ÜBER SUMMIERBARKEIT VON ORTHOGONALENTWICKLUNGEN STETIGER FUNKTIONEN*)

Von

S. ALJANČIĆ (Beograd)

ZUSAMMENFASSUNG. — Notwendige und hinreichende Bedingungen damit ein zeileninfinites Summationsverfahren die Orthogonalentwicklung einer jeden stetigen Funktion gegen ihren Wert summiert.

1. *EINLEITUNG UND RESULTATE.* Die unendliche Matrix

$$\| \lambda_{\nu,\mu} \| \quad (\nu, \mu = 0, 1, \ldots)$$

deren Elemente reelle Zahlen sind, definiert ein Summationsverfahren (Λ) der unendlichen Reihe $\sum_0^\infty u_\nu$, wenn alle Reihen

$$\Lambda_\mu \overset{def}{=\!=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu,\mu} u_\nu \quad (\mu = 0, 1, \ldots)$$

konvergieren und der Grenzwert

$$\Lambda = \lim_{\mu=\infty} \Lambda_\mu$$

existiert. Λ ist die (Λ)—Summe der Reihe $\sum_0^\infty u_\nu$. Im Falle, dass jede Zeile der Matrix nur endlich viele Elemente besitzt, nennt man das Summationsverfahren zeilenfinit sonst zeileninfinit.

Das Summationsverfahren (Λ) ist permanent wenn es jede konvergente Reihe zu ihrem Wert (im Sinne der Konvergenz) summiert. Dafür ist nach dem Toeplitz-Schurschen Satze (s.z.B. Szász [7]) notwendig und hinreichend, dass

$$1^0 \quad \lambda_{\nu,\mu} \to 1, \quad \mu \to \infty, \quad \text{für jedes } \nu = 0, 1, \ldots;$$

$$2^0 \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |\lambda_{\nu,\mu} - \lambda_{\nu+1,\mu}| = O(1), \quad \mu \to \infty.$$

---

*) Mitgeteilt auf dem IV. Österreichischen Mathematikerkongress (Wien, September 1956).

Wir befassen uns hier mit der (Λ)-Summierbarkeit orthogonaler Entwicklungen stetiger Funktionen.

Es sei $f(x)$ stetig in $[a, b]$ $(f(x) \in C)$, $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein orthonormiertes System von Funktionen in $[a, b]$ und

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x) \tag{1}$$

die Orthogonalentwicklung von $f(x)$ nach dem System $\{\varphi_\nu(x)\}$, d.h.

$$c_\nu = \int_a^b f(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt.$$

Wir sagen das Summationsverfahren (Λ) ist *F-permanent in Bezug auf das orthonormierte System* $\{\varphi_\nu(x)\}$, kürzer F_φ*-permanent*, wenn es die Orthogonalentwicklung nach dem System $\{\varphi_\nu(x)\}$ einer jeden stetigen Funktion $f(x)$ gegen den Wert dieser Funktion gleichmässig summiert, d. h. wenn für jedes $f(x) \in C$

$$\Lambda_\mu(f; x) \stackrel{def}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu,\mu}\, c_\nu\, \varphi_\nu(x) \to f(x), \quad \mu \to \infty, \tag{2}$$

gleichmässig in $[a, b]$. Satz 2 gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die F_φ-Permanenz des Summationsverfahrens (Λ). Den Fall wenn $\{\varphi_\nu(x)\}$ das trigonometrische System ist haben bereits Karamata und Tomić [4] behandelt.

F_φ-permanente Summationsverfahren sind mit denjenigen die im Toeplitz-Schurschen (TS) Sinne permanent sind nicht vergleichbar. So ist bei Fourierschen Reihen (im engeren Sinne) das Lebesguesche Summationsverfahren F-permanent (in Bezug auf das trigonometrische System) aber nicht TS-permanent (Karamata und Tomić [4]). Anderseits ist das Borelsche Summationsverfahren TS- aber nicht F-permanent (Moore [5]).

Bereits Steinhaus ([6]; [3] S. 183) gab notwendige und hinreichende Bedingungen an, unter welchen ein zeilenfinites TS-permanentes Summationsverfahren die Orthogonalentwicklung einer jeden stetigen Funktion gegen ihren Wert gleichmässig summiert. In unseren Betrachtungen begrenzen wir uns a priori nicht nur auf TS-permanente sondern lassen alle möglichen (z. B. auch das Lebesguesche) Verfahren zu. Anderseits legen wir das Gewicht auf zeileninfinite Summationsverfahren; dies erfordert beim ersten Schritt die Konvergenz der Reihen (2) durch welche das Verfahren definiert ist, also die Beantwortung der Frage nach den Konvergenzfaktoren der Orthogonalentwicklung einer jeden stetigen Funktion. Diesem Problem ist Satz 1 gewidmet.

SATZ 1. *Es sei* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *ein in* $[a, b]$ *orthonormiertes System das in Bezug auf C abgeschlossen ist. Damit* $\{\lambda_\nu\}$ *eine Folge gleichmässiger Konvergenzfaktoren der Entwicklung* (1) *sei, d. h. damit für jedes* $f(x) \in C$ *die Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu c_\nu \varphi_\nu(x) \tag{3}$$

in $[a, b]$ *gleichmässig konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dass*

$$\int_a^b |K_n(t; x)|\, dt < M \tag{4}$$

(mit n- und x-freien M) gilt, wo

$$K_n(t; x) \overset{def}{=} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \varphi_\nu(t) \varphi_\nu(x)$$

gesetzt ist.

Dann existiert eine Indexfolge $n_i \to \infty$ $(i \to \infty)$ *so dass*

$$\bar{K}_{n_i}(t; x) \overset{def}{=} \int_a^t K_{n_i}(\tau; x)\, d\tau \to \bar{K}\, t; x), \quad i \to \infty,$$

mit $\bar{K}(t; x)$ *von beschränkter Totalvariation in Bezug auf t, und es gilt die Representation*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu c_\nu \varphi_\nu(x) = \int_a^b f(t)\, d_t \bar{K}(t; x) \tag{5}$$

gleichmässig $[a, b]$.

Der erwähnte Satz über die (Λ)-Summierbarkeit lautet:

SATZ 2. *Es sei* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *ein in* $[a, b]$ *orthonormiertes System mit* $|\varphi_\nu(x)| < N_\nu$ (N_ν *von x unabhängig). Damit das Summationsverfahren* (Λ) F_φ*-permanent sei, ist notwendig und hinreichend, dass*

1° $\{\varphi_\nu(x)\}$ *in Bezug auf C abgeschlossen ist;* (6)

2° *die Funktionenfolge*

$$K_{n,\mu}(t; x) \overset{def}{=} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_{\nu,\mu} \varphi_\nu(t) \varphi_\nu(x) \quad (\mu = 0, 1, \ldots) \tag{7}$$

die Ungleichungen

$$\int_a^b |K_{n,\mu}(t;x)|\,dt < M_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots) \tag{8}$$

(mit n- und x-freien M) befriedigt;

3° *die Totalvariation aller laut* (8) *stets existierenden Funktionen*

$$\overline{K}_\mu(t;x) \overset{def}{=} \lim_{n_i^{(\mu)}=\infty} \overline{K}_{n_i^{(\mu)},\mu}(t;x) \overset{def}{=} \lim_{n_i^{(\mu)}=\infty} \int_a^t K_{n_i^{(\mu)},\mu}(\tau;x)\,d\tau \tag{9}$$

gleichmässig beschränkt ist, d. h.

$$\int_a^b |d_t \overline{K}_\mu(t;x)| < M \tag{10}$$

(mit μ*- und x-freien M) gilt;*

4° $\lambda_{\nu,\mu} \to 1$, $\mu \to \infty$, *für jedes* $\nu = 0, 1, \ldots$ (11)

2. *BEWEIS DES SATZES* 1. (i) Es sei

$$s_n(f;x) \overset{def}{=} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu c_\nu \varphi_\nu(x) = \\ = \int_a^b f(t)\,K_n(t;x)\,dt.$$

Die Bedingung (4) ist notwendig, denn wenn sie nicht erfüllt wäre, hätte man eine Indexfolge $\{m_i\}$ und eine Punktfolge $\{x_i\}$, so dass

$$\limsup_{i=\infty} \int_a^b |K_{m_i}(t;x_i)|\,dt = +\infty.$$

Nach einem Banach-Steinhausschen Satze ([2]; [3] S. 20 oder [1] S. 80) gäbe es dann eine stetige Funktion $f(x)$ mit

$$\limsup_{i=\infty} \int_a^b f(t)\;K_{m_i}(t;x_i)\,dt = +\infty,$$

was mit der gleichmässigen Konvergenz der Folge $\{s_n(f; x)\}$ (bzw. der Reihe (3)) in Widerspruch wäre.

(ii) Die Bedingung (4) ist hinreichend. Es sei $\varepsilon > 0$. Aus der Abgeschlossenheit des Systems $\{\varphi_\nu(x)\}$ in Bezug auf C folgt, dass man jede stetige Funktion $f(x)$ durch eine passende lineäre Kombination der $\varphi_\nu(x)$,

$$g(x) = \sum_{\kappa=0}^{k} \gamma_\kappa \varphi_\kappa(x),$$

beliebig nahe gleichmässig approximieren kann, d.h.

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{in} \quad [a, b]. \tag{12}$$

Anderseits ist wegen der Orthogonalität des Systems $\{\varphi_\nu(x)\}$ für jedes ganzzahlige $p > k$

$$\int_a^b g(t) K_p(t; x)\, dt = \sum_{\kappa=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{p} \gamma_\kappa \lambda_\nu \varphi_\nu(x) \int_a^b \varphi_\kappa(t) \varphi_\nu(t)\, dt =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{k} \gamma_\kappa \lambda_\kappa \varphi_\kappa(x).$$

Demnach, ist für $m > n > k$

$$s_n(f; x) - s_m(f; x) = \int_a^b \{f(t) - g(t)\} \, \{K_n(t; x) - K_m(t; x)\}\, dt,$$

also mit Rücksicht auf (12) und (4)

$$|s_n(f; x) - s_m(f; x)| < 2M\varepsilon,$$

d.h. die Folge $\{s_n(f; x)\}$ (bzw. Reihe (3)) ist in $[a, b]$ gleichmässig konvergent.

(iii) Um die zweite Hälfte des Satzes 1 zu beweisen, bemerken wir, dass nach (4) die Folge $\{\overline{K}_n(t; x)\}$ von gleichmässig beschränkter Totalvariation (in Bezug auf t) und, wegen $\overline{K}_n(a; x) = 0$, auch gleichmässig beschränkt ist. Nach einem Hellyschen Satze gibt es eine Indexfolge $n_i \to \infty$ für welche

$$\overline{K}_{n_i}(t; x) \to \overline{K}(t; x), \quad n_i \to \infty, \tag{13}$$

mit $\bar{K}(t;x)$ von beschränkter Totalvariation in Bezug auf t. Nach einem anderen Satze von Helly folgt aus (4) und (13)

$$s_{n_i}(f;x) \to \int_a^b f(t)\, d_t \bar{K}(t;x)$$

für jedes $f(x) \in C$. Da wir die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{n=\infty} s_n(f;x)$, und zwar gleichmässig in $[a,b]$, bereits bewiesen haben, so folgt

$$s_n(f;x) \to \int_a^b f(t)\, d_t \bar{K}(t;x),$$

d.h. die Representation (5).

Wir bemerken dass $\bar{K}_n(t;x)$ die n-te Partialsumme der Orthogonalentwicklung (in Bezug auf x)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu \Phi_\nu(t)\, \varphi_\nu(x) \qquad \left(\Phi_\nu(t) = \int_a^t \varphi_\nu(\tau)\, d\tau\right)$$

von $\bar{K}(t;x)$ ist. Da, nähmlich, die Folge $\{\bar{K}_n(t;x)\}$ gleichmässig beschränkt ist, ist auf Grund des Lebesgueschen Satzes

$$\int_a^b \bar{K}(t;x)\, \varphi_\kappa(x)\, dx = \int_a^b \left\{\lim_{n_i=\infty} \bar{K}_{n_i}(t;x)\right\} \varphi_\kappa(x)\, dx =$$

$$= \lim_{n_i=\infty} \int_a^b \bar{K}_{n_i}(t;x)\, \varphi_\kappa(x)\, dx =$$

$$= \lim_{n_i=\infty} \sum_{\nu=0}^{n_i} \lambda_\nu \Phi_\nu(t) \int_a^b \varphi_\nu(x)\, \varphi_\kappa(x)\, dx =$$

$$= \lambda_\kappa \Phi_\kappa(t).$$

3. *BEWEIS DES SATZES* 2. Damit alle Reihen (2), welche das Summationsverfahren (Λ) definieren, konvergent seien, d.h. damit für jedes fixierte $\mu = 0, 1, \ldots$ die Folge $\lambda_{\nu,\mu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ eine Folge gleichmässiger Konvergenzfaktoren der Entwicklung (1) sei, ist nach Satz 1 die Bedingung

(8) notwendig und hinreichend. Anderseits, auf Grund des Satzes 1, Formel (5), besteht folgende Representation

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(f; x) &= \lim_{n=\infty} \int_a^b f(t)\, K_{n,\mu}(t; x)\, dt \\ &= \int_a^b f(t)\, d_t \overline{K}_\mu(t; x), \end{aligned} \tag{14}$$

wo $\overline{K}_\mu(t; x)$ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ durch (9) erklärt und von beschränkter Totalvariation (in Bezug auf t) sind.

Die Bedingung (6) ist notwendig. Nähmlich, wenn $\Lambda_\mu(f; x) \to f(x)$, gleichmässig in $[a, b]$, jedem $\varepsilon > 0$ kann man zuerst ein x-freies μ_0 so zuordnen, dass

$$| f(x) - \Lambda_{\mu_0}(f; x) | < \varepsilon.$$

Wegen der gleichmässigen Konvergenz der Reihe

$$\Lambda_{\mu_0}(f; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu,\mu_0} c_\nu \varphi_\nu(x),$$

besteht dann ein x-freies ν_0, so dass

$$\left| \Lambda_{\mu_0}(f; x) - \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \lambda_{\nu,\mu_0} c_\nu \varphi_\nu(x) \right| < \varepsilon.$$

Man erhält also

$$\left| f(x) - \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \lambda_{\nu,\mu_0} c_\nu \varphi_\nu(x) \right| < 2\varepsilon,$$

d.h. das System $\{\varphi_\nu(x)\}$ ist in Bezug auf C abgeschlossen.

Dass (10) notwendig ist folgt wieder auf Grund des Banach-Steinhausschen Satzes, ähnlich wie bei dem Beweise des Satzes 1. Wäre, nähmlich, (10) nicht erfüllt, man hätte eine Indexfolge $\{\mu_j\}$ und eine Punkfolge $\{x_j\}$, so dass

$$\limsup_{j=\infty} \int_a^b | d_t \overline{K}_{\mu_j}(t; x_j) | = +\infty.$$

Es gäbe, also, eine stetige Funktion $f(x)$ mit

$$\limsup_{j=\infty} \int_a^b f(t)\, d_t \overline{K}_{\mu_j}(t; x_j) = +\infty,$$

was auf Grund von (14) mit der gleichmässigen Konvergenz der Folge $\{\Lambda_\mu(f; x)\}$ für jedes $f(x) \in C$ unverträglich ist.

Wir zeigen nun dass die Bedingungen (6), (10) und (11) für die gleichmässige Konvergenz von $\{\Lambda_\mu(f; x)\}$ hinreichend sind. $g(x)$ habe dieselbe Bedeutung wie bei dem Beweise des Satzes 1. Nach (14) ist dann

$$\Lambda_{\mu'}(f; x)-\Lambda_{\mu''}(f; x)=\int_a^b\{f(t)-g(t)\}\,d_t\overline{K}_{\mu'}(t; x)-$$

$$-\int_a^b\{f(t)-g(t)\}\,d_t\overline{K}_{\mu''}(t; x)+$$

$$+\sum_{\kappa=0}^{k}\{\lambda_{\kappa,\mu'}-\lambda_{\kappa,\mu''}\}\,\varphi_\kappa(x),$$

da auf Grund von (14) und der Orthogonalität des Systems $\{\varphi_\nu(x)\}$ zufolge

$$\Lambda_\mu(g; x)=\lim_{n=\infty}\int_a^b g(t)\,K_{n,\mu}(t; x)\,dt=$$

$$=\lim_{n=\infty}\sum_{\kappa=0}^{k}\sum_{\nu=0}^{n}\gamma_\kappa\,\lambda_{\nu,\mu}\,\varphi_\nu(x)\int_a^b\varphi_\kappa(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt=$$

$$=\sum_{\kappa=0}^{k}\gamma_\kappa\,\lambda_{\kappa,\mu}\,\varphi_\kappa(x).$$

Es ist also mit Rücksicht auf (6) und (10) und wegen $|\varphi_\kappa(x)|<N_\kappa$

$$|\Lambda_{\mu'}(f; x)-\Lambda_{\mu''}(f; x)|\leqslant 2M\varepsilon+\sum_{\kappa=0}^{k}|\lambda_{\kappa,\mu'}-\lambda_{\kappa,\mu''}|\,N_\kappa,$$

und nach (11) folgt daraus die gleichmässige Konvergenz der Folge $\{\Lambda_\mu(f; x)\}$. Damit diese gegen $f(x)$ konvergiere, ist $\lambda_{\nu,\mu}\to 1$, $\mu\to\infty$, notwendig. Es besteht, nähmlich, ähnlich wie bei dem Beweis des Satzes 1, Teil (iii), eine Indexfolge $\{\mu_j\}$, so dass

$$\overline{K}_{\mu_j}(t; x)\to\overline{\overline{K}}(t; x),$$

mit $\overline{\overline{K}}(t; x)$ von beschränkter Totalvariation in Bezung auf t und es gilt

$$\lim_{\mu=\infty}\Lambda_\mu(f; x)=\int_a^b f(t)\,d_t\overline{\overline{K}}(t; x).$$

Damit das letztaufgeschriebene Integral dleich $f(x)$ sei, ist notwendig, dass

$$\overline{\overline{K}}(t;x)=\begin{cases}0, & t\leqslant x,\\ 1, & t>x,\end{cases}\tag{15}$$

was mit $\lambda_{\nu,\mu}\to 1$, $\mu\to\infty$, äquivalent ist. Wendet man, nähmlich, den Lebesgueshen Satz zweimal auf die nach (10) und $\overline{K}_\mu(a,x)=0$ bzw. nach (8) und $K_{n,\mu}(a,x)=0$ gleichmässig beschränkten Folgen $\{\overline{K}_\mu(t;x)\}$ $(\mu=0,1,\ldots)$ und $\{\overline{K}_{n,\mu}(t;x)\}$ $(n=0,1,\ldots;\ \mu$ fixiert), erhält man

$$\int_a^b \overline{\overline{K}}(t;x)\,\varphi_\kappa(x)\,dx=\int_a^b \lim_{\mu_j=\infty}\overline{K}_{\mu_j}(t;x)\,\varphi_\kappa(x)\,dx=$$

$$=\lim_{\mu_j=\infty}\int_a^b \overline{K}_{\mu_j}(t;x)\,\varphi_\kappa(x)\,dx=$$

$$=\lim_{\mu_j=\infty}\int_a^b \lim_{n_i^{(\mu_j)}=\infty}\overline{K}_{n_i^{(\mu_j)},\mu_j}(t;x)\,\varphi_\kappa(x)\,dx=$$

$$=\lim_{\mu_j=\infty}\lim_{n_i^{(\mu_j)}=\infty}\int_a^b \overline{K}_{n_i^{(\mu_j)},\mu_j}(t;x)\,\varphi_\kappa(x)\,dx=$$

$$=\lim_{\mu_j=\infty}\lim_{n_i^{(\mu_j)}=\infty}\sum_{\nu=0}^{n_i^{(\mu_j)}}\lambda_{\nu,\mu_j}\int_a^t\varphi_\nu(\tau)\,d\tau\cdot\int_a^b\varphi_\nu(x)\,\varphi_\kappa(x)\,dx=$$

$$=\lim_{\mu_j=\infty}\lambda_{\kappa,\mu_j}\cdot\int_a^t\varphi_\kappa(\tau)\,d\tau=\lim_{\mu=\infty}\lambda_{\kappa,\mu}\cdot\int_a^t\varphi_\kappa(\tau)\,d\tau,$$

woraus, mit Rücksicht auf (15),

$$\lim_{\mu=\infty}\lambda_{\kappa,\mu}=\frac{\int_a^b \overline{\overline{K}}(t;x)\,\varphi_\kappa(x)\,dx}{\int_a^t\varphi_\kappa(\tau)\,d\tau}=1$$

folgt.

(Eingegangen am 11. Juli 1956)

LITERATUR

[1] Banach, S. — Théorie des opérations linéaires, *Monografje Matematyczne* 1, Warszawa 1932.

[2] Banach, S. et Steinhaus, H. — Sur le principe de la condensation de singularités, *Fundamenta Mathematicae* **9** (1927), 50—61.

[3] Kacmarsz, S. und Steinhaus, H. — Theorie der Orthogonalreihen, *Monografje Matematyczne* 6, Warszawa 1935.

[4] Karamata, J. et Tomić, M. — Sur la sommation des séries de Fourier des fonctions continues, *Publ. Inst. Math. Ac. Serbe Sc.* **8** (1955), 123—138.

[5] Moore, C. N. — On the application of Borel's method to the summation of Fourier series, *Proc. Nat. Ac. Sc.* **11** (1925), 284—287.

[6] Steinhaus, H. — Sur les développements orthogonaux, *Bull. Intern. de l'Ac. Polonaise*, Classe A de Sc. math. et nat., Cracovie (1926), 11—39.

[7] Szász, O. — Introduction to the Theory of Divergent Series, Cincinnati 1952.