QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA NORME DANS LES ALGÈBRES DE BANACH

Par

IVAN VIDAV (Ljubljana)

Soit $\mathfrak{B}$ une algèbre de Banach complexe contenant l'élément unité $\mathbf{1}$. Il résulte des propriétés bien connues de la norme que $f(\xi)=\|\mathbf{1}+\xi a\|$, $a \in \mathfrak{B}$, est une fonction convexe du paramètre réel ξ. Par suite, cette fontcion $f(\xi)$ a partout une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Il existe donc deux mombres réels κ, λ tels que

$$\|\mathbf{1}+\xi a\|=1+\kappa \xi+o(\xi), \quad \|\mathbf{1}-\xi a\|=1-\lambda \xi+o(\xi)$$

lorsque $\xi \rightarrow 0$, $\xi>0$, le rapport $o(\xi)/\xi$ tendant vers zéro avec $\xi \rightarrow 0$. Si $\kappa=\lambda$, la fonction $f(\xi)$ admet une dérivée unique pour $\xi=0$. Nous verrons plus loin que l'algèbre $\mathfrak{B}$ se réduit aux scalaires, si, quel que soit $a \in \mathfrak{B}$, la norme $\|\mathbf{1}+\xi a\|$ est dérivable au point $\xi=0$.

Considérons maintenant l'ensemble H de tous les éléments $u \in \mathfrak{B}$ qui vérifient la condition suivante:

(H) *Le nombre ξ étant réel, on a pour $\xi \rightarrow 0$*

$$\|\mathbf{1}+i \xi u\|=1+o(\xi), \quad i=\sqrt{-1}.$$

Tous les éléments $\alpha \cdot 1$, α réel, appartiennent évidemment à H. Lorsque $\mathfrak{B}$ est l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés d'un espace hilbertien, alors l'ensemble H contient un opérateur A si et seulement si A est autoadjoint.

Nous allons tout d'abord établir quelques propriétés de cet ensemble H.

THÉORÈME I. *Soient $u, v \in H$ et ξ un nombre réel. Alors*

(1) *On a* $\|e^{i\xi u}\|=1$ *et* $\|ae^{i\xi u}\|=\|a\|$ *quel que soit* $a \in \mathfrak{B}$.

(2) (i) $\xi u \in H$, (ii) $u+v \in H$, (iii) $i(uv-vu) \in H$.

(3) *L'ensemble* H *est fermé:* $\bar{H}=H$.

(4) *On n'a* $u+iv=0$, $u, v \in H$, *que lorsque* $u=v=0$.

(5) $u \neq 0$ *implique* $\lim \| u^n \|^{1/n} > 0$, $n \to \infty$.

(6) *Il existe deux nombres réels* κ, λ *tels que, pour* $\xi > 0$, *on ait*

$$\| e^{\xi u} \| = e^{\kappa \xi} \quad \textit{et} \quad \| e^{-\xi u} \| = e^{-\lambda \xi}. \text{*)}$$

Démonstration. — (1) Posons $\varphi(\xi) = \log \| e^{i\xi u} \|$, où ξ est une variable réelle. La fonction $\varphi(\xi)$ est sousadditive dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Comme $u \in H$, on en déduit

$$\varphi'(0) = \lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} = \lim_{\xi \to 0} \frac{\log \| e^{i\xi u} \|}{\xi} = \lim_{\xi \to 0} \frac{\log \| 1 + i\xi u \|}{\xi} = 0.$$

Donc (cf. [1], p. 144), $\varphi(\xi) \equiv 0$, d'où $\| e^{i\xi u} \| = 1$. D'autre part, on a

$$\| a e^{i\xi u} \| \leqslant \| a \| \| e^{i\xi u} \| = \| a \|, \quad \| a \| = \| a e^{i\xi u} \cdot e^{-i\xi u} \| \leqq \| a e^{i\xi u} \|.$$

Par suite, $\| a e^{i\xi u} \| = \| a \|$.

(2), (i) La relation $\| 1 + i\lambda u \| = 1 + o(\lambda)$ implique la relation $\| 1 + i\lambda \xi u \| = 1 + o(\lambda)$, quel que soit ξ réel. Donc, d'après la définition de l'ensemble H, $\xi u \in H$.

(ii) Soient $u, v \in H$. On a, d'après (1),

$$\| e^{i\xi u} \cdot e^{i\xi v} \| = \| e^{i\xi u} \| = 1.$$

Il en résulte $\| 1 + i\xi(u+v) \| = 1 + O(\xi^2)$, si $\xi \to 0$. Donc, $u+v \in H$.

(iii) De même on obtient

$$\| e^{i\xi u} \; e^{i\xi v} \; e^{-i\xi u} \; e^{-i\xi v} \| = 1 \quad \text{et} \quad \| e^{i\xi v} \; e^{i\xi u} \; e^{-i\xi v} \; e^{-i\xi u} \| = 1,$$

d'où

$$\| 1 - \xi^2 (uv - vu) \| = 1 + O(\xi^3) \quad \text{et} \quad \| 1 + \xi^2 (uv - vu) \| = 1 + O(\xi^3).$$

Par conséquent, $\| 1 + \xi(uv - vu) \| = 1 + o(\xi)$, donc $i(uv - vu) \in H$.

(3) Supposons que u appartient à $\bar{H}$ (l'adhérence de H). Alors il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un $v \in H$ tel que $\| u - v \| < \varepsilon$. On aura donc

$$\| 1 + i\xi u \| \leqq \| 1 + i\xi v \| + \xi \| u - v \| < 1 + 2\varepsilon\xi, \quad \| 1 - i\xi u \| > 1 - 2\varepsilon\xi,$$

si le nombre $\xi > 0$ est assez petit. Il en résulte que $u \in H$.

---

*) Les nombres κ et λ dépendent, bien entendu, de u.

(4) Considérons la fonction $f(\zeta)=e^{\zeta u}$, où $\zeta=\xi+i\eta$ est une variable complexe. Si l'on a $u+iv=0$ avec $u, v \in H$, on en déduit, en utilisant (1),

$$\|f(\zeta)\|=\|e^{(\xi+i\eta)u}\|=\|e^{\xi u}\|=\|e^{-i\xi v}\|=1.$$

Par suite, d'après le théorème généralisé de Liouville, la fonction $f(\zeta)$ se réduit à une constante: $f(\zeta)=1$. On en conclut que $u=v=0$.

(6) Soit $u \in H$. La fonction $\varphi(\xi)=\log\|e^{\xi u}\|$ est continue est sousadditive pour $\xi>0$. Il existe donc $\kappa=\lim\limits_{\xi\to\infty}\varphi(\xi)/\xi=\inf\limits_{\xi>0}\varphi(\xi)/\xi$. Par suite, $\varphi(\xi)\geqq\kappa\xi$ et $\|e^{\xi u}\|\geqq e^{\kappa\xi}$ pour $\xi>0$. Considérons maintenant la fonction $f(\zeta)=e^{\zeta(u-\kappa)}$, $\zeta=\xi+i\eta$, dans le demi-plan $\xi>0$. Comme on a $\|f(i\eta)\|=1$ et $\lim\limits_{\xi\to\infty}\|f(\xi)\,e^{-\varepsilon\xi}\|=0$ quel que soit $\varepsilon>0$, on en déduit, d'après un théorème généralisé de Pólya ef Szegö([2], p.147), que $\|f(\zeta)\|\leqq 1$ partout dans le demi-plan $\xi>0$. Il en résulte $\|e^{\xi u}\|\leqq e^{\kappa\xi}$. Donc, en tenant compte de l'inégalité $\|e^{\xi u}\|\geqq e^{\kappa\xi}$, on conclut que $\|e^{\xi u}\|=e^{\kappa\xi}$ pour tout ξ positif. On établit de même façon l'existence d'un nombre λ tel que l'on ait $\|e^{-\xi u}\|=e^{-\lambda\xi}$ pour $\xi>0$.

(5) On voit aisément que la relation $\lim\limits_{n\to\infty}\|u^n\|^{1/n}=0$ implique $\kappa\leqq 0$, $\lambda\geqslant 0$, les nombres κ et λ ayant la même signification comme ci-dessus. Il en résulte $\|e^{\zeta u}\|=\|e^{\xi u}\|\leqq 1$. Donc, d'après le théorème de Liouville, $e^{\xi u}=1$, d'où $u=0$.

En particulier, si $u^m=0$, on en déduit $\lim\limits_{n\to\infty}\|u^n\|^{1/n}=0$, par suite $u=0$. Aucun élément de H n'est donc nilpotent.

THÉORÈME II. *Soit $\mathfrak{B}$ une algèbre de Banach jouissant de la propriété suivante: Pour tout $a\in\mathfrak{B}$ il existe un facteur $e^{i\alpha}$ (α réel) tel que la norme $\|1+\xi e^{i\alpha}a\|$ admette une dérivée unique pour $\xi=0$. Alors deux cas peuvent se présenter:*

(*a*) *$\mathfrak{B}$ se réduit aux scalaires;*

(*b*) *Tout élément $x\in\mathfrak{B}$ est de la forme $x=\zeta_1 u+\zeta_2 v$, ζ_1, ζ_2 étant deux nombres complexes. Les éléments u et v vérifient les relations $u+v=1$, $u^2=u$. La norme dans $\mathfrak{B}$ est déterminée par*

$$\|x\|=\|\zeta_1 u+\zeta_2 v\|=\max(|\zeta_1|,|\zeta_2|)$$

Démonstration. — Si nous désignons par κ la dérivée de $\|1+\xi e^{i\alpha}a\|$ au point $\xi=0$, nous pouvons écrire $\|1+\xi e^{i\alpha}a\|=1+\kappa\xi+o(\xi)$. Il s'ensuit que $\|1+\xi(e^{i\alpha}a-\kappa)\|=1+o(\xi)$. Par conséquent, $i(e^{i\alpha}a-\kappa)$ appartient à l'ensemble H: $e^{i\alpha}a-\kappa=iw$ avec un $w\in H$. Donc

$$a = w \sin\alpha + \kappa\cos\alpha + i\,(w\cos\alpha - \kappa\sin\alpha). \tag{1}$$

Tout élément $a \in \mathfrak{B}$ est donc de la forme $a = u + iv$ avec $u, v \in H$. Si l'ensemble H ne contient que les scalaires réels, alors $\mathfrak{B}$ se réduit aux scalaires complexes. C'est le cas (a).

Supposons maintenant que H contient deux éléments u et v, différents de scalaires. Si l'on pose $a = u + iv$, il existe, d'après l'équation (1), un $w \in H$ tel que

$$u = w\sin\alpha + \kappa\cos\alpha, \quad v = w\cos\alpha - \kappa\sin\alpha.$$

On obtient de là: $u\cos\alpha - v\sin\alpha = \kappa$. Puisque $\sin\alpha \neq 0$, on a $v = u\cot\alpha - \kappa/\sin\alpha$. Nous avons ainsi démontré ceci: Tout $x \in \mathfrak{B}$ est de la forme $x = \zeta_1 u + \zeta_2$ (ζ_1, ζ_2 étant des nombres complexes). Il s'ensuit que l'algèbre $\mathfrak{B}$ est commutative.

En particulier, on aura

$$u^2 = \mu\, u + \nu. \tag{2}$$

En remplaçant u par $\sigma u + \tau$, avec les nombres σ, τ convenablement choisis, on peut réduire (2) à l'une des deux équations suivantes

$$\text{(i)} \quad u^2 = u, \qquad \text{(ii)} \quad u^2 = 0.$$

Or, le deuxième cas ne peut se présenter: En effet, soit $u^2 = 0$ et $u = p + iq$, $p, q \in H$. Considérons maintenant la fonction $e^{\zeta u} = 1 + \zeta u$. Comme $pq = qp$, on a, d'après le théorème I (1),

$$\| e^{\xi p} \| = \| e^{\xi u} \| = \| \mathbf{1} + \xi u \|.$$

Il en résulte que les nombres κ et λ du théorème I (6) se réduisent à zéro: $\kappa = \lambda = 0$. Par conséquent, $\| \mathbf{1} + \xi u \| = 1$, d'où l'on tire $u = 0$.

Soit maintenant $u^2 = u$*). Dans ce cas on a $e^{\zeta u} = 1 - u + e^{\zeta} u$. Montrons d'abord que $u \in H$. Soit donc $u = p + iq$, $p, q \in H$. Il s'ensuit

$$\| \mathbf{1} - u + e^{i\xi} u \| = \| e^{i\xi u} \| = \| e^{-\xi q} \|.$$

Le membre à gauche étant borné pour ξ réel, on conclut comme là-haut que $q = 0$. Donc, $u \in H$. D'autre part, on a (I (6)).

$$\| \mathbf{1} - u + e^{\xi} u \| = \| e^{\xi u} \| = e^{\kappa\xi} \quad \text{pour } \xi > 0,$$

d'où

$$\| (\mathbf{1} - u)\, e^{-\xi} + u \| = e^{(\kappa - 1)\xi}.$$

---

*) On suppose que $u \neq 0$ et $u \neq \mathbf{1}$.

En faisant tendre $\xi \to \infty$ on obtient immédiatement $\kappa = 1$ et $\| u \| = 1$. On démontre de même façon que $\| \mathbf{1} - u + e^{-\xi} u \| = 1$ pour $\xi > 0$. Comme $\| e^{\zeta u} \| = \| e^{\xi u} \|$, il en résulte

$$\| \mathbf{1} - u + e^{\zeta} u \| = e^{\xi} \text{ pour } \xi > 0 \quad \text{et} \quad \| \mathbf{1} - u + e^{\zeta} u \| = 1 \text{ pour } \xi < 0. \tag{3}$$

Si l'on pose $1 - u = v$, on aura $v^2 = v$, $uv = 0$, $u + v = 1$. Tout élément $x \in \mathfrak{B}$ est donc combinaison linéaire de u et v: $x = \zeta_1 u + \zeta_2 v$. Il s'ensuit de (3) que $\| u + \zeta v \| = \max(1, |\zeta|)$. Donc

$$\| x \| = \max(|\zeta_1|, |\zeta_2|),$$

ce qui achève la démonstration du théorème II.

COROLLAIRE I. *Si $\mathfrak{B}$ est une algèbre de Banach contenant l'élément unité et si $\mathfrak{B}$ est en même temps un espace hilbertien, alors $\mathfrak{B}$ se réduit aux scalaires.*

Si $\mathfrak{B}$ est un espace hilbertien, la norme dans $\mathfrak{B}$ vérifie la relation

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2.$$

On en déduit

$$\| 1 + \xi x \|^2 + \| 1 - \xi x \|^2 = 2 + 2 \xi^2 \| x \|^2, \quad \xi \text{ réel.} \tag{4}$$

Comme nous avons mentionné plus haut, il existe deux nombres κ, λ tels que $\| \mathbf{1} + \xi x \| = 1 + \kappa \xi + o(\xi)$ et $\| \mathbf{1} - \xi x \| = 1 - \lambda \xi + o(\xi)$, lorsque $\xi \to 0$, $\xi > 0$. En substituant ces deux expressions dans (4) on obtient $\kappa = \lambda$. La norme $\| \mathbf{1} + \xi x \|$, considérée comme fonction de ξ, admet donc une dérivée unique pour tout $x \in \mathfrak{B}$. D'après le théorème II, $\mathfrak{B}$ se réduit ou bien aux scalaires ou bien à l'algèbre $x = \zeta_1 u + \zeta_2 v$. Mais ici le deuxième cas ne peut se présenter, car la norme $\| \mathbf{1} + \xi x \| = \max(| 1 + \xi \zeta_1 |, | 1 + \xi \zeta_2 |)$ n'est pas toujours dérivable au point $\xi = 0$.

COROLLAIRE II. *Si, quel que soit $a \in \mathfrak{B}$, on a $\| 1 + \xi a \| \cdot \| 1 - \xi a \| = 1 + o(\xi)$, $\xi \to 0$, alors $\mathfrak{B}$ se réduit aux scalaires.*

En effet, la relation $\| \mathbf{1} + \xi a \| \cdot \| \mathbf{1} - \xi a \| = 1 + o(\xi)$ implique que la norme $\| \mathbf{1} + \xi a \|$ est dérivable au point $\xi = 0$. La démonstration s'achève donc comme dans le corollaire I.

Le corollaire II est une généralisation du théorème bien connu de Mazur. Supposons, en effet, que $\| ab \| = \| a \| \cdot \| b \|$ quels que soient $a, b \in \mathfrak{B}$.

On en déduit immédiatement $\| 1+\xi a \| \cdot \| 1-\xi a \| = \| 1-\xi^2 a^2 \| = 1+O(\xi^2)$, si $\xi \to 0$. La condition du corollaire II est donc remplie. Cette condition est aussi remplie, si $\mathfrak{B}$ vérifie la relation $\| ab \| = \| a \| \cdot \| b \|$ dans un voisinage quelconque de l'élément unité.

(Reçu le 23 mai 1956)

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Hille — Functional analysis and semi-groups. *Amer. Math. Soc. Colloqu. Publ.*, XXXI (1948).

[2] G. Pólya — G. Szegö — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. I. *Die Grundlehren d. Math. Wiss.*, Bd. XIX (1925).