SUR LA SOMMATION DE LA SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION CONTINUE AVEC LE MODULE DE CONTINUITÉ DONNÉ

Par

M. TOMIĆ (Beograd)

SOMMAIRE. — Cette note représente la rectification et la continuation de notre note [3].

On démontre que la condition classique (1.2) pour la sommation de la série de Fourier d'une fonction continue $f(x)$ peut s'améliorer sachant son module de continuité $\omega(\delta, f)$. Application de ce résultat.

1. Soit défini par une matrice triangulaire infinie[1])

$$(\Lambda) = (\lambda_{0n} = 1,\ \lambda_{1n},\ \lambda_{2n}, \ldots\ \lambda_{nn},\ \lambda_{n+1,\,n} = 0)$$

un procédé de sommation, qui somme la série de Fourier de toute fonction continue et périodique (à période 2π). С. М. Никольский [1] a donné les conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire un tel procédé de sommation.

Pour que la relation

$$U_n(f, x) \to f(x), \quad n \to \infty, \quad x \in [0, 2\pi]$$

ait lieu, avec

$$U_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

a_k et b_k désignant les coefficients de Fourier d'une fonction continue et périodique (à période 2π), il faut et il suffit que

$$\lim \lambda_{kn} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

1) Nous posons toujours $\lambda_{k,\,n} = \lambda_{kn}$.

$$\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt = \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} \cos kt \right| dt \leqslant M, \tag{1.2}$$

où M ne dépend pas de λ_{kn}.

La condition (1.2) étant difficile à vérifier, le même auteur a donné les conditions suffisantes portant sur les coefficients λ_{kn} directement, à savoir :

$\{\lambda_{kn}\}$ est une suite convexe ou concave, c. à. d.

$$\Delta^2 \lambda_{kn} = \lambda_{kn} - 2\lambda_{k+1,n} + \lambda_{k+2,n} \leqslant \text{ ou bien } \geqslant 0, \tag{1.3}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{kn} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{1.1}$$

$$|\lambda_{kn}| < C; \tag{1.4}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{kn}}{n-k+1} \right| < C. \tag{1.5}$$

B. Sz. Nagy [2] a généralisé ces conditions suffisantes. D'après lui, il suffit pour la sommabilité de la série de Fourier d'une fonction continue, que l'on ait en plus de (1.1), la relation suivante

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \lg \frac{n}{n-k} \, |\Delta^2 \lambda_{nk}| < C, \tag{1.6}$$

où $\Delta^2 \lambda_{nk}$ es donné par (1.3).

De $\Delta^2 \lambda_{nk} \geqslant$ ou $\leqslant 0$ et des conditions (1.4) et (1.5) résulte $\lambda_{nn} = O = (1/\lg n)$ [1, p. 270]. Il est facile de montrer que la condition (1.6) de B. Sz. Nagy, implique aussi

$$\Delta^2 \lambda_{n-1,n} = \lambda_{n-1,n} - 2\lambda_{nn} = O\,(1/\lg n).$$

Dans mes notes [3] et [4] j'ai indiqué que dans certaines procédés de sommation l'ordre de grandeur du dernier terme λ_{nn} peut s'abaisser, en considérant une sous-classe de fonctions continues, c. à. d, de fonctions continues dont le module de continuité $\omega(\delta)$ est donné.

Or, il est bien connu que le module de continuité $\omega(t)$ d'une fonction continue $f(x)$ est défini par

$$\omega(t, f) = \max_{0 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant t} \{ |f(x_2) - f(x_1)| \}.$$

Il est possible de parler d'une classe de fonctions continues ayant le module de continuité $\omega(\delta)$, car on peut déduire le fait suivant [5, p. 486]. Soit $\omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$, une fonction donnée à l'avance. Pour qu'il existe une fonction continue et périodique $f(x)$ pour laquelle $\omega(\delta, f) = \omega(\delta)$, il faut et il suffit que $\omega(\delta)$ satisfasse aux conditions suivantes:

1. $\omega(0) = 0$,
2. $\omega(\delta) \uparrow$,
3. $\omega(\delta)$ est continue par rapport à δ,
4. $\delta \geqslant 0$ et $\eta \geqslant 0$, il faut qu'on ait

$$\omega(\delta + \eta) \leqslant \omega(\delta) + \omega(\eta).$$

1.1. Le but de cette note est de continuer nos recherches [3] et [4], c. à. d., en supposant connu le module de continuité $\omega(\delta, f) = \omega(\delta)$ d'une fonction continue $f(x)$, de montrer que la série de Fourier d'une telle fonction est sommable par un procédé (Λ), même si la condition (1.2) n'est pas remplie. Autrement dit, la constante de Lebesgue,

$$\int_0^\pi |K_n(t)|\, dt = \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} \cos kt \right| dt,$$

d'un procédé (Λ) peut tendre vers l'infini, tout en permettant la sommation de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$, si toutefois son module de continuité $\omega(\delta)$ tend assez vite vers zéro.

Nous démontrerons dans § 2 le

THÉORÈME I. *Pour que le procédé de sommation*

$$(\Lambda) = (\lambda_{0n} = 1, \lambda_{1n}, \ldots, \lambda_{nn}, \lambda_{n+1,n} = 0),$$

somme la série de Fourier d'une fonction continue et périodique $f(x)$, dont le module de continuité est $\omega(\delta)$, il suffit qu'on ait

$$\lim \lambda_{kn} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^\pi |K_n(t)|\, dt = \omega\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} \cos kt \right| dt = o(1), \tag{1.7}$$

et

$$\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{2m-1} D\left(\frac{k}{m}\right)\lambda_{kn}\cos tk\right| dt = O(1), \tag{1.8}$$

où

$$m=\left[\frac{n+1}{2\alpha}\right],\ \textit{avec}\ \alpha\ \textit{un entier} \geqslant 1,$$

et

$$D(x)=\begin{cases} 1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & x\geqslant 2.\end{cases} \tag{1.9}$$

Si la condition (1.2) est remplie, c. à. d., si l'on ait

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}\cos kt\right| dt = O(1),$$

la condition (1.8) se trouve également remplie, de sorte que le théorème I représente une extension du théorème de C. M. Никольскй.

En effet, partons de l'identité:

$$\sum_{k=0}^{2m-1} D\left(\frac{k}{m}\right)\lambda_{kn}\cos kt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{n}\lambda_{kn}\cos k(t-\tau)\right]\left[\sum_{k=0}^{2m-1} D\left(\frac{k}{m}\right)\cos k\tau\right]d\tau.$$

La condition (1.8) peut s'écrire alors sous la forme suivante

$$\int_0^{\pi} dt\left|\sum D\left(\frac{k}{m}\right)\lambda_{kn}\cos kt\right| =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dt\left|\int_0^{2\pi}\left[\sum \lambda_{kn}\cos k(t-\tau)\right]\left[\sum D\left(\frac{k}{m}\right)\cos k\tau\right]d\tau\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dt \int_0^{2\pi} \left|\sum \lambda_{kn} \cos k(t-\tau)\right| \left|\sum D\left(\frac{k}{m}\right)\cos k\tau\right| d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\tau \int_0^{2\pi} \left|\sum \lambda_{kn} \cos k(t-\tau)\right| \left|\sum D\left(\frac{k}{m}\right)\cos k\tau\right| dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\sum D\left(\frac{k}{m}\right)\cos k\tau\right| d\tau \int_0^{2\pi} \left|\sum \lambda_{kn} \cos k(t-\tau)\right| dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\sum_{k=0}^{2m-1} D\left(\frac{k}{m}\right)\cos k\tau\right| d\tau \int_0^{\pi} \left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_{kn} \cos kt\right| dt.$$

L'assertion est établie, étant donné que

$$\int_0^{\pi} \left|\sum_{k=0}^{2m-1} D\left(\frac{k}{m}\right)\cos k\tau\right| d\tau = O(1),$$

et ceci s'obtient par une double sommation par parties, en tenant compte que de (1.9) résulte

$$\Delta\left[D\left(\frac{k}{m}\right)\right] = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \Delta^2\left[D\left(\frac{k}{m}\right)\right] = O\left(\frac{1}{m^2}\right), \tag{1.10}$$
$$k = 1, 2, \ldots, 2m-1.$$

De ce théorème I résulte un théorème plus approprié aux applications. Ce théorème représente une extension du théorème mentionné de B. Sz. Nagy. Nous allons donner dans § 2.1 une démonstration de ce théorème différente sous certain égard de celle donné par cet auteur [2].

THÉORÈME II. *Un procédé* (Λ) *engendre un procédé de sommation pour la série de Fourier d'une fonction continue et périodique avec le module de continuité* $\omega(\delta)$ *si l'on ait*

$$\lambda_{\nu n} \to 1, \quad n \to \infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

$$\omega(1/n) \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \lg \frac{n}{n-k} \left|\Delta^2 \lambda_{nk}\right| = o(1), \tag{1.11}$$

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^{2m-1} D\left(\frac{k}{m}\right) \lambda_{kn} \cos kt \right| dt = O(1), \tag{1.8}$$

avec

$$m = \left[\frac{n+1}{2\alpha}\right], \quad \alpha \text{ un entier } \geq 1,$$

et où $D(k/m)$ est donné par (1.9).

Dans les cas spécials la condition (1.8) peut être la conséquence directe des propriétés de coefficients $\{\lambda_{\nu n}\}$. On obtient ainsi, par exemple, les deux théorèmes suivants, dont le premier contient nos résultats [3] et [4].

THÉORÈME III. *Soit la suite $\{\lambda_{\nu n}\}$ monotone et concave $(\Delta^2 \lambda_{\nu n} \geqq 0)$ ou bien, quasi-convexe et bornée, c. à. d.*

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1) \, |\Delta^2 \lambda_{\nu n}| < M_1, \tag{1.12}$$

$$|\lambda_{\nu n}| < M_2, \tag{1.13}$$

où M_1 et M_2 ne dépendent pas de n, alors le procédé $\{\lambda_{\nu n}\}$ somme la série de Fourier de toute fonction continue et périodique avec le module de continuité $\omega(\delta)$ si

$$\lambda_{\nu n} \to 1, \quad n \to \infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

et

$$\omega(1/n) \, \lambda_{nn} \lg n = o(1). \tag{1.14}$$

Remarque. Les conditions (1.12) et (1.14) sont équivalentes à

$$\omega(1/n) \cdot \int_0^\pi |K_n(t)| \, dt = o(1). \tag{1.7}$$

THÉORÈME IV. *Soit pour un ε fixe*

$$\omega\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{1.15}$$

et soit la suite $\{\lambda_{\nu n}\}$ monotone et convexe c.à.d.

$$\lambda_{0n} - \lambda_{1n} \leqslant \lambda_{1n} - \lambda_{2n} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1,n} - \lambda_{nn}; \tag{1.16}$$

ou bien, plus générale, si pour un ε *arbitrairement petit mais fixe, il existe un* θ, $\varepsilon < \theta$, *tel que*

$$|\lambda_{kn} - \lambda_{k+1,n}| \leqslant O\left(\frac{1}{n^\theta}\right),$$
$$|\lambda_{kn}| < C, \tag{1.17}$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, 2[n^\varepsilon],$$

alors le procédé $\{\lambda_{\nu n}\}$ *somme la série de Fourier de toute fonction continue et périodique, avec le module de continuité* $\omega(\delta)$ *donné par* (1.15) *si l'on ait*

$$\lambda_{\nu n} \to 1, \quad n \to \infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

et

$$\omega(1/n) \int_0^\pi |K_n(t)|\, dt = o(1), \quad n \to \infty. \tag{1.7}$$

1.2. Dans § 3 nous allons donner quelques applications des théorèmes III et IV. L'une de ces dernières se trouve déjà dans notre note [4].

D'après W. Rogosinski [6]

$$\frac{1}{2}\{s_n(x+\alpha_n) + s_n(x-\alpha_n)\} \to f(x), \quad n \to \infty, \tag{1.18}$$

uniformément par rapport à x, $s_n(x)$ désignant les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction continue et périodique $f(x), \alpha_n = \pi k/(2n+1)$, avec un k impair et borné. A. Ф. Тиман [7] a montré que pour une suite de nombres réels $\alpha_n (|\alpha_n| \leqslant \pi)$, (1.18) sera satisfait uniformément par rapport à x et pour toute fonction continue et périodique (à periode 2π), si et seulement si α_n est de la forme

$$\alpha_n = \frac{\pi k(n)}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n \lg n}\right), \tag{1.19}$$

$k(n)$ étant impair et borné.

De notre théorème III, on déduit que si $f(x)$ possède le module de continuité $\omega(\delta)$, pour qu'on ait (1.18) uniformément par rapport à x, il suffit que α_n soit de la forme

$$\alpha_n = \frac{\pi k(n)}{2n+1} + \frac{1}{n \lg n}\, o\left(\frac{1}{\omega(1/n)}\right), \tag{1.20}$$

avec $k(n)$ impair et borné.

On sait que la classe de fonctions continues avec le module de continuité d'ordre $O(1/\lg \delta^{-1})$ joue un rôle intéressant dans l'étude des problèmes de convergence et de divergence des séries de Fourier [8, p. 171]. Pour une telle classe nous démontrerons, en partant du théorème IV, le résultat suivant.

THÉORÈME V. *Si la fonction $f(x)$ continue et périodique, possède le module de continuité $\omega(\delta) = O(1/\lg \delta^{-1})$, et si les coefficients de sa série de Fourier remplissent la relation*

$$\{|a_n|,\ |b_n|\} \leqslant \frac{F(n)}{n} \tag{1.21}$$

avec

$$F'(x) > 0, \quad F(n) = o(\lg n), \quad F(n) \sim F(n+1), \tag{1.22}$$

alors la série de Fourier de $f(x)$ converge uniformément dans $[0, 2\pi]$.

Remarque. Si la fonction $f(x)$ possède le module de continuité $\omega(\delta)$ satisfaisant à la condition (1.15), le même résultat aura lieu, si $F(n) = o(1/\omega(1/n))$, sous condition, que $|a_n|$, $|b_n|$ et $F(x)$ remplissent les hypothèses (1.21) et (1.22) du théorème V.

1.3. Enfin, dans § 4 nous allons donner une démonstration du théorème 3 de notre note [3]. La démonstration esquissée dans [3] n'est pas complete.

THÉORÊME VI. *Soient $\omega(t)$ le module de continuité de la fonctian $f(x)$ dans $(0,2\pi))$ et $\{\lambda_\nu\}$ une suite quasi-convexe, c. à. d.*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\,|\Delta^2 \lambda_\nu| < \infty;$$

toutes les fois que la condition

$$\omega(1/n)\,\lambda_n \lg n = o(1)$$

est satisfaite, la suite $\{\lambda_\nu\}$ est une suite de facteurs de convergence uniforme de la série de Fourier de la fonction $f(x)$ [3, p. 24].

2. *DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES* I–IV

A toute fonction continue et périodique $f(x)$ dont le module de continuité est $\omega(\delta)$ correspond un polynôme trigonométrique $T_m(x)$ d'ordre $m-1$ (polynôme de Jackson) et une constante C tels que pour tout $x \in [0,2\pi]$ on a

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - T_m(x)| < C\,\omega(1/m). \tag{2.1}$$

D'aprés Н. И. Ахиезер [9, p. 319] on a

$$|f(x) - T_m(x)| = \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=0}^{2m-1} D\left(\frac{k}{m}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right|$$

$$\leqslant 2\,\omega\left(\frac{\pi}{2m}\right), \tag{2.2}$$

avec

$$D(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{4}(2-x)^3, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases} \tag{1.9}$$

En posant $m = [(n+1)/2\alpha]$, α un entier $\geqslant 1$, de (2.2) on obtient (2.1) et en vertu de la propriété connue du module de continuité

$$\omega(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)\,\omega(\delta), \quad \lambda > 0,$$

on a

$$|f(x) - T_m(x)| < C_1\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad m = [(n+1)/2\alpha]. \tag{2.3}$$

Posons

$$a_0(\xi) = \frac{a_0}{2}; \quad a_k(\xi) = a_k \cos k\xi + b_k \sin k\xi, \quad k = 1, 2, \dots; \tag{2.4}$$

on a alors

$$U_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{kn}\, a_k(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi + t)\, K_n(t)\, dt, \tag{2.5}$$

avec

$$K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} \cos kt. \tag{2.6}$$

En tenant compte de (2.3), (2.5) peut s'écrire sous la forme

$$U_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_m(\xi+t)\,K_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(\xi+t) - T_m(\xi+t)\}\,K_n(t)\,dt$$

$$= A_n(\xi) + B_n(\xi).$$

Pour que $B_n(\xi)\to 0$ il suffit d'après (2.3) que

$$|B_n(\xi)| < \frac{C}{\pi}\,\omega\left(\frac{1}{m}\right)\int_0^{2\pi}|K_n(t)|\,dt = \frac{2C_1}{\pi}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\pi}|K_n(t)|\,dt \to 0,$$

et ceci est la condition (1.7) du théorème I.

De

$$A_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_m(\xi+t)\,K_n(t)\,dt,$$

et de $K_n(t)$ donné par (2.6) qui est un polynôme trigonométrique d'ordre n il s'ensuit

$$A_n(\xi) = \sum_{k=0}^{2m-1}\lambda_{kn}\,D\left(\frac{k}{m}\right)a_k(\xi),$$

où $a_k(\xi)$ est donné par (2.4). Or, $\lambda_{kn}\,D(k/m)$ définit un nouvel procédé de sommation. Nous demanderons qu'il satisfasse aux conditions nécessaires et suffisantes de C. M. Никольский, données au début de cette note, ce qui donne (1.1) et (1.8). Evidemment de $\lambda_{kn}\to 1$ d'après (1.9) il résulte

$$\lim \lambda_{kn}D\left(\frac{k}{m}\right)\to 1, \quad n\to\infty.$$

La condition (1.8) coïncide avec (1.2), où, au lieu de λ_{kn} se trouve $\lambda_{kn}\,D(k/m)$.

2.1. Nous allons déduire du théorème I le théorème II. On obtient, après une transformation abelienne effectuée dans (2.6),

$$K_n(t) = \frac{1}{2\sin t/2}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta\lambda_{\nu n}\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t + \lambda_{nn}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}.$$

ou bien,

$$K_n(t) = \frac{1}{2\sin t/2}\,\mathfrak{J}\left\{e^{(n+1)ti}\left[\lambda_{nn}\,e^{-ti/2} + \sum_{\nu=1}^{n}\Delta\lambda_{n-\nu,n}\,e^{-(2\nu+1)ti/2}\right]\right..$$

De là, pour $0 < t < \pi$ il vient

$$|K_n(t)| \leqslant \frac{1}{2\sin t/2}\left|\sin(n+1)t\left(\lambda_{nn}\cos\frac{t}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\Delta\lambda_{n-\nu,n}\cos\frac{2\nu+1}{2}t\right)\right.$$

$$\left. - \cos(n+1)t\left(\lambda_{nn}\sin\frac{t}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\Delta\lambda_{n-\nu,n}\sin\frac{2\nu+1}{2}t\right)\right|.$$

En tenant compte des formules

$$\sum_{k=0}^{m}\sin(2k+1)\frac{t}{2} = \frac{1-\cos(m+1)t}{2\sin t/2}, \qquad \sum_{k=0}^{m}\cos(2k+1)\frac{t}{2} = \frac{\sin(m+1)t}{2\sin t/2},$$

après deux transformations abeliennes effectuées dans chaque de deux parenthèses dans la dernière inégalité on obtient

$$|K_n(t)| \leqslant \frac{1}{2\sin t/2}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\Delta^2\lambda_{n-\nu,n}\sin(n+1)t\,\frac{\sin\nu t}{2\sin t/2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\nu=1}^{n}\Delta^2\lambda_{n-\nu,n}\cos(n+1)t\,\frac{1-\cos\nu t}{2\sin t/2}\right| + \frac{|\Delta\lambda_{0n}|}{2\sin t/2}\,\frac{\sin^2(n+1)t/2}{\sin t/2},$$

où bien

$$|K_n(t)| \leqslant \frac{1}{2\sin t/2}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\Delta^2\lambda_{n-\nu,n}\frac{\cos(n+1)t-\cos(n-\nu+1)t}{2\sin t/2}\right| +$$

$$+ |\Delta\lambda_{0n}|\,\frac{\sin^2(n+1)t/2}{2\sin^2 t/2},$$

d'où finalement

$$|K_n(t)| \leqslant \frac{1}{4\sin^2 t/2}\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta^2\lambda_{kn}|\,|\cos(n+1)t-\cos(k+1)t| +$$

$$+ |\Delta\lambda_{0n}|\,\frac{\sin^2(n+1)t/2}{2\sin^2 t/2}. \tag{2.7}$$

En posant [11, p. 137]

$$S_{kn} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}|\cos(n+1)t-\cos(k+1)t|\,\frac{dt}{\sin^2 t/2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left|\sin^2 (n+1)\frac{t}{2} - \sin^2 (k+1)\frac{t}{2}\right|\frac{dt}{\sin^2 t/2}$$

$$\leqslant (k+1)\int_0^{\infty} |\sin^2 t - \sin^2 \xi t| \frac{dt}{t^2},$$

avec $\xi = \dfrac{k+1}{n+1}$, et en tenant compte que pour $\xi > 0$ on a,

$$\int_0^{\infty} |\sin^2 t - \sin^2 \xi t| \frac{dt}{t^2} \leqslant 4(1-\xi)(1+\xi)\int_0^{\infty}\frac{dt}{\{1+(1-\xi)t\}\{1+(1+\xi)t\}},$$

résulte finalement

$$S_{kn} \leqslant C_1'\frac{n+k+2}{n+1}(n-k)\lg\frac{n+k+2}{n-k} \leqslant C_1\frac{n+k}{n}(n-k)\lg\frac{n+k}{n-k}$$

$$< C(n+k)\lg\frac{n}{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

De cette manière de (2.7) il s'ensuit que

$$\int_0^{\pi} |K_n(t)|\, dt \leqslant C \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\lg\frac{n}{n-k}\,|\Delta^2 \lambda_{kn}| + C' n\,|\Delta \lambda_{0n}|.$$

Or, si une série de Fourier d'une fonction continue est sommable par un procédé $(\lambda_{0n}, \lambda_{1n}, \ldots, \lambda_{nn})$, elle sera toujours sommable et par le procédé $(\lambda'_{0n}, \lambda_{1n}, \ldots, \lambda_{nn})$ avec $\lambda'_{0n} \to 1$, $n \to \infty$. On peut maintenant déterminer λ'_{0n} de sorte que $n\,|\lambda'_{0n} - \lambda_{1n}| = o(1)$ et $|\lambda'_{0n} - 2\lambda_{1n} + \lambda_{2n}| = O(1)$, et la condition

$$\omega(1/n)\int_0^{\pi} |K_n(t)|\, dt = o(1),$$

se réduit à (1.11).

2.3. D é m o n s t r a t i o n du théorème III. On a d'abord de (1.12) et (1.13)

$$(k+2)\,|\,\Delta\lambda_{k+1,n}\,| = (k+2)\,|\,\lambda_{k+1,n}-\lambda_{kn}\,| = O\,(1)\,, \qquad k=0,1,2,\ldots,n-2\,. \tag{2.8}$$

Une double sommation par parties dans le noyau $K_n(t)$, donné par (2.6), et une majoration, donne

$$\int_0^{\pi} |\,K_n(t)\,|\,dt \leqslant \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{|\,\Delta^2\lambda_{\nu n}\,|}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin\,(\nu+1)\,t/2}{\sin\,t/2}\right)^2 dt \, +$$

$$+\frac{|\,\Delta\lambda_{n-1,n}\,|}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\,nt}{\sin\,t}\right)^2 dt + \frac{|\,\lambda_{nn}\,|}{2}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\,(n+1/2)\,t}{\sin\,t/2}\right| dt = L_n + M_n + P_n\,. \tag{2.9}$$

La condition (1.12) du théorème III et (2.8) montrent que L_n et M_n sont bornés. P_n est d'ordre λ_{nn} lg n. D'autre part, nous avons de (2.9)

$$\int_0^{\pi} |\,K_n(t)\,|\,dt \geqslant P_n - (L_n + M_n).$$

Donc, la constante de Lebesgue correspondante est d'ordre λ_{nn} lg n; elle peut tendre vers l'infini avec n, de sorte que la condition (1.7) se réduit à (1.14).

Enfin, pour montrer que la condition (1.8) du théorème I avec $\alpha=1$, c. à. d. $m=[(n+1)/2]$ est aussi remplie, nous remarquons que de (1.12), (1.13) et du fait facile à vérifier (voir les formules (1.10)).

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1)\,\Delta^2 \left[D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right] < M_1\,,$$

où M_1 est indépendent de n, résulte aussi

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1)\,\Delta^2 \left[\lambda_{\nu n}\,D\left(\frac{\nu}{m}\right)\right] < M_2\,. \tag{2.10}$$

Ceci est une conséquance du fait que le produit de deux suites quasi-convexes par rapport à ν est aussi quasi-convexe, ce qui résulte d'ailleurs de la formule

$$\Delta^2\,(V_n\,W_n) = V_n\,\Delta^2\,W_n + 2\Delta\,V_n\,\Delta\,W_{n+1} + \Delta^2\,V_n\,W_{n+2}\,.$$

A cause de (1.9) et de la condition (1.13), du théorème I on trouve

$$n\Delta\left[\lambda_{n-1,n}D\left(\frac{n-1}{m}\right)\right]=n\lambda_{n-1,n}\,\Delta\left[D\left(\frac{n-1}{m}\right)\right]+nD\left(\frac{n}{m}\right)\Delta\,(\lambda_{n-1,n})=o\,(1),$$

$$\lambda_{nn}\lg nD\left(\frac{n}{m}\right)=o\,(1).$$

Une transformation abelienne double, effectuée dans (1.18) avec une majoration analogue à celle de (2.9) où $\lambda_{\nu n}$ est remplacé par $\lambda_{\nu n}\,D\,(\nu/n)$, montre que (1.8) sera satisfait si les $\lambda_{\nu n}$ remplissent les conditions (1.12) et (1.13) du théorème III.

2.4 Démonstration du théorème IV. Nous prenons ici $m=[n^{\varepsilon}]$, avec un ε arbitrairement petit mais fixe, ce qui ne changera pas la première partie dans la démonstration du théorème I. Autrement dit, pour que $B_n(\xi)\to 0$, il suffit d'après (1.15) et (2.3) que la condition (1.7) soit remplie.

Nous démontrerons que la condition (1.8)

$$L_m \overset{def}{=} \int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{2m-1}\lambda_{kn}\,D\left(\frac{k}{m}\right)\cos kt\right|dt=O\,(1),\quad m=[n^{\varepsilon}], \tag{1.8}$$

résulte de propriété des coefficients λ_{in}. De la monotonie et de la concavité de $\{\lambda_{\nu n}\}$ on a pour chaque $k<2\,[n^{\varepsilon}]$ et $p=[n^{\theta}]$, $\varepsilon<\theta<1$,

$$(\lambda_{kn}-\lambda_{k+1,n})+(\lambda_{k+1,n}-\lambda_{k+2,n})+\ldots+(\lambda_{k+p,n}-\lambda_{k+p+1,n})$$

$$=\lambda_{kn}-\lambda_{k+p+1,n}\geqslant p\,(\lambda_{kn}-\lambda_{k+1,n}).$$

De là, il vient

$$\lambda_{kn}-\lambda_{k+1,n}\leqslant O\left(\frac{1}{n^{\theta}}\right),\qquad k=0,1,2,\ldots,2\,[n^{\varepsilon}],$$

c. à. d. la condition (1.17).

Le premier membre dans (1.8) peut être majoré par

$$L_m\leqslant\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{2m-2}|\lambda_{kn}-\lambda_{k+1,n}|\left|\sum_{\alpha=0}^{k}D\left(\frac{\alpha}{m}\right)\cos\alpha t\right|dt+$$

$$+\int_0^{\pi}|\lambda_{2m-1,n}|\left|\sum_{k=0}^{2m-1}D\left(\frac{k}{m}\right)\cos kt\right|dt. \tag{2.12}$$

Une transformation double par parties, en tenant compte de (1.8) et (1.10), nous donne

$$\int_0^\pi \left| \sum_{\alpha=0}^{k} D\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cos \alpha t \right| dt \leq O(\lg k), \quad 1 < k < 2m-1,$$

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^{2m-1} D\left(\frac{k}{m}\right) \cos k t \right| dt = O(1).$$

En introduisant cettes estimations dans la dernière inegalité (2.12) on obtient

$$L_m \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} |\lambda_{kn} - \lambda_{k+1,n}| \lg k + O(|\lambda_{mn}|) \leqslant O\left(\frac{1}{n^\theta}\right) \sum_{k=1}^{2m-1} \lg k + O(|\lambda_{mn}|) =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^\theta}\right) O(m \lg m) + (|\lambda_{mn}|) = O(|\lambda_{mn}|) = O(1),$$

ce qui prouve (1.8).

3. La formule (1.18) se réduit à

$$\varkappa_n(\xi) = \frac{1}{2} \{s_n(\xi + \alpha_n) + s_n(\xi - \alpha_n)\} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\nu n} \{a_k \cos k \xi + b_k \sin k \xi\},$$

où

$$\lambda_{0n} = 1, \quad \lambda_{\nu n} = \cos \nu \alpha_n, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad \lambda_{n+1,n} = 0.$$

Pour appliquer le théorème III, nous remarquerons qu'en vertu de (1.20) on a

$$|\Delta \cos \nu \alpha_n| \leqslant \alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad |\Delta^2 \cos \nu \alpha_n| \leqslant \alpha_n^2 = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.1}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2,$$

et

$$\lim \lambda_{\nu n} = 1, \quad n \to \infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots; \quad |\lambda_{\nu n}| < C.$$

Enfin, nous avons

$$\lambda_{nn} = \cos\left[n\left\{\frac{k(n)\pi}{2n+1} + \frac{1}{n \lg n} o\left(\frac{1}{\omega(1/n)}\right)\right\}\right] = o\left(\frac{1}{\lg n\, \omega(1/n)}\right), \quad n \to \infty,$$

car $k(n)$ est un nombre impair et borné. Autrement dit, toutes les conditions (1.12)—(1.14) du théorème III sont remplies, d'où $\varkappa_n(\xi) \to f(\xi)$, $n \to \infty$.

3.1. Démonstration du théorème V. Désignons

$$\int_A^x \frac{F(t)}{t}\,dt = \varphi(x);$$

on a alors

$$\varphi''(x)+\varphi'^2(x)=\frac{x\,F'(x)-F(x)+F^2(x)}{x^2}>0,$$

pour x suffisament grand.[2] Supposons pour simplifier l'écriture que ceci a lieu pour $x \geqslant 1$. Dans le cas contraire, nous poserons $x = x'+N$. Or, de là, il vient

$$(\exp\{\varphi(x)\})''>0, \quad x \geqslant 1. \tag{3.2}$$

Posons

$$\alpha_\nu = \exp\{\varphi(\nu)\}, \quad \alpha_0 = 0, \tag{3.3}$$

il s'ensuit alors, en tenant compte de (1.22),

$$\varphi(n)-\varphi(n-1)\sim\frac{F(n)}{n}, \quad \varphi(n)\sim\varphi(n+1). \tag{3.4}$$

Envisageons maintenant une fonction $f(x)$ avec le module de continuité $\omega(\delta)=O(1/\lg\delta^{-1})$ et le procédé suivant de sommation

$$R_1(\alpha_{n+1})=\sum_{\alpha_\nu\leqslant\alpha_{n+1}}\left(1-\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{n+1}}\right)u_\nu, \quad \alpha_{n+1}\to\infty,$$

avec

$$u_\nu = a_\nu\cos\nu x + b_\nu\sin\nu x, \tag{3.5}$$

a_ν et b_ν désignant les coefficients de la série de Fourier de $f(x)$.

Désignons enfin

$$\lambda_{\nu n}=\left(1-\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{n+1}}\right), \quad \nu=0,1,2,\ldots,n,n+1. \tag{3.6}$$

Alors de (3.2) et (3.3) résulte que α_ν est concave, par suite $\lambda_{\nu n}$ est monotone et convexe, c. à. d. $\Delta^2\lambda_{\nu n}\leqslant 0$. Or, on pourra appliquer le théorème IV. Il vient de (3.4) et (3.6)

$$\lambda_{nn}=1-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\sim\varphi(n+1)-\varphi(n)=F(n)/n,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-2}(\nu+1)\,|\Delta^2\lambda_{\nu n}|\leqslant[\alpha_2+\alpha_n+n\,(\alpha_n-\alpha_{n-1})]/\alpha_{n+1},$$

$$n\,|\lambda_{n+1,n}-\lambda_{nn}|=n\,(\alpha_{n+1}-\alpha_n)/\alpha_{n+1},$$

[2] On considère le cas où $F(x)\to\infty$.

de sorte que la condition (1.7) du théorème IV se réduit à

$$n\,|\Delta\lambda_{n-1,n}|\,\omega(1/n) \sim n\,[\varphi(n+1)-\varphi(n)]\,\omega(1/n) = o(1),$$

et

$$\lambda_{nn}\,\omega(1/n)\lg n = o(1).$$

Ces deux conditions sont maintenant remplies en vertu de (1.22) et (3.4). Donc, la série de Fourier de la fonction $f(x)$, avec le module de continuité d'ordre $O(1/\lg\delta^{-1})$ est sommamble par le procédé $R_1(\alpha_{n+1})$, si α_ν est défini par (3.3) et (3.4).

D'après un théorème de Hardy [10, th. 64, p. 124] la série Σu_ν est convergente si elle est sommable $R_1(\alpha_{n+1})$ et si la condition de convergence

$$u_n = O\left(\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right), \quad n\to\infty,$$

est satisfaite. La dernière condition, d'après (3.3) et (3.4), se réduit à

$$u_n = O(F(n)/n), \quad n\to\infty,$$

où u_ν est donné par (3.5), ce qui en vertu de (1.22) achève la démonstration du théorème V.

4. Démonstration du théorème VI. Envisageons la formule (2.5) où λ_{kn} est remplacé par λ_k.

$$U_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k a_k(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi+t)K_n(t)\,dt,$$

ou bien

$$U_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_m(\xi+t)K_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(\xi+t)-T_m(\xi+t)\}K_n(t)\,dt =$$

$$= A_n(\xi)+B_n(\xi),$$

$a_k(\xi)$ étant donné par (2.4), T_m par (2.2) avec $m=[(n+1)/2]$.

On a d'abord

$$|B_n(\xi)| \leqslant \frac{2C_1}{\pi}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\pi}|K_n(t)|\,dt,$$

et (2.9) montre que $|B_n(\xi)| \to 0$ si $\lambda_n \lg n\ \omega(1/n) = o(1)$. La convergence uniforme de

$$A_n(\xi) = \sum_{k=0}^{2m-1} \lambda_k D\left(\frac{k}{m}\right) a_k(\xi), \quad m = [(n+1)/2],$$

résulte après une double sommation par parties en tennant compte des formules (2.10), (2.11) et (1.10), où λ_{kn} doit être remplacé par λ_k, et où $\sigma_\nu(x)$. $\nu = 0, 1, 2, \ldots, (2m-2)$ convergent uniformement comme les sommes de Fejér d'une fonction continue $f(x)$, $s_{2m-1} = o(\lg n)$ et $D((2m-1)/n) = O(1/n^3)$, $m = [(n+1/2]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] С. М. Никольский — О линейных методах суммирования рядов Фурье. *Изв. Ак. Наук СССР*, сер. матем. Т. **12**, № 3 (1948), 259—278.

[2] B. Sz. Nagy — Méthodes de sommation des séries de Fourier. I. *Acta Sci. Math. Szeged*, **XII**, pars B (1950), 204—210.

[3] M. Tomić — Sur les facteurs de convergence des séries de Fourier des fonctions continues. *Publ. Inst. math Acad. serbe Sci.* **VIII** (1955), 23— 32.

[4] ———— Remarque sur un procédé de sommation des séries de Fourier, *Bull. de la Soc. des math. et des phys. de la R. P. Macédoine*, **VI** (1955), 35—43.

[5] Н. К. Бари и С. Б. Стечкин — Наилущие приближения и диференциальные свойства двух сопряженных функций. *Труды московского маш. общесшва*, Т. **5** (1956), 483—522.

[6] W. W. Rogosinski — Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen. *Math. Ann.* **95** (1925), 110—134.

[7] А. Ф. Тиман — О некторых свойствах суммирования рядов Фурье. *Изв. Ак. Наук. СССР*, сер. матем. Т. **14**, № 1 (1950), 85—94.

[8] A. Zygmund — Trigonometrical Series, Warszawa, 1935.

[9] Н. И. Ахиезер — Лекции по теории аппроксимации. Москва-Ленинград, 1947.

[10] G. H. Hardy — Divergent Series, Oxford, 1949.

[11] J. Karamata et M. Tomić — Sur la sommation des séries de Fourier des fonctions continues. *Publ. Inst. math. Acad. Serbe Sci.* **VIII** (1955), 123—138.