vérifier les propositions qui suivent et qui ce rapportent au cas général du groupe σ_n.

Décomposons le tableau de multiplications du groupe σ_n, en prenant les éléments du σ_n dans l'ordre lexicographique, en tableaux carrés de $(n-1)!$ lignes et $(n-1)!$ colonnes. On aura n^2 sous-tableaux A_{ij}; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Nous supposons que le tableau A_{11} est dèjà connu. On obtient alors les sous-tableaux A_{ij}, $i \neq 1$, $j \neq 1$ en procédant comme suit:

Le tableau A_{1j}; $j = 2, 3, \ldots, n$ s'obtient du tableau A_{11} en ajoutant aux éléments de celui-ci le nombre $(n-1)!\,(j-1)$, ce qui est justifié par le corrolaire 1.

On obtient le tableau A_{2j}; $j = 1, 2, \ldots, n$ en prennant les colonnes des tableaux A_{1i}; $i = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$ de la manière suivante: Décomposons le tableau A_{1i}; $i = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ en ensembles $A_{1i}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ de $(n-2)!$ colonnes. Transportons dans le tableau A_{2j} successivement les ensembles $A_{1i}^{(k)}$, où

$$k = \begin{cases} j-1 & \text{pour } i < j \\ j & \text{pour } i > j \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$$

Le tableau ainsi obtenu est le tableau A_{2j} d'après le théorème 4.

On obtient le tableau A_{lj}; $l = 3, 4, \ldots, n$ du tableau A_{2j} par une permutation des colonnes de celui-ci. Cette permutation est déterminée par la $[(n-2)!\,(l-2)+1]$-ème ligne du tableau A_{11}: Les colonnes du tableau A_{lj} dérivent des colonnes de A_{2j} par la même permutation comme les éléments

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15	18	17	20	19	22	21	24	23
3	3	5	1	6	2	4	9	11	7	12	8	10	15	17	13	18	14	16	21	23	19	24	20	22
4	4	6	2	5	1	3	10	12	8	11	7	9	16	18	14	17	13	15	22	24	20	23	19	21
5	5	3	6	1	4	2	11	9	12	7	10	8	17	15	18	13	16	14	23	21	24	19	22	20
6	6	4	5	2	3	1	12	10	11	8	9	7	18	16	17	14	15	13	24	22	23	20	21	19
7	7	8	13	14	19	20	1	2	15	16	21	22	3	4	9	10	23	24	5	6	11	12	17	18
8	8	7	14	13	20	19	2	1	16	15	22	21	4	3	10	9	24	23	6	5	12	11	18	17
9	9	11	15	17	21	23	3	5	13	18	19	24	1	6	7	12	20	22	2	4	8	10	14	16
10	10	12	16	18	22	24	4	6	14	17	20	23	2	5	8	11	19	21	1	3	7	9	13	15
11	11	9	17	15	23	21	5	3	18	13	24	19	6	1	12	7	22	20	4	2	10	8	16	14
12	12	10	18	16	24	22	6	4	17	14	23	20	5	2	11	8	21	19	3	1	9	7	15	13
13	13	19	7	20	8	14	15	21	1	22	2	16	9	23	3	24	4	10	11	17	5	18	6	12
14	14	20	8	19	7	13	16	22	2	21	1	15	10	24	4	23	3	9	12	18	6	17	5	11
15	15	21	9	23	11	17	13	19	3	24	5	18	7	20	1	22	6	12	8	14	2	16	4	10
16	16	22	10	24	12	18	14	20	4	23	6	17	8	19	2	21	5	11	7	13	1	15	3	9
17	17	23	11	21	9	15	18	24	5	19	3	13	12	22	6	20	1	7	10	16	4	14	2	8
18	18	24	12	22	10	16	17	23	6	20	4	14	11	21	5	19	2	8	9	15	3	13	1	7
19	19	13	20	7	14	8	21	15	22	1	16	2	23	9	24	3	10	4	17	11	18	5	12	6
20	20	14	19	8	13	7	22	16	21	2	15	1	24	10	23	4	9	3	18	12	17	6	11	5
21	21	15	23	9	17	11	19	13	24	3	18	5	20	7	22	1	12	6	14	8	16	2	10	4
22	22	16	24	10	18	12	20	14	23	4	17	6	19	8	21	2	11	5	13	7	15	1	9	3
23	23	17	21	11	15	9	24	18	19	5	13	3	22	12	20	6	7	1	16	10	14	4	8	2
24	24	18	22	12	16	10	23	17	20	6	14	4	21	11	19	5	8	2	15	9	13	3	7	1

de la $[(n-2)!\,(l-2)+1]$-ème ligne de A_{11} dérivent des éléments de la première ligne de A_{11} — ce qui est justifié par le théorème 5.

Remarquons enfin que le tableau A_{11} peut de même être construit par le même procédé en partant du premier sous-tableau B_{11} du groupe σ_{n-1} etc.

(Reçu le 2 novembre 1955)

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. N. Lehmer — On orderly listing of substitutions — *Amer. M. S. Bull.* 1906

[2] N. Mikhalsky — An automatic method of construction of Cayley's square for the symetrical group — *Recueil math.*, Moscow. 1929