SUR UNE CLASSE GÉNÉRALE DE PROCÉDÉS DE SOMMATIONS DU TYPE D'EULER-BOREL

BOGDAN M BAJŠANSKI (Beograd)

SOMMAIRE — Étude des procédés de sommations dont les éléments de la matrice sont donnés par les coefficients du developpement de la fonction $[f(z)]^n$.

1. Dans cet article nous étudierons les procédés de sommations, notés (E, f), dont la matrice $[a_{n\nu}]$ est donée par

$$f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu,$$

la fonction $f(z)$ étant supposée régulière à l'origine [7].

Divers cas particuliers étaient déjà l'objet de maints travaux; ainsi, par exemple, le procédé (E, q) d'Euler-Knopp [3, p. 180], celui de Meyer-König [5], le procédé $E(\alpha, \beta)$ de Karamata [4], qui les contient, et enfin celui de Borel-Gaier [2], sont des procédés (E, f) à

$$f(z) = \frac{z+q}{1+q}, \; q > 0,$$

$$f(z) = \frac{1-r}{1-rz}, \; 0 < r < 1,$$

$$f(z) = \frac{\alpha + (1-\alpha-\beta) z}{1-\beta z}, \; \alpha < 1, \; \beta < 1, \; \alpha+\beta > 0,$$

respectivement $f(z) = e^{z-1}$.

Le premier problème qui se pose, relatif au procédé (E, f), est celui de permanence et il s'agit de donner des conditions suffisantes que doit satisfaire la fonction $f(z)$ pour que ce procédé soit permanent. D'après le théorème de Toeplitz-Schur pour que le procédé à matrice $[a_{n\nu}]$ soit permanent il faut et il suffit que

(1) $a_{n\nu} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour chaque ν fixé,

(2) $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \to 1$ lorsque $n \to \infty$,

(3) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1)$ lorsqua $n \to \infty$.

D'après la condition (2), la fonction $f(z)$ doit être holomorphe à l'intérieur du cercle-unité. Toutefois, nous supposerons, en outre, que la fonction $f(z)$ est régulière en tous les points de la circonférence de ce cercle, ce qui se trouve, en particulier, réalisé par tous les procédés mentionnés plus haut. Cette hypothèse faite, il est facile de voir que les conditions (1) et (2) sont satisfaites lorque $f(1)=1$ et $|f(z)| \leqslant 1$ pour $|z| \leqslant 1$. A l'exception du cas où les coefficients du developpement de la fonction $f(z)$ sont non-négatifs, et qui se présente dans les procédés d'Euler-Knopp, de Meyer-König et de Borel-Gaier, c'est la condition (3) qui offre la difficulté essentielle.

Cette difficulté se présente déjà dans le procédé particulier dont le théorème de permanence, formulé par Karamata, fut démontré par G. Szegö dans une lettre adresée à Karamata [4]. Pour évaluer $|a_{n\nu}|$, G. Szegö part de la formule de Cauchy, en choisissant pour le chemin d'intégration la circonférence $z = -d + (1+d)\, e^{ti}$, $d > 0$, située entre $|z|=1$ et $|f(z)| = \left|\dfrac{\alpha + (1-\alpha-\beta)\, z}{1-\beta\, z}\right| = 1$. En négligant la partie de l'intégrale relative à l'intervalle $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, dont la majoration est immédiate, il lui reste à évaluer l'intégrale

$$J_{n\nu} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\{(A_1 n + B_1 \nu)\, it - (A_2 n + B_2 \nu)\, t^2 + (A_3 n + B_3 \nu)\, t^3 + R(t)\}\, dt.$$

A cet effet il montre que $A_1 > 0$, $B_1 < 0$, $A_2 > 0$, $B_2 > 0$, que A_3 et B_3 sont purement imaginaires lorsque $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\alpha + \beta > 0$ et en tire par un calcul assez long que

$$|J_{n\nu}| \leqslant \frac{K}{(n+\nu)^{3/2}} + \frac{L}{\sqrt{n}}\, e^{-\delta \frac{(n-\nu)^2}{n+\nu}}; \quad K, L, \delta > 0.$$

A partir de ce résultat, l'évaluation de la somme $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|$ étant immédiate, il obtient en définitif que le procédé $E(\alpha, \beta)$ est permanent toutes les fois qu $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\alpha + \beta > 0$.

Dans la démonstration de Szegö le cas particulier $E(-\alpha, \alpha)$, c'est-à-dire le procédé (E, f) relatif à la fonction $f(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\alpha z}$ n'étant pas envisagé, remarquons qu'il est contenu dans notre théorème 3, d'où il découle que ce procédé n'est pas permanent. Il s'en suit donc que le procédé $E(\alpha, \beta)$ sera permanent si et seulement si $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\alpha + \beta > 0$, à l'exception du cas trivial où $\alpha = \beta = 0$. (Voir le théorème 5.)

Dans notre cas, ce problème fondamental — c'est-à-dire le problème de trouver des conditions suffisantes, suffisament simples et assez générales, pour la fonction $f(z)$ pour qu'on ait $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1)$ lorsque $n \to \infty$ — est résolu par le théorème 1. L'idée de la démonstration est différente de celle de Szegö, ce qui permet d'obtenir le théorème plus général et de raccourcir sa démonstration.

Après avoir établi dans le paragraphe 2 le théorème de permanence pour les procédés (E, f) qui est une conséquence immédiate du théorème 1, nous donnons, dans le paragraphe 3, un théorème de non-permanence (théorème 3), qui montre que la condition c) du théorème 2 est une condition nécessaire. Dans le paragraphe 4, nous donnons un théorème d'inclusion et enfin, dans le paragraphe 5, nous appliquons ces résultats aux procédés $E(\alpha, \beta)$.

2. THÉORÈME 1. *Soient*

i) $f(z)$ *holomorphe pour* $|z| < R$, $R > 1$,

ii) $|f(z)| < 1$ *pour* $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$,

iii) $f(1) = 1$,

iv) $\Re A \neq 0$ *où le nombre* A *est défini par*

$$f(z) - z^{\alpha} = A i^{p} (z-1)^{p} + o(1)(z-1)^{p}, \quad z \to 1, \quad \alpha = f'(1), \quad A \neq 0.$$

Alors, si

$$f^{n}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^{\nu},$$

on aura

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1) \quad \textit{lorsque } n \to \infty .$$

Il n'est pas évident que la condition iv) ne résulte pas des trois conditions précédentes. Pour voir que cela n'est pas le cas, il suffit d'envisager la fonction

$$f(z) = z - \left(\frac{z-1}{2}\right)^3$$

qui satisfait aux conditions i – iii) puisque

$$|f(e^{ti})|^2 = 1 - \sin^4 \frac{t}{2}\left(1 + \cos^2 \frac{t}{2}\right),$$

et qui ne satisfait pas à la condition iv), car

$$f(z) - z = -\frac{1}{8}(z-1)^3,$$

c'est-à-dire

$$A = -\frac{1}{8}i.$$

Cependant, la condition iv) est très générale. En premier lieu, elle est satisfaite dans le cas particulier lorsque

$$\mathfrak{Rl}\, f''(1) \neq f'(1)^2 - f'(1), \tag{4}$$

parce que, d'après i – iii), $f'(1)$ est un nombre réel.

En deuxième lieu, si la fonction $f(z)$ a tous ses coefficients réels, il est évident que la condition iv) sera satisfaite si et seulement si le zéro de la fonction $f(z) - z^\alpha$ au point $z = 1$ est d'un ordre pair.

Enfin, l'affirmation du théorème 1 est triviale lorsque tous les coefficients $a_{1\nu}$ sont non-négatifs. Toutefois, il n'est pas évident que dans ce cas la condition iv) est une conséquence des trois précédentes. Même la condition ii) se trouve superflue, lorsqu'on élimine les puissances de z, c'est-à-dire lorsque

$$f(z) \neq z^k \quad \text{pour tout } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{5}$$

puisque dans ce cas la fonction $f(z)$ ne peut atteindre son module maximum qu'au point $z=1$. Or, en vertu de l'inégalité de Schwarz on aura

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \sqrt{a_n}\sqrt{a_n}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

où, d'après (5), le signe d'égalité ne peut pas figurer. Par conséquent,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} na_n\right)^2 < \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n,$$

où l'on a profité du fait que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$, et cette inégalité se réduit à

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} na_n\right)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} na_n < \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, a_n,$$

c'est-à-dire à $f'(1)^2 - f'(1) < f''(1)$. Donc, d'après (4), la condition iv) est bien satisfaite.

Dans la démonstration du théorème 1 nous aurons besoin du lemme suivant

LEMME 1. *Soit* S *défini par* $|r-1| < \delta$, $|t| < \varepsilon$; $\delta, \varepsilon > 0$. *Si dans* S

i) *toutes les derivées partielles d'ordre* $\leqslant 2k$ *de la fonction* $\psi(r, t)$ *existent et sont continues,*

ii) $\dfrac{1}{(2k)!} \dfrac{\partial^{2k} \psi(r,t)}{\partial t^{2k}} < -M$, $M > 0$,

iii) $\dfrac{\partial^{m+n} \psi(r,t)}{\partial t^m \partial r^n} = 0$ *pour* $m+n \leqslant 2k-1$, $r = 1$, $t = 0$,

alors, pour $r = 1 \pm n^{-1/2k}$,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{n\psi(r,t)}\, dt = O(n^{-1/2k}), \quad n \to \infty.$$

D é m o n s t r a t i o n du lemme 1. D'après i), en appliquant la formule de Taylor, on aura

$$\psi(r,t) = \sum_{m=0}^{2k-1} C_m(r)\, t^m + C_{2k}(r;t)\, t^{2k} \tag{6}$$

où

$$C_m(r) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi(r,t)}{\partial t^m}\bigg|_{t=0}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 2k-1$$

et

$$C_{2k}(r;t) = \frac{1}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} \psi(r,t)}{\partial t^{2k}}\bigg|_{t=\tau}, \quad |\tau| < |t| < \varepsilon. \tag{7}$$

Les dérivées de $C_m(r)$, $m=0,1,\ldots,2k-1$ s'expriment par

$$\frac{d^n C_m(r)}{dr^n}=\frac{1}{m!}\frac{d^n}{dr^n}\left(\frac{\partial^m \psi(r,t)}{\partial t^m}\bigg|_{t=0}\right)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^{m+n}\psi(r,t)}{\partial t^m\,\partial r^n}\bigg|_{t=0}.$$

Alors, d'après iii), toutes les dérivées de $C_m(r)$ d'ordre $\leqslant 2k-m-1$ s'annulent au point $r=1$. Par conséquent, $C_m(r)$ a au point $r=1$ un zéro d'ordre $2k-m$ au moins. Donc,

(8) $$C_m(r)\leqslant C_m|r-1|^{2k-m} \quad \text{pour} \quad |r-1|<\delta.$$

En posant $r=1\pm n^{-1/2k}$, on obtient de (6), (8), (7) et ii) que

$$\psi(r,t)=\sum_{m=0}^{2k-1}C_m(r)\,t^m+C_{2k}(r;t)\,t^{2k}\leqslant\sum_{m=0}^{2k-1}C_m\,n^{-1+\frac{m}{2k}}\,t^m-Mt^{2k}.$$

Ainsi,

$$\int_0^{\varepsilon}e^{n\psi(r,t)}dt\leqslant\int_0^{\varepsilon}e^{\Sigma C_m n^{m/2k}t^m-Mnt^{2k}}dt\leqslant$$

$$\leqslant n^{-1/2k}\int_0^{\infty}\exp\left\{\sum_{m=0}^{2k-1}C_m u^m-Mu^{2k}\right\}du=O(n^{-1/2k}).$$

La fonction $\psi_1(r,t)=\psi(r,-t)$ satisfait aussi aux conditions du lemme, de sorte que

$$\int_{-\varepsilon}^{0}e^{n\psi(r,t)}dt=\int_0^{\varepsilon}e^{n\psi_1(r,t)}dt=O(n^{-1/2k}).$$

Donc,

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}e^{n\psi(r,t)}dt=O(n^{-1/2k})\ \text{lorsque}\ n\to\infty.$$

D é m o n s t r a t i o n du théorème 1. (i) Soit

(9) $$g(z)\ \underset{=}{\overset{def}{=}}\ z^{-\alpha}f(z),$$

(10) $$\psi(r,t)\ \overset{def}{=}\ \Re\mathrm{l}\ \log g(re^{ti}),$$

(11) $$\varphi(r,t)\ \overset{def}{=}\ \frac{1}{p!}\frac{\partial^p\psi(r,t)}{\partial t^p}=\frac{1}{p!}\frac{\partial^p\log|f(re^{ti})|}{\partial t^p}.$$

D'après un théorème de Julia [1, p. 112], il résulte de i-iii) que le nombre $\alpha = f'(1)$, est réel et positif.

En outre, d'après iv) on aura

$$(12) \qquad z^{-\alpha} f(z) = 1 + A\, i^p (z-1)^p + o(1)\,(z-1)^p, \ z \to 1, \ \Re A \neq 0,$$

de sorte que

$$(13) \qquad |f(e^{ti})| = 1 + (-1)^p\, \Re A t^p + o(t^p), \ t \to 0,$$

Alors, d'après ii), le nombre p doit être pair et la partie réelle de A doit être négative.

D'après i) et iii), toutes les derivées partielles de

$$(14) \qquad \psi(r, t) = \Re \log r^{-\alpha} e^{-\alpha t i} f(re^{ti}) = \log |f(re^{ti})| - \alpha \log r$$

sont continues dans un voisinage du point $r = 1$, $t = 0$. En particulier, la fonction $\varphi(r, t)$, définie par (11), est continue dans ce domaine. Si l'on pose $p = 2k$, on aura d'après (13) et (14)

$$\varphi(1, 0) = -2M, \quad M = -{}^1/_2\, \Re A > 0,$$

de sorte qu'il existe un voisinage du point $r = 1$, $t = 0$ dans lequel $\varphi(r, t) \leqslant -M$. Enfin, d'après (12) on a $g(z) = 1 + O(1)\,(z-1)^{2k}$, $z \to 1$, donc $\psi(r, t) = O(1)\, \Re\,[e^{ti}(r-1) + (e^{ti} - 1)]^{2k}$ lorsque $r \to 1$, $t \to 0$. Comme $e^{ti} - 1 = ti + O(t^2)$, $t \to 0$, les dérivées partielles d'ordre $< 2k$ de la fonction $\psi(r, t)$ sont nulles au point $r = 1$, $t = 0$.

Donc, d'après les conditions i - iv), il existe un voisinage S du point $r = 1$, $t = 0$ dans lequel la fonction $\psi(r, t)$ satisfait aux conditions du lemme 1.

(ii) On choisit d'abord $\varepsilon > 0$ et $N_1 > 0$, tels que le domaine $|r-1| < N_1^{-1/2k}$, $|t| < \varepsilon$ soit contenu dans S.

Soit maintenant $1 - 2\delta$ le module maximum de la fonction $f(re^{ti})$ pour $|t| \geqslant \varepsilon$, $r = 1$. Alors il est possible de choisir N_2 suffisamment grand de sorte que $|f(re^{ti})| \leqslant 1 - \delta$ pour $|t| \geqslant \varepsilon$, $|r-1| \leqslant N_2^{-1/2k}$.

Soit enfin $N_3 > (R-1)^{-2k}$ et $N = \mathrm{Max}\,(N_1, N_2, N_3)$.

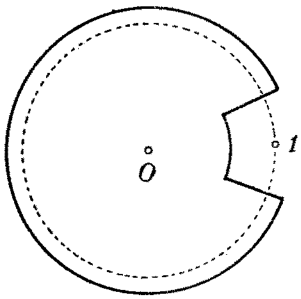
De cette manière, le domaine $|r-1| < N^{-1/2k}$ se trouve entièrement à l'intérieur du cercle $|z| < R$ où la fonction $f(z)$ est holomorphe et on a, d'une part,

$$(15) \qquad |f(re^{ti})| \leqslant 1 - \delta \quad \text{pour} \quad |t| \geqslant \varepsilon, \ |r-1| \leqslant N^{-1/2k}$$

et, d'autre part, en vertu du lemme 1,

$$(16)\qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{n\psi(r,t)}\,dt = O\,(n^{-1/2k}) \ \text{lorsque}\ r = 1 \pm n^{-1/2k}, \quad n \to \infty.$$

(iii) Pour évaluer les coefficients $|a_{n\nu}|$, $n > N$, nous àppliquerons la formule de Cauchy. A cet effet, nous choisissons un contour d'intégration $C_{n\nu}$ dépendant de n et α. Ce contour est constitué des arcs de circonférences $P_{n\nu}$ et $Q_{n\nu}$ et des segments $R_{n\nu}^{+}$ et $R_{n\nu}^{-}$, définis de la manière suivante.



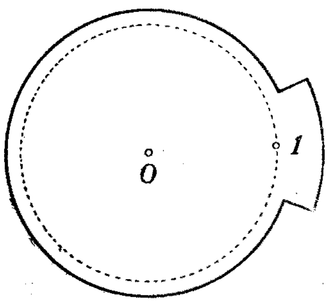
$C\nu n \quad \nu \leqslant \alpha n$

$$P_{n\nu}: \qquad |z| = 1 + n^{-1}, \quad |\arg z| > \varepsilon,$$

$$Q_{n\nu}: |z| = \begin{cases} 1 - n^{-1/2k} \ \text{pour}\ \nu \leqslant \alpha n, \ |\arg z| < \varepsilon, \\ 1 + n^{-1/2k} \ \text{pour}\ \nu > \alpha n, \ |\arg z| < \varepsilon, \end{cases}$$

$$R_{n\nu}^{\pm}: \qquad \arg z = \pm\varepsilon, \quad \begin{cases} 1 - n^{-1/2k} \leqslant |z| \leqslant 1 + n^{-1} \ \text{pour}\ \nu \leqslant \alpha n, \\ 1 + n^{-1} \leqslant |z| \leqslant 1 + n^{-1/2k} \ \text{pour}\ \nu > \alpha n. \end{cases}$$

On a alors



$C\nu n \quad \nu > \alpha n$

$$2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{C_{n\nu}} |f(z)|^n |z|^{-\nu-1} |dz| =$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \Bigl(\int_{P_{n\nu}} + \int_{Q_{n\nu}} + \int_{R_{n\nu}^{+}} + \int_{R_{n\nu}^{-}} \Bigr) \frac{|f(z)|^n}{|z|^{\nu+1}} |dz|$$

$$\leqslant P_n + Q_n + R_n^{+} + R_n^{-}$$

et le théorème sera démontré si ces suites restent bornées.

(iv) La suite P_n est bornée.

Puisque, d'après (15), $|f(re^{ti})| \leqslant 1 - \delta$ pour $r = 1 + n^{-1}$, $n > N$, on a

$$P_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{P_{n\nu}} |f(z)|^n |z|^{-\nu-1} |dz| = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} |f(re^{ti})|^n r^{-\nu}\,dt$$

$$\leqslant 2\pi\,(1-\delta)^n \sum_{\nu=0}^{\infty} r^{-\nu} = 2\pi\,(n+1)\,(1-\delta)^n =$$

$$= o\,(1) \quad \text{lorsque}\ n \to \infty.$$

(v) La suite Q_n est bornée.

On a d'abord

$$Q_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{Q_{n\nu}} |f(z)|^n |z|^{-\nu-1} |dz| =$$

$$= \left(\sum_{\nu \leqq \alpha n} + \sum_{\nu > \alpha n} \right) \int_{Q_{n\nu}} |f(z)|^n |z|^{-\nu-1} |dz| =$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 .$$

D'après la définition du contour et d'après (9) on aura

$$\Sigma_1 = \sum_{\nu \leqq \alpha n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(r_1 e^{ti})|^n r_1^{-\nu} dt =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g(r_1 e^{ti})|^n dt \cdot \sum_{\nu \leqq \alpha n} r_1^{\alpha n - \nu}, \quad \text{où} \quad r_1 = 1 - n^{-1/2k}$$

et

$$\Sigma_2 = \sum_{\nu > \alpha n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(r_2 e^{ti})|^n r_2^{-\nu} dt =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g(r_2 e^{ti})|^n dt \cdot \sum_{\nu > \alpha n} r_2^{\alpha n - \nu}, \quad \text{où} \quad r_2 = 1 + n^{-1/2k}.$$

Puisque, d'après (10) et (16),

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g(re^{ti})|^n dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{n\Psi(r,t)} dt = O(n^{-1/2k}) \text{ lorsque } r = 1 \pm n^{-1/2k}, \quad n \to \infty$$

et que

$$\sum_{\nu \leqq \alpha n} r_1^{\alpha n - \nu} \leqslant \sum_{\nu=0}^{[\alpha n]} r_1^{\nu} < \sum_{\nu=0}^{\infty} r_1^{\nu} = \frac{1}{1 - r_1} = n^{1/2k},$$

$$\sum_{\nu > \alpha n} r_2^{\alpha n - \nu} < \sum_{\nu = [\alpha n] + 1}^{\infty} r_2^{[\alpha n] + 1 - \nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_2^{-\nu} = \frac{r_2}{r_2 - 1} = n^{1/2k} + 1,$$

on obtient finalement

$$Q_n = O(1) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty .$$

(vi) Les suites R_n^+ et R_n^- sont bornées.

On a

$$R_n^{\pm} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{R_{\nu n}^{\pm}} |f(z)|^n |z|^{-\nu-1} |dz| -$$

$$= \sum_{\nu \leqq \alpha n} \int_{1-n^{-1/2k}}^{1+n^{-1}} |f(re^{\pm \varepsilon i})|^n r^{-\nu-1} dr + \sum_{\nu > \alpha n} \int_{1+n^{-1}}^{1+n^{-1/2k}} |f(re^{\pm \varepsilon i})|^n r^{-\nu-1} dr =$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2$$

D'après (15) on aura

$$\int_{1-n^{-1/2k}}^{1+n^{-1}} |f(re^{\pm \varepsilon i})|^n r^{-\nu-1} dr < 2(1-\delta)^n n^{-1/2k} (1-n^{-1/2k})^{-\nu-1},$$

$$\int_{1+n^{-1}}^{1+n^{-1/2k}} |f(re^{\pm \varepsilon i})|^n r^{-\nu-1} dr < (1-\delta)^n n^{-1/2k} (1+n^{-1})^{-\nu-1},$$

de sorte que

$$\Sigma_1 < 2(1-\delta)^n n^{-1/2k} \sum_{\nu \leqq \alpha n} (1-n^{-1/2k})^{-\nu-1} <$$

$$< 2(1-\delta)^n (1-n^{-1/2k})^{-\alpha n-1} =$$

$$= o(1) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty$$

et

$$\Sigma_2 < (1-\delta)^n n^{-1/2k} \sum_{\nu > \alpha n} (1+n^{-1})^{-\nu-1} <$$

$$< (1-\delta)^n n^{-1/2k} \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+n^{-1})^{-\nu} =$$

$$< (1-\delta)^n n^{1-1/2k} =$$

$$= o(1) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty .$$

Donc, $R_n^{\pm} = o(1)$ lorsque $n \to \infty$.

COROLLAIRE. *Pour que* $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(1)$ *lorsque* $n \to \infty$, *où* $f^n(z) =$ $= \sum_{\nu=0} a_{n\nu} z^\nu$, *il suffit que*

a) $f(z)$ *soit holomorphe pour* $|z| < R$, $R > 1$;

b) $|f(z)| < 1$ *pour* $|z| \leqslant 1$ *sauf dans un nombre fini de points* ζ *et que*

c) *pour chaque* ζ, $\Re A_\zeta \neq 0$, *le nombre* A_ζ *étant défini par*

$$h_\zeta(z) - z^{\alpha(\zeta)} = A_\zeta i^p (z-1)^p + o(1)(z-1)^p, \; z \to 1, \; A_\zeta \neq 0$$

où

$$h_\zeta(z) = f(\zeta z)/f(\zeta), \quad \alpha(\zeta) = h'_\zeta(1).$$

THÉORÈME 2. *Pour que le procédé* (E, f) *soit permanent, il suffit que les conditions* a) – c) *soient satisfaites et que*

d) $f(1) = 1$.

Les deux premières conditions de Toeplitz-Schur sont satisfaites car, d'après l'inégalité de Cauchy on a $|a_{n\nu}| \leqslant M^n(r) r^{-\nu}$ pour chaque $r \leqslant 1$ où $M(r) = \mathrm{Max}|f(z)|$ pour $|z| = r$. En posant $r = 1/2$, on obtient, à cause de b), $M(1/2) = \delta < 1$, de sorte que $|a_{n\nu}| \leqslant 2^\nu \delta^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ pour chaque ν fixé. D'après a) et d),

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = f^n(1) = 1.$$

Il faut mentionner que la partie de la condition b) qui exige qu'il n'y a qu'un nombre fini de points ζ, peut être déduite de c). (Voir (13).)

3. La condition de régularité de la fonction $f(z)$ à l'intérieur du cercle-unité est evidemment nécessaire, puisque la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}$ doit converger. Cependant, la condition de régularité de la fonction sur le contour du cercle-unité ne l'est pas; ainsi, par exemple, le procédé de sommation associé à la fonction $f(z) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est permanent.

Du fait que nous nous limitons dans cet article au cas où la fonction $f(z)$ est régulière sur la circonférence du cercle-unité, il se pose la question est ce que dans ce cas les conditions du théorème 1 sont de même nécessaires pour que le procédé de sommation (E, f) soit permanent. A cette question nous ne pouvons répondre que partiellement, car la condition c) nous échappe. La condition d) étant évidemment nécessaire, nous allons montrer encore qu'il en est de même de la condition b), à quelques exceptions triviales près. L'interêt de cette affirmation résulte déjà du fait qu'elle nous permet de formuler les conditions nécessaires et suffisantes pour que le procédé de somation $E(\alpha, \beta)$ soit permanent.

Il faut mentionner d'abord que si $f(z)$ est une fonction holomorphe pour $|z| < R, R > 1$ est si $|f(z)| = 1$ en une infinité de points de la circonférence $|z| = 1$, alors $|f(z)| = 1$ en tous les points de cette circonférence. Cela résulte du fait que deux courbes analytiques ne peuvent pas avoir une infinité de points communs sans être identiques. Ceci posé, notre théorème s'énonce comme suit.

THÉORÈME 3. *Soit*

i) $f(z)$ *holomorphe pour* $|z| < R,\ R > 1$;

ii) $|f(z)| = 1$ *pour* $|z| = 1$;

iii) $f(z) \neq e^{\vartheta i} z^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Alors, en posant

$$f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu ,$$

on aura

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \to \infty \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty .$$

La démonstration est basée sur le lemme suivant.

LEMME 2. *Soient*

i) $p_{n\nu} \geqslant 0$;

ii) $p_{n\nu}$ *tendant uniformément vers zero lorsque* $n \to \infty$;

iii) $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n\nu}^2 = 1$ *pour chaque* n.

Alors,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n\nu} \to \infty \quad \textit{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Démonstration du lemme 2. D'après iii), $p_{n\nu} \to 0$ lorsque $\nu \to \infty$ pour tout n fixé et d'après ii), cette convergence a lieu uniformément par rapport a n; ainsi,

$$\rho_\nu = \operatorname*{Max}_n \, p_{n\nu} \to 0 \qquad \text{lorsque } \nu \to \infty. \tag{17}$$

D'autre part, des hypothèses i), ii) et iii) il résulte que le procédé de sommation défini par la matrice $[p^2_{n\nu}]$ est non seulement permanent, mais même totalement permanet [3, p. 52], les éléments de cette matrice étant non-négatifs. Donc,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p^2_{n\nu} s_\nu \to \infty \qquad \text{avec } n \to \infty \text{ lorsque } s_\nu \to \infty.$$

En particulier, d'après (17),

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n\nu} > \sum_{\nu=0}^{\infty} p^2_{n\nu} \rho_\nu^{-1} \to \infty \text{ lorsque } n \to \infty,$$

c.q.f.d.

Démonstration du théorème 3. D'après le lemme 2 il suffit de montrer que

a) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|^2 = 1$ et que

b) $a_{n\nu} \to 0$ uniformément pour ν, lorsque $n \to \infty$.

a) D'après les conditions i) et ii) du théorème 3, on a, en vertu de la formule de Parseval,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{ti})|^{2n} \, dt = 1.$$

b) En appliquant la formule de Cauchy, on aura d'après ii)

$$2\pi |a_{n\nu}| = \left| \int_{|z|=1} f^n(z) z^{-\nu-1} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} e^{[n\varphi(t) - \nu t]i} dt \right|, \tag{18}$$

où

$$\varphi(t) = \arg f(e^{ti}) = -i \log f(e^{ti}).$$

Étant donné i) et ii), $f(z)$ est le produit d'un nombre fini de fonctions de la forme $e^{\vartheta_i} \dfrac{z - z_i}{1 - \bar{z}_i z}$, $|z_i| < 1$, où, d'après iii), les z_i ne sont pas tous égaux à zéro. Par conséquent, $\varphi'(t)$ est la somme d'un nombre fini de fonctions de la forme

$$\frac{1-\rho_i^2}{1-2\rho_i\cos(t-\theta_i)+\rho_i^2}$$

où les ρ_i ne sont pas tous égaux à zéro et la fonction $\varphi''(t)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Donc pour démontrer b), il suffit d'après (18) de prouver que

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{[n\varphi(t)-\nu t]i}\,dt\right| < \varepsilon \text{ pour } n > N(\varepsilon) \text{ et chaque } \nu \text{ entier,} \tag{19}$$

où $\varphi''(\alpha)=0$, $\varphi''(t)>0$ pour $\alpha < t \leqslant \beta$.

Soit $g(\varepsilon) = \operatorname{Min}\varphi''(t)$ pour $\alpha+\frac{\varepsilon}{2} \leqslant t \leqslant \beta$ et $N(\varepsilon) = \frac{256}{\varepsilon^2 g(\varepsilon)}$.

On a évidemment

$$\left|\int_\alpha^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}} e^{[n\varphi(t)-\nu t]i}\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Pour évaluer la partie de l'intégrale relative à l'intervalle $(\alpha+\varepsilon/2, \beta)$, appliquons le lemme suivant de Van der Corput [8, p. 117]: Si $f(u)$ a une dérivée croissante pour $a \leqslant u \leqslant b$ et si $f''(u) \geqslant \rho > 0$, alors

$$\left|\int_a^b e^{if(u)}\,du\right| \leqslant 8\rho^{-1/2}.$$

Il s'ensuit que

$$\left|\int_{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}^\beta e^{[n\varphi(t)-\nu t]i}\,dt\right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{ng(\varepsilon)}} < \frac{8}{\sqrt{N(\varepsilon)g(\varepsilon)}} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{21}$$

De (20) et (21) on obtient (19) et le théorème se trove ainsi démontré.

4. THÉORÈMÈ 4. *Soient (E, f) et (E, g) deux procédés permanents; si*

i) *la fonction $h(z) = g(f^{-1}(z))$, définie dans un voisinage du point $z=1$, est holomorphe pour $|z| < R'$ et satisfait aux conditions du théorème 2 et si*

ii) $s_n = O(r^n)$, $n \to \infty$; $r < R$, $M(r) < R'$, *où la fonction* $f(z)$ *est holomorphe pour* $|z| < R$ *et où*

$$M(r) = \text{Max}\,|f(z)| \text{ pour } |z| = r,$$

alors

$$(E, f) \subset (E, g),$$

c'est-à-dire de

$$(E, f) - \lim s_n = s$$

il résulte que

$$(E, g) - \lim s_n = s.$$

Le théorème énoncé implique des restrictions assez serrées pour la fonction $g(z)$. L'étroitesse de ces restrictions ne résulte cependant pas de l'insuffisante généralité du théorème; elle tient à la nature même des choses. Pour l'illustrer sur un exemple, considérons le procédé (E, e^{z-1}). Comme la fonction e^{z-1} prend la valeur un aux points $z = 1 + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ chacune des suites $s_n = (1 + 2k\pi i)^n$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ est sommable vers l'unité. Aussi, pour que le procédé (E, g) renferme le procédé (E, e^{z-1}), faut-il qu'avant tout il somme chacune des suites précédentes vers l'unité. Ceci n'est cependant posible que si la fonction $g(z)$ prend en tous les points $z = 1 + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ la valeur un, ce qui constitue déjà une restriction indispensable assez étroite, qui n'est point l'unique.

Pour démontrer le théorème 4 nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 3. *Soit*

i) $f(z)$ *holomorphe pour* $|z| < R$, $R > 1$;

ii) $|f(z)| \leqslant 1$ *pour* $|z| \leqslant 1$

et soit

$$f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu.$$

Alors

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = O(n) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Remarquons que pour établir le théorème d'inclusion, il suffit de montrer que $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = o(\delta^n)$ pour chaque $\delta > 1$. Cette évaluation grossière est connue [6, IV **176**]. Toutefois, l'évaluation plus précise donnée dans ce lemme est intéressante en soi, sa démonstration étant très simple.

Remarquons enfin que ce lemme peut être obtenu immédiatement du théorème suivant: La fonction $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ soit holomorphe pour $|z|\leqslant 1$. Alors [8, p. 159].

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(e^{it})|\, dt.$$

D é m o n s t r a t i o n du lemme 3. Soit α un nombre positif quelconque et $M(r)=\operatorname{Max}|f(z)|$ pour $|z|=r$. En appliquant l'inégalité de Cauchy à la fonction $f^n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^{\nu}$, on obtient

$$|a_{n\nu}| \leqslant M^n(r)\, r^{-\nu} = r^{\alpha n-\nu}\,[r^{-\alpha} M(r)]^n \quad \text{pour chaque} \quad r<R. \tag{22}$$

D'après le théorème de Hadamard, $\log M(r)$ est une fonction covexe de $\log r$ et par conséquent

$$r^{-\alpha} M(r) = 1 + O(r-1), \quad r\to 1. \tag{23}$$

Posons, à présent,

$$r=\begin{cases} 1-n^{-1} & \text{pour} \quad \nu\leqslant \alpha n, \\ 1+n^{-1} & \text{pour} \quad \nu>\alpha n, \end{cases}$$

alors, pour $n\geqslant N>(R-1)^{-1}$, on obtient d'après (22) et (23)

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| &= \sum_{\nu\leqq\alpha n} |a_{n\nu}| + \sum_{\nu>\alpha n} |a_{n\nu}| \leqslant \\
&\leqslant [1+O(n^{-1})]^n \left\{ \sum_{\nu\leqq\alpha n} (1-n^{-1})^{\alpha n-\nu} + \sum_{\nu>\alpha n} (1+n^{-1})^{\alpha n-\nu} \right\} \leqslant \\
&\leqslant O(1) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (1-n^{-1})^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (1+n^{-1})^{-\nu} \right\} = \\
&\leqslant O(1)(2n+1) = \\
&\leqslant O(n), \quad n\to\infty .
\end{aligned}$$

Démonstration du théorème 4. Supposons les conditions du théorème satisfaites et introduisons les notations suivantes

$$f^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu, \quad g^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} z^\nu, \quad h^n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} z^\nu;$$

$$T_1 = [a_{n\nu}], \quad T_2 = [b_{n\nu}], \quad T_3 = [c_{n\nu}].$$

Puisque $h(f(z)) = g(z)$, on a $h^n(f(z)) = g^n(z)$ et par suite

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} \sum_{m=0}^{\infty} a_{\nu m} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} z^m;$$

ainsi, en vertu du théorème de Weierstrass sur les séries doubles, on aura

$$b_{nm} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} a_{\nu m};$$

donc

$$T_3 T_1 = T_2.$$

Du fait que la suite s_n est sommable (E, f) vers s, et que le procédé (E, h) est permanent, il résulte que $T_3(T_1 s_n) \to s$. Il s'agit d'en déduire que la suite s_n est de même sommable (E, g) vers s, c'est-à-dire que $T_2 s_n = (T_3 T_1) s_n \to s$. Pour cela il suffit de montrer que $T_3(T_1 s_n) = (T_3 T_1) s_n$, c'est-à-dire que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n\nu} a_{\nu m} s_m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} a_{\nu m} s_m. \tag{24}$$

À cet effet appliquons à la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} \sum_{m=0}^{\infty} a_{\nu m} s_m z^m$$

le théorème de Weierstrass sur les séries doubles. Si l'on parvient à démontrer que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{\nu m} s_m z^m = f_\nu(z)$$

est convergente pour $|z| \leqslant 1+\delta$, $\delta > 0$ et que la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu} f_\nu(z)$ est uniformément convergente pour $|z| \leqslant 1+\delta$, alors l'échangement de l'ordre de sommation dans (24) sera permis.

Soit $r<R$ et $M(r)<R'$; on peut choisir $\delta>0$ et r_2 tel que $(1+\delta)\,r=$ $=r_1<r_2<R$ et que

$$M(r_2)<R'. \tag{25}$$

Alors, pour $|z|\leqslant 1+\delta$,

$$\sum_{m=0}^{\infty}|a_{\nu m}|\,|s_m|\,|z|^m\leqslant K\sum_{m=0}^{\infty}|a_{\nu m}|\,r^m(1+\delta)^m= \tag{26}$$

$$\leqslant K\sum_{m=0}^{\infty}|a_{\nu m}|\,r_1^m<\infty,$$

car les séries $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_{1\nu}z^{\nu}$, $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}z^{\nu}$ et $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\,z^{\nu}$ ont le même rayon de convergence. Donc, les séries définissant $f_\nu(z)$ sont convergentes pour $|z|\leqslant 1+\delta$.

D'autre part, d'après (26), on a

$$|f_\nu(z)|\leqslant K\sum_{m=0}^{\infty}|a_{\nu m}|\,r_1^m,\quad |z|\leqslant 1+\delta. \tag{27}$$

En appliquant à la fonction $f(r_1 z)/M(r_1)$ le lemme 3, on trouve

$$\sum_{m=0}^{\infty}|a_{\nu m}|\,r_1^m\leqslant L\,\nu\,M^{\nu}(r_1)$$

et par suite on a $\sum\limits_{m=0}^{\infty}|a_{\nu m}|\,r_1^m\leqslant L\,M^{\nu}(r_2)$ pour ν supérieur à un certain ν_0.

On obtient alors de (27)

$$|f_\nu(z)|\leqslant K\,L\,M^{\nu}(r_2),\qquad |z|\leqslant 1+\delta,\ \nu>\nu_0,$$

de sorte que, la série $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}|c_{n\nu}|\,M^{\nu}(r_2)$ étant, d'après (25), convergente, la série $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}c_{n\nu}f_\nu(z)$ est uniformément convergente pour $|z|\leqslant 1+\delta$ et le théorème se trouve ainsi démontré.

5. Dans ce chapitre nous appliquerons les théorèmes précédents à la classe des procédés de sommations introduite par Karamata, c'est-à-dire aux procédés de sommations (E, f) qui correspondent aux fonctions $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c et d sont des nombres réels.

Etant donné que $f(z)$ n'a qu'un pôle, pour que la série de $f(z)$ soit absolument convergente pour $|z| = 1$, ce qui est nécessaire pour la permanence du procédé de sommation correspondant, ce pôle doit se trouver en dehors du cercle-unité. Il s'en suit que les conditions $d \neq 0$ et $f(1) = 1$, c'est-à-dire $a+b = c+d$, sont nécessaires pour la permanence. Ainsi, étant limités aux procédés permanents, nous pouvons réduire les quatre paramètres a, b, c, d à deux paramètres indépendants et écrire $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \frac{\alpha + (1-\alpha-\beta) z}{1-\beta z}.$$

En désignant par $E(\alpha, \beta)$ le procédé correspondant, on obtient pour ce procédé les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 5. *Pour que le procédé de sommabilité $E(\alpha, \beta)$ soit permanent, il faut et il suffit que*

$$\alpha < 1,\ \beta < 1,\ \alpha + \beta > 0,$$

à moins que

$$\alpha = \beta = 0.$$

THÉORÈME 6. *Soient $E(\alpha, \beta)$ et $E(\alpha', \beta')$ deux procédés permanents. Si*

$$\text{i)}\quad \alpha' + \beta' - \alpha'\beta > \alpha + \beta - \alpha\beta',$$

$$\text{ii)}\quad 1 > \alpha + \beta - \alpha\beta',$$

$$\text{iii)}\quad s_n = O(r^n)$$

où

$$r < 1/|\beta|, \operatorname{Max}\left\{\frac{\alpha + (1-\alpha-\beta) r}{1-\beta r}, \frac{(1-\alpha-\beta) r-\alpha}{1+\beta r}\right\} < \frac{1-\alpha-\beta+\alpha\beta'}{|\beta'-\beta|}$$

alors de

$$E(\alpha, \beta) - \lim s_n = s$$

if s'ensuit que

$$E(\alpha', \beta') - \lim s_n = s.$$

D é m o n s t r a t i o n du théorème 5. 1° Les conditions sont suffisantes.

Si $\alpha=\beta=0$, la fonction $f(z)$ se réduit a z et le procédé correspondant à la convergence.

Dans le second cas, puisque $\beta<1$ et $\beta>-\alpha>-1$, la fonction $f(z)$ est holomorphe pour $|z|\leqslant 1$, et comme $f(1)=1$, les conditions i) et iii) du théorème 1 sont satisfaites. Puisque $\alpha<1$ et $\alpha+\beta>0$, on a $2\alpha+\beta-1<1+\beta$ et $-2\alpha-\beta+1<1+\beta$, de sorte que $|f(-1)|<1$. Par suite $|f(z)|<1$ en tous les points du cercle-unité, excepté pour $z=1$ car l'ensemble de points z pour lesquels $|f(z)|=1$ est ou bien le demi-plan $\Re z\leqslant 1$, ou bien le cercle passant par le point $z=1$, dont le centre est situé sur l'axe réel et qui contient le point $z=-1$ puisque $|f(-1)|<1$. Ainsi, la condition ii) du théorème 1 est bien satisfaite. Comme

$$f'(1)=\frac{1-\alpha}{1-\beta},\quad f''(1)=\frac{2\beta(1-\alpha)}{(1-\beta)^2},$$

in résulte de $\alpha<1$, $\alpha+\beta>0$ et de (4) que la condition iv) du théorème 1 est de même satisfaite.

2° Les conditions sont nécessaires.

D'après les deux premières conditions de Toeplitz-Schur, $f(z)$ ne peut se réduire à une constante, donc $\alpha\neq 1$ et $\beta\neq 1$.

Comme nous avons déjà mentionné, la fonction $f(z)$ doit être holomorphe pour $|z|\leqslant 1$. Donc $|\beta|<1$ et l'on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\geqslant\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}a_{n\nu}\right|=|f(-1)|^n=\left|\frac{2\alpha+\beta-1}{1+\beta}\right|^n.$$

De $\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|=O(1)$, $n\to\infty$, il s'ensuit que $|f(-1)|\leqslant 1$, donc

$|2\alpha+\beta-1|\leqslant 1+\beta$, ce qui donne $\alpha<1$ et $\alpha+\beta\geqslant 0$.

Si $\alpha+\beta=0$, on aura ou bien $\alpha=0$ et $\beta=0$ et le procédé correspondant est permanent, ou bien $\alpha\neq 0$, c'est-à-dire $f(z)=\dfrac{z+\alpha}{1+\alpha z}$, et le procédé correspondant, d'après le théorème 3, n'est pas permanent. Par conséquent, il faut que l'on ait ou bien $\alpha=\beta=0$, ou bien $\alpha+\beta>0$.

Démonstration du théorème 6.

De $\varphi(z)=\dfrac{\alpha+(1-\alpha-\beta)z}{1-\beta z}$ il résulte $\varphi^{-1}(z)=\dfrac{z-\alpha}{1-\alpha-\beta+\beta z}$, d'où l'on a

$$(28) \qquad \varphi''(z) = \varphi'(\varphi^{-1}(z)) = \frac{\alpha' - \alpha + \alpha\beta' - \alpha'\beta + (1 - \alpha' - \beta' + \alpha'\beta) z}{1 - \alpha - \beta + \alpha\beta' - (\beta' - \beta) z}.$$

En posant

$$\varphi''(z) = \frac{\alpha'' + (1 - \alpha'' - \beta'') z}{1 - \beta'' z},$$

on aura

$$\alpha'' = \frac{\alpha' - \alpha + \alpha\beta' - \alpha'\beta}{1 - \alpha - \beta + \alpha\beta'}, \quad \beta'' = \frac{\beta' - \beta}{1 - \alpha - \beta + \alpha\beta'}.$$

D'après le théorème 5, les conditions nécessaires et suffisantes pour que $E(\alpha'', \beta'')$ soit un procédé permanent sont, ou bien $\alpha'' = \beta'' = 0$, ce qui est, à cause de $\beta < 1$, équivalent à $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ ou bien

$$\frac{\alpha' - \alpha + \alpha\beta' - \alpha'\beta}{1 - \alpha - \beta + \alpha\beta'} < 1, \quad \frac{\beta' - \beta}{1 - \alpha - \beta + \alpha\beta'} < 1,$$

$$\frac{\alpha' + \beta' - \alpha - \beta + \alpha\beta' - \alpha'\beta}{1 - \alpha - \beta + \alpha\beta'} > 0.$$

Or, puisque les fonctions $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ satisfont aux conditions du théorème 5, les trois dernières inégalités se réduisent aux deux inégalités suivantes

$$\alpha' + \beta' - \alpha'\beta > \alpha + \beta - \alpha\beta', \quad 1 > \alpha + \beta - \alpha\beta'.$$

Donc, la condition i) du théorème 4 est satisfaite.

Pour montrer qu'il en est de même pour la condition ii) remarquons que la fonction $\varphi(z)$ est holomorphe pour $|z| < 1/|\beta|$ et que, d'après (28), la fonction $\varphi''(z)$ l'est pour $|z| < \dfrac{1 - \alpha - \beta + \alpha\beta'}{|\beta' - \beta|}$. D'autre part, pour $|z| < r$, $1 \leqslant r < 1/|\beta|$, Max $|\varphi(z)|$ est égal à $\dfrac{\alpha + (1 - \alpha - \beta) r}{1 - \beta r}$ ou à $\dfrac{(1 - \alpha - \beta) r - \alpha}{1 + \beta r}$ suivant que $\alpha + \beta(1 - \alpha - \beta) r^2 \geqslant 0$ ou < 0, ce qui peut être montré par un calçul assez simple. Il s'ensuit, en vertu de l'hypothèse sur le comportement de la suite s_n, que la condition ii) du téorème 4 est bien satisfaite.

(Reçu le 11 janvier 1956)

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Bieberbach — Lehrbuch der Funktionentheorie, Band II. New York 1945.

[2] D. Gaier — On modified Borel methods. *Proceedings of the American Mathematical Society.* **6** (1955), 873–879

[3] G. H. Hardy — Divergent series. Oxford 1949.

[4] J. Карамата — О једној класи поступака збирљивости. *Зборник радова Мат. инст. САН.* (à paraître)

[5] W. Meyer–König — Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. *Math. Z.* **52** (1949), 257—304.

[6] G. Pólya und G. Szegö — Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis, zweiter Band. Springer 1954.

[7] J. Sonnenschein — Sur les séries divergentes. *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci.* (5) **35** (1949), 594–601.

[8] A. Zygmund — Trigonometrical series. New York 1952.