SUR LA MAJORABILITÉ C DES SUITES DE NOMBRES RÉELS

Par

P. ERDÖS (Haïfa) et J. KARAMATA (Genève)

SOMMAIRE: On donne différentes conditions de la majorabilité C d'une suite de nombres réels, dont la définition se trouve au § 1, en mentionant certains cas où cette notion se présente.

1. Une suite a_i, $i=1,2,\ldots$, est dite *majorable-C* avec la *constante de majorabilité* A, supposée finie, s'il existe une suite A_i, $i=1,2,\ldots$, telle que

$$a_i \leqslant A_i, \quad i=1,2,\ldots, \tag{1}$$

et que

$$\sigma_n \overset{def}{=\!=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i \to A, \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty. \tag{2}$$

Il est clair qu'une suite n'est pas nécessairement majorable-C lorsqu'elle est bornée-C, ce qui est le cas, par exemple, de la suite $a_i=(-1)^i\, i$, $i=1,2,3,\ldots$; par contre, toute suite bornée supérieurement, ainsi que toute suite sommable-C est majorable-C. Toutefois, le cas d'une suite sommable-C vers $-\infty$ est à exclure; ainsi la suite

$$a_i=\begin{cases} -i & \text{pour} \quad i\neq 2^k, \\ i & \text{pour} \quad i=2^k,\ k=0,1,2,\ldots, \end{cases}$$

est sommable-C vers $-\infty$, mais n'est pas majorable-C.

Notre but est de donner aux §§ 2 et 3 diverses conditions nécessaires et suffisantes, portant sur les termes mêmes de la suite a_i qui assurent sa majorabilité C. Au § 4, nous considérons le cas des suites bornées inférieurement et nous montrons par un exemple, que les conditions ainsi obtenues ne suffisent pas même lorsqu'on a une évaluation de la forme

$$a_n > O(L(n)) \quad \text{où} \quad L(n)\to\infty,$$

quelque lente que soit la croissance de $L(n)$.

Au § 5, nous montrons le rapport entre la majorabilité C et les conditions de convergence des théorèmes tauberiens, tandis qu'au § 6, nous donnerons quelques théorèmes de limite où la majorabilité C intervient. Enfin au § 7, il est mis en évidence que la seule propriété arithmétique dont on a besoin pour déduire de la relation de Tchebychef le théorème des nombres premiers, est le fait que la suite $\Lambda(n)$ des symboles de von Mangoldt soit majorable-C avec la constante de majorabilité 2, fait qui s'obtient facilement de la relation de Selberg [8] (voir aussi [11, p. 66]).

2. Une première condition qui est équivalente à la majorabilité C est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Pour que la suite a_i soit majorable-C il faut et il suffit que*

$$\sum_{n+1}^{n+k} a_i < o(n), \text{ pour tout } k=o(n), \tag{3}$$

et que pour tout $\varepsilon > 0$ et $m \geq (1+\varepsilon)n$, on ait

$$A(\varepsilon) \overset{def}{=} \limsup_{m,n\to\infty} \frac{1}{m-n} \sum_{n+1}^{m} a_i \leq A < \infty. \tag{4}$$

Dans ce cas $A(\varepsilon)$, étant non-croissant,

$$A^* \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon=0} A(\varepsilon) \tag{5}$$

est la plus petite des constantes de majorabilité.

Démonstration. a) Soit a_i majorable-C; on a d'une part, d'après (1) et (2),

$$\sum_{n+1}^{n+k} a_i \leqslant \sum_{n+1}^{n+k} A_i = (n+k)\,\sigma_{n+k} - n\,\sigma_n = n\,(\sigma_{n+k} - \sigma_n) + k\,\sigma_n,$$

et puisque

$$n\,(\sigma_{n+k} - \sigma_n) + k\,\sigma_n = o(n) \text{ pour tout } k = o(n),$$

la condition (3) se trouve satisfaite.

D'autre part, pour tout $m \geqslant (1+\varepsilon)n$, on a

$$\frac{1}{m-n}\sum_{n+1}^{m} a_i \leqslant \frac{1}{m-n}\sum_{n+1}^{m} A_i = \frac{m\,\sigma_m - n\,\sigma_n}{m-n} =$$

$$\leqslant \sigma_n + \frac{m}{m-n}(\sigma_m - \sigma_n) \to A,$$

puisque $\dfrac{m}{m-n} \leqslant 1 + 1/\varepsilon$.

Ainsi

$$A(\varepsilon) < A \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0,$$

ce qui équivaut à la condition (4).

b) Pour établir que les conditions (3) et (4) sont suffisantes et que la constante A^* donnée par (5) est effectivement la plus petite des constantes de majorabilité, nous allons former une suite A_i, $i = 1, 2, \ldots$, satisfaisant aux conditions (1) et (2) avec $A = A^*$.

A cet effet, supposons (4) satisfait et la suite a_i non-sommable-C (dans le cas contraire on aurait trivialement $A_i = a_i$); posons $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Soit n_1 le plus petit des indices tel que

$$s_{n_1} < A^* n_1;$$

un tel n_1 existe, car si

$$s_n \geqslant A^* n \text{ pour tout } n,$$

et puisque

$$(4) \text{ avec } (5) \mapsto \limsup_{n=\infty} \frac{s_n}{n} \leqslant A^*,$$

la suite a_i serait sommable-C, cas qui a été exclu par hypothèse. Posons alors

$$b_i = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n_1 - 1,$$

et

$$s_{n_1} + b_{n_1} = A^* n_1 .$$

Soit n_2 le plus petit des indices pour lequel

$$s_{n_2} + b_{n_1} < A^* n_2 ;$$

qui doit exister d'après le même raisonnement, posons

$$b_i = 0 \text{ pour } i = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2 - 1,$$

et

$$s_{n_2} + b_{n_1} + b_{n_2} = A^* n_2 .$$

En continuant de la sorte on peut former de proche en proche une suite $b_i \geqslant 0$ telle que

$$s_{n_k} + b_{n_1} + \ldots + b_{n_k} = A^* n_k ,$$

avec

$$b_i = 0 \text{ pour } i \neq n_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

En posant alors

$$A_i = a_i + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

la suite A_i ainsi formée satisfait bien à la condition (1). Il reste à montrer que la condition (2) est de même satisfaite et que pour la suite ainsi formée $A = A^*$.

A cet effet posons

$$S_n = \sum_{i=n}^{n} A_i;$$

on aura alors évidemment,

$$\lim_{n=\infty} \inf \frac{1}{n} S_n = A^*.$$

Supposons par absurde que

$$\lim_{n=\infty} \sup \frac{1}{n} S_n \geqslant A^* + c, \quad \text{avec } c > 0,$$

ce qui équivaut à l'existence d'une infinité de m_j tels que

$$S_{m_j} \geqslant (A^* + c)\, m_j;$$

soit alors n_k le plus grand des n_i, $i = 1, 2, \ldots$, tel que

$$n_k \leqslant m_j,$$

et envisageons les deux cas possibles:

1° Soit en premier lieu

$$\frac{m_j - n_k}{n_k} \geqslant \varepsilon, \tag{6}$$

c'est à dire $m_j \geqslant (1+\varepsilon)\, n_k$, pour une infinité de m_j et de n_k, et pour $\varepsilon > 0$; on aura alors pour ces valeurs de m_j et n_k,

$$S_{n_k} = A^* n_k \quad \text{et} \quad S_{m_j} \geqslant (A^* + c)\, m_j.$$

Puisque entre n_k et m_j tous les b_i sont nuls, on a

$$\sum_{n_k+1}^{m_j} a_i = S_{m_j} - S_{n_k} \geqslant (A^* + c) m_j - A^* n_k,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (4),

$$A(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{m_j - n_k} \sum_{n_k+1}^{m_j} a_i \geqslant A^* + c\, \frac{m_j}{m_j - n_k} \geqslant A^* + c,$$

ce qui est, pour ε suffisamment petit, en contradiction avec (5).

2°. Supposons, en second lieu, que (6) n'est pas satisfait, c'est-à-dire que

$$\lim \frac{m_j - n_k}{n_k} = 0; \tag{7}$$

dans ce cas

$$\sum_{n_k+1}^{m_j} a_i = S_{m_j} - S_{n_k} = (A^*+c)\, m_j - A^* n_k \geqslant c m_j\,,$$

ce qui donne, d'après (7),

$$\lim\ \inf \frac{1}{n_k} \sum_{n_k+1}^{m_j} a_i \geqslant c\,,$$

et cette dernière inégalité est, en tenant compte de (7), en contradiction avec l'hypothèse (3).

3. Dès lors, de ce théorème on peut facilement déduire diverses autres expressions des conditions de la majorabilité C. Ainsi, on en tire en premier lieu, le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Pour que la suite* a_i *soit majorable-C, il faut et il suffit que la condition* (3) *soit satisfaite et qu'en posant*

$$W(\varepsilon) \stackrel{def}{=} \limsup_{n=\infty} \ \max_{n<n'\leqslant(1+\varepsilon)n} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{n+1}^{n'} a_i \right\}, \tag{8}$$

on ait

$$W(\varepsilon) = O(\varepsilon)\,; \tag{9}$$

dans ce cas, on aura encore

$$\lim_{\varepsilon=0} W(\varepsilon)/\varepsilon = A^*.$$

D é m o n s t r a t i o n. En premier lieu, d'après l'hypothèse (3), la fonction $W(\varepsilon)$ définie par (8) reste bornée pour tout $\varepsilon > 0$, puisque

$$\sum_{n+1}^{n+o(n)} a_i < o(n) \quad \longmapsto \quad \sum_{n+1}^{n+O(n)} a_i < O(n), \quad (n \to \infty).$$

Car, si cette dernière relation n'avait pas lieu, en particulier si la suite

$$q_n = \frac{1}{n} \sum_{n+1}^{2n} a_i$$

ne reste pas bornée supérieurement, en posant $k=[q_n]$, du fait que

$$\sum_{n+1}^{2n} a_i = \sum_{n<i\leqslant n+n/k} a_i + \sum_{n+n/k<i\leqslant n+2n/k} a_i + \ldots + \sum_{n+(k-1)n/k<i\leqslant 2n} a_i\,,$$

une des sommes

$$\sum_{n+(\nu-1)n/k<i\leqslant n+\nu n/k} a_i \quad \text{devrait être} \quad \geqslant nk = n\,[q_n],$$

ce qui est en contradiction avec (3).

En second lieu, lorsque $n' \geqslant (1+\eta_\varepsilon)\,n$, le fait que l'hypothèse (9) n'est pas satisfaite est en contradiction avec (4), ce qui achève la démonstration.

On peut en outre modifier légèrement la condition (4) du théorème 1, pour obtenir le théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Toute suite a_i satisfaisant à la condition* (3) *sera majorable-C si et seulement si il existe une suite $m(n) > n$ telle que*

$$m(n) \sim n, \quad (n \to \infty),$$

et que

$$\frac{1}{m-n}\sum_{n+1}^{m} a_i \leqslant M \quad \textit{pour tout } n. \tag{10}$$

D é m o n s t r a t i o n. a) Soit

$$m_1 = m(n), \quad m_{j+1} = m(m_j), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

et k déterminé de manière que

$$m_k \leqslant n' < m_{k+1}, \quad n < n' \leqslant (1+\varepsilon)\,n\,;$$

on obtient alors, d'après (10),

$$\sum_{n+1}^{n'} a_i = \sum_{n+1}^{m_1} a_i + \sum_{m_1+1}^{m_2} a_i + \ldots + \sum_{m_{k-1}+1}^{m_k} a_i + \sum_{m_k+1}^{n'} a_i \leqslant M\,(m_k - n) + n\,\varepsilon_n,$$

où, d'après (3),

$$\varepsilon_n \to 0 \text{ avec } \frac{1}{n}\cdot$$

Ainsi

$$\frac{1}{n}\sum_{n+1}^{n'} a_i \leqslant M\,\varepsilon + \varepsilon_n,$$

ce qui entraîne la condition (9).

b) Soit a_i majorable-C avec M comme plus petite constante de majorabilité; à tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un $m(n) > n$ tel que $m(n) \sim n$ et que

$$\frac{1}{m-n}\sum_{n+1}^{m(n)} a_i < M + \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad n > n_\varepsilon.$$

En effet, soit pour tout n, $f(n) \geqslant n$ le plus grand nombre tel que

$$\sum_{n+1}^{f(n)} a_i \geqslant (f(n)-n)\ (M+\varepsilon).$$

Puisque a_i est majorable-C avec M, un tel $f(n)$ existe. Si cette inégalité n'est satisfaite pour aucun $m > n$ on posera $f(n) = n$; lorsque $f(n) \sim n$, on peut poser $m(n) = 1 + f(n)$ et l'affirmation se trouve démontrée. Si

$$\limsup_{n=\infty} f(n)/n > 1,$$

on aura

$$f(n) > n(1+\delta)$$

pour une infinité de valeurs de n; par suite

$$\frac{1}{f(n)-n} \sum_{n+1}^{f(n)} a_i \geqslant M+\varepsilon$$

pour ces valeurs de n, mais cela contredit l'hypothèse que la suite a_i est majorable-C avec la constante de majorabilité M.

4. Dans les trois théorèmes énoncés aux paragraphes précédents, la condition (3) devient superflue, lorsqu'on suppose que la suite a_i reste bornée inférieurement, c'est-à-dire lorsque

$$a_n \geqslant -M \text{ pour tout } n.$$

On peut, en effet, en remplaçant a_i par $a_i + M$, supposer que la suite envisagée est positive, et dans ce cas, il est clair que la condition (3) résulte de chaqu'une des trois conditions (4), (9) avec (8), ou bien (10).

Toutefois, lorsque la suite a_i ne reste pas bornée inférieurement, les conditions (4), (9) ou (10) peuvent être satisfaites sans que cette suite soit majorable-C, même si elle satisfait à une condition de la forme

$$a_n > -L(n),$$

la fonction $L(n)$ pouvant tendre vers l'infini aussi lentement qu'on le veut.

Pour le voir, il suffit d'envisager une fonction $g(x)$, qui tend vers l'infini avec x et de supposer, pour plus de simplicité, qu'elle est continue, croissante, à valeurs entières pour $x = n$ entier, que $g(n)$ soit divisible par n et que

$$g(n)+1 > \left(1+\frac{3}{n}\right) g(n), \quad n = 1, 2, \ldots, \text{ avec } g(1) = 1.$$

En posant alors

$$a_i = \begin{cases} \;\;0 \quad \text{pour} \quad i=1, \\ -k \quad \text{pour} \quad g(k) < i \leqslant (1+1/k)\, g(k), \\ +k \quad \text{pour} \quad (1+1/k)\, g(k) < i \leqslant (1+2/k)\, g(k), \\ -k \quad \text{pour} \quad (1+2/k)\, g(k) < i \leqslant (1+3/k)\, g(k), \\ \;\;0 \quad \text{pour} \quad (1+3/k)\, g(k) < i \leqslant g(k+1), \qquad k=1,2,3,\ldots. \end{cases}$$

on voit en premier lieu que

$$a_n > -L(n)\,,$$

où $L(x)$ est la fonction inverse de $g(x)$, qui peut croître aussi lentement qu'on le veut, pourvu que la croissance de $g(x)$ soit suffisamment rapide.

En second lieu, il est clair que cette suite a_i satisfait aux conditions (4), (9) ou (10); ainsi, par exemple, la condition (10) sera satisfaite avec $M=0$, dès que

$$m(n) = n + \left[\frac{2n}{L(n)}\right] \sim n\,.$$

Enfin, la suite a_i n'est pas majorable-C. En effet, on a

$$\sum_{(1+1/k)g(k) < i \leqslant (1+2/k)g(k)} a_i = g(k)\,,$$

donc, quelque soit

$$A_i \geqslant a_i\,, \quad i=1,2,\ldots,$$

on aura pour une infinité de valeurs de n

$$\sum_{n+1}^{n+o(n)} A_i \geqslant \frac{1}{2}\, n;$$

ainsi, aucune des suites A_i ne peut être sommable-C.

5. La majorabilité C se présente dans les théorèmes de nature tauberienne sous forme de condition de convergence (voir [2]). La série Σu_ν étant somable-A, c'est-à-dire

$$f(r) \overset{def}{=\!=} \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu r^\nu \to s\,, \quad (r \to 1)\,, \tag{11}$$

pour qu'elle soit convergente, il faut et il suffit, d'après Tauber [10], que

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu \to 0, \quad (n\to\infty), \tag{12}$$

et d'après Littlewood [5], il suffit que

$$nu_n \leqslant M \quad \text{pour tout } n. \tag{13}$$

Or, on peut réunir ces deux conditions et il est facile de voir que *la série* Σu_ν *sera convergente lorsqu'elle est sommable-A et lorsque la suite*

$$nu_n \quad \textit{est majorable-C}. \tag{14}$$

En effet, puisque

$$(14) \quad \mapsto \quad (1-r)^2 f''(r) < O(1), \quad (r\to 1),$$

on aura

$$(11) \text{ et } (14) \quad \mapsto \quad (1-r) f'(r) \to 0, \quad (r\to 1),$$

car, d'après un lemme de Littlewood [5]

$$f(r)\to s \text{ et } (1-r)^2 f''(r) < O(1) \quad \mapsto \quad (1-r)f'(r)\to 0.$$

Ainsi la suite nu_n est sommable-A et, d'après (14), il existe une suite A_n sommable-C telle que

$$nu_n \leqslant A_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Par suite, $A_n - nu_n$ sera de même sommable-A et, puisque cette suite est $\geqslant 0$, elle sera sommable-C, car toute suite sommable-A qui est bornée inférieurement est sommable-C (voir [5] et [1]). Ainsi,

$$(11) \text{ et } (14) \quad \mapsto \quad (12),$$

et d'après le théorème de Tauber, la série Σu_ν converge.

Pourtant, la condition (14) est contenue dans celle de R. Schmidt [9], d'après laquelle, la série Σu_ν sera convergente lorsqu'elle est sommable-A et lorsque

$$\limsup_{n=\infty} \max_{n < n' \leqslant (1+\varepsilon)n} \left\{\sum_{n+1}^{n'} u_\nu\right\} \overset{def}{=\!=} w(\varepsilon)\to 0, \quad (\varepsilon\to 0).$$

La majorabilité C de la suite nu_n est une condition plus restrictive, car, d'après la condition de R. Schmidt, il suffit que

$$w(\varepsilon)\to 0 \quad \text{avec} \quad \varepsilon,$$

tandis que la majorabilité C de la suite nu_n exige que

$$w(\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad (\varepsilon \to 0).$$

Cela résulte de la condition (9) et de l'inégalité

$$\sum_{n+1}^{n'} u_\nu \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname*{Max}_{n < m \leqslant n'} \left\{ \sum_{n+1}^{m} \nu u_\nu \right\},$$

qui se réduit, d'après (8) avec $nu_n = a_n$, à

$$w(\varepsilon) \leqslant W(\varepsilon).$$

6. La majorabilité C intervient de même dans les théorèmes de limite suivants.

THÉORÈME. *Soit $a_n \geqslant 0$ et majorable-C avec la constante de majorabilité A et soit $f(x)$ bornée supérieurement dans l'intervalle* $(0, 1)$; *alors*

$$\limsup_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} a_n f\left(\frac{n}{x}\right) \leqslant A \overline{\int_0^1} f(t)\, dt, \tag{15}$$

où $\overline{\int}$ *désigne l'intégrale supérieure de Darboux.*

En effet, posons

$$s(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n$$

et soit $0 < \theta < 1$; du fait que a_n est majorable-C avec la constante de majorabilité A, on aura, d'après le théorème 2,

$$\frac{s(x) - s(\theta x)}{x} \leqslant A\,(1-\theta) + \varepsilon(x) \tag{16}$$

où $\varepsilon(x) \to 0$ avec $1/x$.

En posant encore

$$N = [-\lg x / \lg \theta]$$

et

$$B_\nu = \sup_{\theta^{\nu+1} < t \leqslant \theta^\nu} \{ f(t) \},$$

on aura

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} a_n f\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{1}{x} \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{\theta^{\nu+1} x < n \leqslant \theta^\nu x} a_n f\left(\frac{n}{x}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{N} B_\nu \frac{s(\theta^\nu x) - s(\theta^{\nu+1} x)}{x}$$

et, d'après (16), en y remplaçant x par $\theta^\nu x$,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n f\left(\frac{n}{x}\right) \leqslant A \sum_{\nu=0}^{N} B_\nu (\theta^\nu - \theta^{\nu+1}) + \sum_{\nu=0}^{N} B_\nu \theta^\nu \varepsilon (x\theta^\nu).$$

Par suite

$$\limsup_{x=\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n f\left(\frac{n}{x}\right) \leqslant A \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (\theta^\nu - \theta^{\nu+1}),$$

et en y faisant $\theta \to 1$ l'affirmation (15) en résulte.

En restant dans le même ordre d'idées, il y a lieu de mentioner encore un certain nombre de théorèmes relatifs à la limite des expressions de la forme

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n f(n/x) .$$

Ces expressions ont déjà été étudiées à plusieurs reprises, en particulier par G. Pólya [6], sous leur forme la plus générale. Toutefois, le cas particulier envisagé permet certaines versions intéressantes en soi, qui sont les suivantes.

a. Pour que la limite

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n f(n/x) \tag{17}$$

existe pour toute fonction $f(t)$ à variation bornée dans l'intervale (0,1), il faut et il suffit que la suite a_n soit sommable-C.

Ce fait est une conséquence immédiate de la relation

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n f(n/x) = \frac{a}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n/x) - \sum_{n\leqslant x} (c_n - a)\frac{n}{x}\left\{f\left(\frac{n+1}{x}\right) - f\left(\frac{n}{x}\right)\right\},$$

où l'on a supposé que

$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t > 1,$$

et où l'on a posé

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a + o(1), \quad (n \to \infty) .$$

b. Pour que la limite (17) existe pour toute fonction $f(t)$ continue dans l'intervalle (0,1), il faut et il suffit que la suite a_n soit sommable-C et que la suite $|a_n|$ soit bornée-C.

c. Pour que la limite (17) existe pour toute fonction $f(t)$ intégrable-R dans l'intervalle (0,1) il faut et il suffit que la suite a_n soit sommable-C et que pour tout

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i \leqslant 1, \ i=1,2,\ldots,k,$$

en posant

$$\delta=\sum_{i=1}^{k}(\beta_i-\alpha_i),$$

on ait

$$\limsup_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{k} \sum_{x\alpha_i < n \leqslant x\beta_i} |a_n| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \delta \to 0. \tag{18}$$

Les affirmations sous *b.* et *c.* sont contenues dans les énoncés genéraux de Pólya [6].

Toutefois, il est à remarquer que, lorsque $|a_n|$ est sommable-C ou majorable-C, la condition (18) se trouve satisfaite. Car, la condition (18) est évidemment remplie lorsque pour tout $\varepsilon_i > 0$, $i=1,2,\ldots,k$,

$$\sum_{i=1}^{k} W^*(\varepsilon_i) \to 0 \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i,$$

où

$$W^*(\varepsilon) = \limsup_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{x < n \leqslant (1+\varepsilon)x} |a_n|,$$

et cette dernière condition est satisfaite lorsque la suite $|a_n|$ satisfait à la condition (9).

Ainsi la suite a_n étant sommable-C, la majorabilité C de la suite $|a_n|$ est une condition suffisante pour que (17) existe pour toute fonction $f(t)$ intégrable-R dans (0,1).

Ce fait peut d'ailleurs être établi d'une manière directe très simple, comme suit.

A toute fonction $f(t)$ intégrable-R dans (0,1), on peut faire correspondre deux polynômes $p(t)$ et $P(t)$ tels que

$$p(t) \leqslant f(t) \leqslant P(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

et

$$\int_0^1 \{P(t)-p(t)\}\, dt \leqslant \varepsilon,$$

quelque soit $\varepsilon > 0$. Ceci posé, désignons par A_n la suite qui majore $|a_n|$ et qui est sommable-C vers A; alors on aura

$$\frac{1}{x}\left|\sum_{n\leqslant x} a_n\{f(n/x)-p(n/x)\}\right| \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|a_n|\{f(n/x)-p(n/x)\}\leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} A_n\{P(n/x)-p(n/x)\} =$$
$$\leqslant A\int_0^1\{P(t)-p(t)\}\,dt+o(1)\leqslant$$
$$\leqslant A\,\varepsilon+o(1),\quad (x\to\infty),$$

et puisque

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n f(n/x) = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n p(n/x) + \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n\{f(n/x)-p(n/x)\} =$$
$$= a\int_0^1 p(t)\,dt + \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} a_n\{f(n/x)-p(n/x)\} + o(1),$$

la suite a_n étant supposée sommable-C vers a, l'affirmation en est immédiate.

Une autre condition suffisante pour l'existence de la limite (17) pour tout f intégrable-R est donnée par

$$\sum_{n\leqslant x}|a_n|^p = O(x),\ p>1,\ (x\to\infty),$$

qui est une conséquence de (18), puisque d'après l'inégalité de Hölder,

$$\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k}\sum_{x\alpha_i<n\leqslant x\beta_i}|a_n| \leqslant \left(\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|a_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{k}(\beta_i-\alpha_i)\right)^{1/q},$$

où $1/p+1/q=1$.

Enfin, des théorèmes analogues relatifs aux sommes d'Abel ont été établis par A. G. Postnikov [7].

7. Pour montrer enfin comment la majorabilité C se présente dans la démonstration du théorème des nombres premiers, remarquons que, $f(n)$ étant une fonction arithmétique, tout théorème qui donne le comportement asymptotique de

$$F(x) \overset{def}{=} \sum_{n\leqslant x} f(n), \tag{19}$$

connaissant celui de

$$G(x) \overset{def}{=} \sum_{n\leqslant x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right]. \tag{20}$$

peut conduire au théorème des nombres premiers; il suffit, par exemple, de prendre pour $f(n)$ les symboles de von Mangoldt, c'est-à-dire de poser

$$f(n) = \Lambda(n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 1\,, \\ \lg p & \text{pour } n = p^\alpha\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0 & \text{pour } n \neq p^\alpha\,, \quad p \text{ nombre premier,} \end{cases}$$

et d'envisager la relation de Tchebychef

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \leqslant x} \lg n\,.$$

Ainsi, Landau [4] a montré que

$$G(x) = Ax \lg x + Bx + g(x)\,,$$

avec

$$g(x) = O(\omega(x)),\quad \omega(x) \text{ monotone et } \int^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt < \infty\,,$$

entraîne

$$F(x) \sim Ax\,, \quad (x \to \infty)\,.$$

Toutefois, sa démonstration repose sur la relation

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) = o(x)$$

qui est équivalente au théorème des nombres premiers, les $\mu(n)$ étant les symboles de Möbius.

Or, on peut établir un théorème analogue en ne faisant appel qu'au fait que la suite $\Lambda(n)$ est majorable-C, avec la constante de majorabilité 2. Ce théorème, qui a le caractère des théorèmes taubériens, s'énonce comme suit.

Soit $F(x)$ et $G(x)$ définis par (19) *et* (20); *de la relation*

$$G(x) = Ax \lg x + Bx + Cx/\lg x + o(x/\lg x), \quad (x \to \infty),$$

il résulte que

$$F(x) \sim Ax, \quad (x \to \infty),$$

toutes les fois que

$$f(n) \geqslant -M, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

La démonstration de ce théorème fera l'objet d'un autre article; nous nous bornerons ici à montrer que la suite $\Lambda(n)$ est majorable-C, avec la constante de majorabilité 2.

A cet effet, considérons la relation (de Selberg)

$$\Lambda(n) \lg n + \sum_{d \mid n} \Lambda(d)\, \Lambda(n/d) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \lg^2 \frac{n}{d},$$

qui est une conséquence de l'indentité

$$\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)' + \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^2 = \frac{\zeta''}{\zeta}.$$

Puisque $\Lambda(n) \geqslant 0$, il s'en suit que

$$\Lambda(n) \leqslant \frac{1}{\lg n} \sum_{d \mid n} \mu(d) \lg^2 \frac{n}{d} \overset{def}{=\!=} A_n.$$

Ainsi, pour démontrer que la suite $\Lambda(n)$ est majorable-C avec la constante de majorabilité 2, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} A_n \to 2, \quad (x \to \infty).$$

Or, en posant

$$U(x) \overset{def}{=\!=} \sum_{n \leqslant x} \sum_{d \mid n} \mu(d) \lg^2 \frac{n}{d},$$

on aura

$$\sum_{n \leqslant x} A_n = \int_{2-0}^{x} \frac{dU(t)}{\lg t} = \frac{U(x)}{\lg x} + \int_{2}^{x} \frac{U(t)}{t \lg^2 t}\, dt,$$

et puisque

$$U(x) = 2x \lg x + O(x), \quad (x \to \infty),$$

l'affirmation en résulte.

Quant à cette dernière relation, elle est une conséquence immédiate de

$$U(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)\, T_2(x/n),$$

où

$$T_2(x) \overset{def}{=\!=} \sum_{n \leqslant x} \lg^2 n,$$

et des évaluations élémentaires (voir [3]):

$$T_2(x) = x \lg^2 x - 2x \lg x + 2x + O(\lg^2 x),$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \left(\lg \frac{x}{n}\right)^2 = 2 \lg x + O(1),$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \lg \frac{x}{n} = O(1),$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = O(1)$$

et

$$\sum_{n \leqslant x} \lg^2 \frac{x}{n} = O(x), \quad (x \to \infty).$$

(Reçu le 25 décembre 1955)

RÉFÉRENCES

[1] J. Karamata — Über die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. — *Mathematische Zeitschrift* **32** (1930), pp. 319–320.

[2] ———— Théorèmes inverses de sommabilité I. *„Glas" de l'Académie royale serbe* **70**, CXLIII, (1931), pp. 1—32.

[3] ———— Évaluation élémentaire des sommes typiques de Riesz de certaines fonctions arithmétiques, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sc.* **7** (1954), pp. 1—40.

[4] E. Landau — Über einige neuere Grenzwertsätze, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* **36** (1912), pp. 121—131.

[5] J. E. Littlewood — The converse of Abel's theorem on power series, *Proc. London Math. Soc.* (2) **9** (1910), pp. 434—448.

[6] G. Pólya — Über die Konvergenz von Quadraturverfahren. *Math. Zeit.* **37** (1933), pp. 264–286.

[7] A. G. Postnikov — Un théorème général du type abelien concernant les séries entières. Общая теорема Абелевого типа для степеного ряда, *Доклады Акад. Наук СССР.* **XCVI** (1954), 913–916.

[8] A. Selberg — An Elementary Proof of the Prime Number Theorem, *Ann. of Math.* **50** (1949), pp. 305–313.

[9] R. Schmidt — Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, *Math. Zeit.* **22** (1925), pp. 89—122.

[10] A. Tauber — Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. *Monatsh. für Math. und Phys.* **8** (1897), pp. 273—277.

[11] E. Trost — Primzahlen, Basel, 1953.