ÜBER SUMMIERBARKEITSFAKTOREN UND VERWANDTE FRAGEN BEI CESÀROVERFAHREN II*)

Von

ALEXANDER PEYERIMHOFF (Cincinnati/Ohio)

In den Sätzen des § 6 des ersten Teiles dieser Arbeit durfte der Index α nur ganzzahlig sein. Der Grund für diese Beschränkung ist in der an wesentlicher Stelle verwendeten Formel (4) zu suchen; für nicht ganze p ist (4) offenbar nicht mehr gültig. Es ist der Zweck des vorliegenden zweiten Teiles, die Beschränkung auf ganze α zu beseitigen. Dies erreichen wir, indem wir Verallgemeinerungen von (4) ableiten, die auch für nicht ganze p eine Darstellung von $\Delta^p x_n y_n$ durch Produkte der Differenzen von x_n und y_n gestatten.

In § 7 wird zunächst eine Reihe von Hilfssätzen bewiesen. Diese Ergebnisse dienen dem Beweis eines Satzes der gewünschten Art in § 8. Für unsere Anwendungen reichen Spezialfälle dieses Satzes aus; sie werden in § 9 formuliert. In § 10 werden die erwähnten Erweiterungen der Sätze des § 6 bewiesen. Auf Grund der Sätze 8 - 10 ist damit auch eine Lösung für die in der Einleitung des Teiles I dieser Arbeit genannten Typen von Summierbarkeitsfaktoren gegeben.

Wir weisen darauf hin, dass direkte Beweise für die Sätze des § 9 sich zum Teil erheblich einfacher gestalten als der Beweis des allgemeinen Satzes in § 8. So ergibt sich etwa der Satz 15 unmittelbar aus dem Spezialfall $l = -1$ von Hilfssatz 11 durch Anwendung von Hilfssatz 14 (Satz 15 gibt für $\beta < \alpha$ die gewünschte Erweiterung von Satz 12; wegen Satz 9 ist damit die Frage der $(|C_\alpha|, |C_\beta|)$-Faktoren für $\beta < \alpha$ gelöst).

---

*) Der erste Teil dieser Arbeit erschien im Bd. VIII S. 139–156 dieser Zeitschrift. Die Nummerierung der Sätze, Formeln und Fussnoten erfolgt hier im Anschluss an den ersten Teil, auf den auch bezüglich der Bezeichnungen verwiesen sei. Das Literaturverzeichnis für den zweiten Teil befindet sich am Schluss der vorliegenden Note.

7. HILFSSÄTZE

Wir erwähnen zunächst einige wohlbekannte Eigenschaften der Binomialkoeffizienten. Die hier auftretende Zahl η sei reell.

(58) Für $n \to \infty$ ist $0 \neq A_n^\eta \cong \frac{n^\eta}{\Gamma(\eta+1)}$ $(\eta \neq -1, -2, \dots)$

und $A_n^\eta = O(n^\eta)$.

(59) Für $-1 \leqq \eta \leqq 0$ ist $0 \leqq A_{n+1}^\eta \leqq A_n^\eta$ $(n \geqq 0)$ und somit

$$0 \leqq A_p^\eta - A_q^\eta \leqq A_r^\eta - A_q^\eta \quad (0 \leqq r \leqq p \leqq q).$$

(60) Für ganze Zahlen $\lambda \geqq 0$, $p \geqq 0$ ist

$$A_p^\eta \binom{p}{\lambda} = (-1)^\lambda \binom{-\eta-1}{\lambda} A_{p-\lambda}^{\lambda+\eta}$$

(mit der Festsetzung $A_n^\alpha = 0$ für $n < 0$).

HILFSSATZ 10. *Sind $k \geqq 0$ und $m \geqq n \geqq 0$ ganze Zahlen, so ist*

$$(61) \quad \delta_m = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{m-n}{\lambda} (-1)^\lambda \Delta^\lambda \delta_n + (-1)^k \sum_{\rho=n+1}^{m-k} A_{m-k-\rho}^{k-1} (\Delta^k \delta_\rho - \Delta^k \delta_n).$$

Für $m < n+k+1$ ist die ganz rechts stehende Summe durch 0 zu ersetzen[28].

Beweis. Für $r = -1, 0, 1, 2, \dots$ und $q \geqq n$ ist

$$\sum_{\rho=n}^{q} A_{q-\rho}^{r} (\delta_\rho - \delta_n) = - \sum_{\rho=n}^{q-1} A_{q-1-\rho}^{r+1} \Delta \delta_\rho$$

$$= - \binom{q-n+r+1}{r+2} \Delta \delta_n - \sum_{\rho=n}^{q-1} A_{q-1-\rho}^{r+1} (\Delta \delta_\rho - \Delta \delta_n).$$

(Für $q=n$ sind die rechts stehenden Summen durch 0 zu ersetzen.) Durch k-malige Anwendung dieser Beziehung auf

$$\delta_m = \delta_n + \sum_{\rho=n}^{m} A_{m-\rho}^{-1} (\delta_\rho - \delta_n)$$

folgt (61).

---

[28]) Die Beziehung (61) ist ein Analogon zur Taylorschen Formel

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(x-a)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} (f^{(k)}(t) - f^{(k)}(a))\, dt.$$

Wir werden die Formel (61) später auch im Fall $k=-1$ verwenden. Die erste Summe rechts in (61) ist dann durch 0 zu ersetzen und wir definieren

$$(62)\qquad -\sum_{\rho=n+1}^{m+1} A_{m+1-\rho}^{-2}(\Delta^{-1}\delta_\rho-\Delta^{-1}\delta_n)=\delta_m \qquad (m\geqq n\geqq 0)$$

(dies ist auch formal richtig).

HILFSSATZ 11. *Ist* $\varepsilon_n=O(1)$, $\delta_n=O(1)$, $\alpha>0$, $-1\leqq k\leqq\alpha$, $-1\leqq l\leqq\alpha$, $k+l<\alpha$ *(k, l, ganz), so ist*

$$(63)\qquad \Delta^\alpha\varepsilon_n\delta_n=\sum_{\lambda=0}^{k}\binom{\alpha}{\lambda}\Delta^\lambda\delta_n\,\Delta^{\alpha-\lambda}\varepsilon_{n+\lambda}+\sum_{\mu=0}^{l}\binom{\alpha}{\mu}\Delta^\mu\varepsilon_n\,\Delta^{\alpha-\mu}\delta_{n+\mu}+R_n$$

$$(64)\qquad R_n=(-1)^{k+l}\sum_{m=n}^{\infty}A_{m-n}^{-\alpha-1}\sum_{\rho=n+1}^{m-k}A_{m-k-\rho}^{k-1}(\Delta^k\delta_\rho-\Delta^k\delta_n)\sum_{\sigma=n+1}^{m-l}A_{m-l-\sigma}^{l-1}(\Delta^l\varepsilon_\sigma-\Delta^l\varepsilon_n).$$

Für $k=-1$ *bzw.* $l=-1$ *ist die entsprechende Summe rechts in* (63) *durch* 0 *zu ersetzen. In* (64) *durchläuft m nur solche Werte, die* $\geqq n+k+1$ *und* $\geqq n+l+1$ *sind.*

Beweis. Ersetzt man in der Beziehung

$$\Delta^\alpha\varepsilon_n\delta_n=\sum_{m=n}^{\infty}A_{m-n}^{-\alpha-1}\varepsilon_m\delta_m$$

die Zahlen δ_m durch die rechte Seite von (61), so folgt mit (60) die Beziehung

$$\Delta^\alpha\varepsilon_n\delta_n=\sum_{\lambda=0}^{k}\binom{\alpha}{\lambda}\Delta^\lambda\delta_n\,\Delta^{\alpha-\lambda}\varepsilon_{n+\lambda}+(-1)^k\sum_{m=n}^{\infty}A_{m-n}^{-\alpha-1}\varepsilon_m\sum_{\rho=n+1}^{m-k}A_{m-k-\rho}^{k-1}(\Delta^k\delta_\rho-\Delta^k\delta_n).$$

Ist $l=-1$, so folgt daraus die Behauptung (und dasselbe gilt aus Symmetriegründen, falls $k=-1$ ist). Für $k\geqq 0$ und $l\geqq 0$ folgt aus (60) und (61) weiter

$$(-1)^k\sum_{m=n}^{\infty}A_{m-n}^{-\alpha-1}\varepsilon_m\sum_{\rho=n+1}^{m-k}A_{m-k-\rho}^{k-1}(\Delta^k\delta_\rho-\Delta^k\delta_n)$$

$$=\sum_{m=n}^{\infty}A_{m-n}^{-\alpha-1}\sum_{\mu=0}^{l}\binom{m-n}{\mu}(-1)^\mu\Delta^\mu\varepsilon_n\left(\delta_n-\sum_{\lambda=0}^{k}\binom{m-n}{\lambda}(-1)^\lambda\Delta^\lambda\delta_n\right)$$

$$+(-1)^{k+l}\sum_{m=n}^{\infty}A_{m-n}^{-\alpha-1}\sum_{\rho=n+1}^{m-k}A_{m-k-\rho}^{k-1}(\Delta^k\delta_\rho-\Delta^k\delta_n)\sum_{\sigma=n+1}^{m-l}A_{m-l-\sigma}^{l-1}(\Delta^l\varepsilon_\sigma-\Delta^l\varepsilon_n)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{l} \binom{\alpha}{\mu} \Delta^{\mu} \varepsilon_n \Delta^{\alpha-\mu} \delta_{n+\mu}$$

$$- \sum_{\mu=0}^{l} \sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^{\lambda+\mu} \Delta^{\mu} \varepsilon_n \Delta^{\lambda} \delta_n \sum_{m=n}^{\infty} A_{m-n}^{-\alpha-1} \binom{m-n}{\mu} \binom{m-n}{\lambda} + R_n .$$

Schliesslich ist wegen (60) [24]

$$\sum_{m=n}^{\infty} A_{m-n}^{-\alpha-1} \binom{m-n}{\mu} \binom{m-n}{\lambda} = (-1)^{\mu} \binom{\alpha}{\mu} \sum_{m=n}^{\infty} A_{m-n-\mu}^{\mu-\alpha-1} \binom{m-n}{\lambda}$$

$$= (-1)^{\mu} \binom{\alpha}{\mu} \sum_{0 \leqq \tau \leqq \mathrm{Min}(\mu,\lambda)} \binom{\mu}{\tau} \binom{\alpha-\mu}{\lambda-\tau} (-1)^{\lambda-\tau} \sum_{m=n+(\mu+\lambda)-\tau}^{\infty} A_{m-n-\mu-\lambda+\tau}^{\lambda+\mu-\alpha-1-\tau} = 0$$

(denn es ist $\mu + \lambda \leqq k + l < \alpha$).

HILFSSATZ 12. *Ist* $\delta \neq -2$, $-1 \leqq \eta \leqq 0$ *und* $q > p \geqq 1$ $(p, q$ *ganz*$)$, *so ist für* $p \to \infty$ *und gleichmässig in* q

$$\sum_{\rho=1}^{p} \rho^{\delta} \,|\, A_{q-\rho}^{\eta} - A_q^{\eta} \,| = O(1)\, A_q^{\eta-1} (1 + p^{\delta+2}). \tag{65}$$

Beweis. Für $\eta = 0$ und $\eta = -1$ ist die Behauptung offenbar richtig. Sei nun $-1 < \eta < 0$. Es ist

$$\sum_{\rho=1}^{p} \rho^{\delta} | A_{q-\rho}^{\eta} - A_q^{\eta} | \leqq$$

$$\leqq \sum_{1 \leqq \rho \leqq q/2} \rho^{\delta} | A_{q-\rho}^{\eta} - A_q^{\eta} | + \sum_{q/2 < \rho \leqq q} \rho^{\delta} | A_{q-\rho}^{\eta} - A_q^{\eta} | = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Wegen (58) ist für $1 \leqq \rho \leqq q/2$

$$| A_{q-\rho}^{\eta} - A_q^{\eta} | = O(1) \sum_{\tau=q-\rho+1}^{q} \tau^{\eta-1} = O(1)\, q^{\eta-1} \rho \tag{66}$$

und deshalb

$$\mathrm{I} = O(1)\, q^{\eta-1} \sum_{1 \leqq \rho \leqq q/2} \rho^{\delta+1} = O(1)\, q^{\eta-1} (1 + q^{\delta+2}).$$

---

[24] Für $b \geqq 0$, $p \geqq 0$ $(b, p$ ganz$)$ ist $\binom{a}{b} = \sum_{\tau=0}^{\mathrm{Min}(p,b)} \binom{p}{\tau} \binom{a-p}{b-\tau}$ (Additionstheorem der Binomialkoeffizienten).

Ferner ist

$$\text{II} = O(1)\, q^{\delta} \sum_{q/2 < \rho \leqq q} | A^{\eta}_{q-\rho} - A^{\eta}_{q} | = O(1)\, q^{\delta+\eta+1} = O(1)\, q^{\eta-1}(1+q^{\delta+2}).$$

Ist nun $p < q \leqq 2p$, so folgt aus diesen Abschätzungen die Beziehung (65) (wegen (58)).

Ist $2p < q$, so gilt für $1 \leqq \rho \leqq p$ wegen (66) die Beziehung

$$| A^{\eta}_{q-\rho} - A^{\eta}_{q} | = O(1)\, q^{\eta-1} \rho$$

und dies ergibt unmittelbar die Behauptung.

Die folgenden Hilfssätze dienen der Abschätzung des Restgliedes (64).

HILFSSATZ 13. *Es sei* $\kappa \geqq 0$ *und* $0 \leqq k \leqq \kappa \leqq k+1$, *k ganz. Ist* $\delta_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ *und* $\rho > n \geqq 0$, *so ist*

$$(67) \quad | \Delta^k \delta_\rho - \Delta^k \delta_n | \leqq \sum_{\mu=n}^{\rho-1} A^{\kappa-k-1}_{\mu-n} | \Delta^\kappa \delta_\mu | + \sum_{\mu=\rho}^{\infty} | A^{\kappa-k-1}_{\mu-\rho} - A^{\kappa-k-1}_{\mu-n} | | \Delta^\kappa \delta_\mu |$$

und speziell

$$(68) \quad | \Delta^k \delta_\rho - \Delta^k \delta_n | \leqq A^{\kappa-k}_{\rho-1-n}\, 2 \overline{\underset{\nu \geqq n}{\text{fin}}} | \Delta^\kappa \delta_\nu |.$$

Beweis. Es ist $\Delta^{k+1} \delta_\nu = \Delta^{k+1-\kappa} (\Delta^\kappa \delta_\nu)$ und somit

$$(\Delta^k \delta_n - \Delta^k \delta_\rho) = \sum_{\tau=n}^{\rho-1} \Delta^{k+1} \delta_\tau = \sum_{\tau=n}^{\rho-1} \sum_{\mu=\tau}^{\infty} A^{\kappa-k-2}_{\mu-\tau} \Delta^\kappa \delta_\mu$$

$$= \sum_{\mu=n}^{\rho-1} A^{\kappa-k-1}_{\mu-n} \Delta^\kappa \delta_\mu + \sum_{\mu=\rho}^{\infty} \Delta^\kappa \delta_\mu \, (A^{\kappa-k-1}_{\mu-n} - A^{\kappa-k-1}_{\mu-\rho}).$$

Daraus folgt (67). Wegen $\sum_{\mu=\rho}^{\infty} | A^{\kappa-k-1}_{\mu-\rho} - A^{\kappa-k-1}_{\mu-n} | = A^{\kappa-k}_{\rho-1-n}$ $(k \leqq \kappa < k+1$; beachte (59)) folgt (68) aus (67).

HILFSSATZ 14. *Es sei* $\kappa \geqq 0$ *und* $0 \leqq k \leqq \kappa \leqq k+1$, *k ganz. Ist* $\delta_n = O(1)$ $(n \to \infty)$, $n \geqq 0$ *und* $m \geqq n+k+1$, *so ist*

$$(69) \quad \left| \sum_{\rho=n+1}^{m-k} A^{k-1}_{m-k-\rho} (\Delta^k \delta_\rho - \Delta^k \delta_n) \right| \leqq 2 A^{\kappa}_{m-n-k-1} \overline{\underset{\nu \geqq n}{\text{fin}}} | \Delta^\kappa \delta_\nu |.$$

Beweis. Dies ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen von (68) in die linke Seite von (69).

HILFSSATZ 15. *Es sei* $\kappa \geqq 0$ *und* $0 \leqq k \leqq \kappa \leqq k+1$, k *ganz. Ist* $\delta_n = O(1)$ $(n \to \infty)$, $n \geqq 0$ *und* $m \geqq n+k+1$, *so ist*

$$(70)\qquad \left| \sum_{\rho=n+1}^{m-k} A_{m-k-\rho}^{k-1} (\Delta^k \delta_\rho - \Delta^k \delta_n) \right|$$

$$\leqq C A_{m-n-k-1}^{k} \sum_{\rho=n}^{m-k} |A_{\mu-n}^{\kappa-k-1}|\,|\Delta^\kappa \delta_\mu| + \sum_{\mu=n+1}^{m-k} A_{m-k-\mu}^{k-1} |\Delta^\kappa \delta_\mu|$$

$$+ A_{m-n-k-1}^{k} \sum_{\mu=m-k+1}^{\infty} |\Delta^\kappa \delta_\mu|\,|A_{\mu-(m-k)}^{\kappa-k-1} - A_{\mu-n}^{\kappa-k-1}|.$$

(Dabei hängt die Konstante C nur von k und κ *ab.)*

Beweis. Aus (67) und (59) folgt für $n+1 \leqq \rho \leqq m-k$ die Beziehung

$$|\Delta^k \delta_\rho - \Delta^k \delta_n| \leqq \sum_{\mu=n}^{m-k} |A_{\mu-n}^{\kappa-k-1}|\,|\Delta^\kappa \delta_\mu| + \sum_{\mu=\rho}^{m-k} |A_{\mu-\rho}^{\kappa-k-1}|\,|\Delta^\kappa \delta_\mu|$$

$$+ \sum_{\mu=m-k+1}^{\infty} |A_{\mu-(m-k)}^{\kappa-k-1} - A_{\mu-n}^{\kappa-k-1}|\,|\Delta^\kappa \delta_\mu| = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

Hier sind I und III unabhängig von ρ und es ist

$$\sum_{\rho=n+1}^{m-k} A_{m-k-\rho}^{k-1} (\mathrm{I} + \mathrm{III}) = A_{m-n-k-1}^{k} (\mathrm{I} + \mathrm{III}).$$

Ferner ist

$$\sum_{\rho=n+1}^{m-k} A_{m-k-\rho}^{k-1}\ \mathrm{II} = \sum_{\mu=n+1}^{m-k} |\Delta^\kappa \delta_\mu| \sum_{\rho=n+1}^{\mu} A_{\mu-\rho}^{\kappa-k-1} A_{m-k-\rho}^{k-1}.$$

Nun ist für $n+1 \leqq \mu \leqq m-k$

$$\sum_{\rho=n+1}^{\mu} A_{\mu-\rho}^{\kappa-k-1} A_{m-k-\rho}^{k-1} \leqq K A_{m-n-k-1}^{k} A_{\mu-n}^{\kappa-k-1} + A_{m-k-\mu}^{k-1}$$

(K nur abhängig von κ und k). Für $k=0$ ist dies offenbar richtig und für $k>0$ gilt für $k<\kappa \leqq k+1$ die Beziehung (beachte (58) und (60))

$$\sum_{\rho=n+1}^{\mu} A_{\mu-\rho}^{\kappa-k-1} A_{m-k-\rho}^{k-1} \leqq A_{m-n-k-1}^{k-1} A_{\mu-n-1}^{\kappa-k} = \frac{A_{\mu-n}^{\kappa-k-1}}{\kappa-k} (\mu-n) A_{m-n-k-1}^{k-1}$$

$$\leqq K A_{\mu-n}^{\kappa-k-1} A_{m-n-k-1}^{k}$$

während für $\varkappa = k$

$$\sum_{\rho=n+1}^{\mu} A_{\mu-\rho}^{-1} A_{m-k-\rho}^{k-1} = A_{m-k-\mu}^{k-1}$$

ist.

Einer späteren Anwendung wegen weisen wir noch auf eine Folgerung aus (70) hin. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz* 15 *gilt für jedes* $n-1 \leqq r \leqq m-k$ *die Beziehung*[25])

$$(71) \quad \left| \sum_{\rho=n+1}^{m-k} A_{m-k-\rho}^{k-1} (\Delta^k \delta_\rho - \Delta^k \delta_n) \right| \leqq C_1 A_{m-n-k-1}^{k} \sum_{\mu=n}^{r} |A_{\mu-n}^{\varkappa-k-1}| \, |\Delta^\varkappa \delta_\mu|$$

$$+ (1-\delta_{k0}) A_{m-n-k-1}^{k-1} \sum_{\mu=n+1}^{r} |\Delta^\varkappa \delta_\mu| +$$

$$+ C_2 A_{m-n-k-1}^{k} \sum_{\mu=r+1}^{m-k} (\mu+1-n)^{\varkappa-k-1} |\Delta^\varkappa \delta_\mu|$$

$$+ |\Delta^\varkappa \delta_{m-k}| + A_{m-n-k-1}^{k} \sum_{\mu=m-k+1}^{\infty} |\Delta^\varkappa \delta_\mu| \, |A_{\mu-(m-k)}^{\varkappa-k-1} - A_{\mu-n}^{\varkappa-k-1}|.$$

(*Die erste, zweite bzw. dritte Summe rechts in* (71) *tritt nur auf, falls* $r \geqq n$, $r \geqq n+1$ *bzw.* $r < m-k$ *ist;* C_1 *und* C_2 *sind nur von* k *und* $\varkappa$ *abhängig*).

Diese Beziehung ergibt sich sofort aus (70); sie ist offenbar richtig für $k=0$, und für $k>0$ und $n+1 \leqq \mu \leqq m-k$ gilt

$$A_{m-k-\mu}^{k-1} \leqq A_{m-n-k-1}^{k-1} \leqq K A_{m-n-k-1}^{k} \frac{1}{m-n-k+1} \leqq$$

$$\leqq K A_{m-n-k-1}^{k} (\mu+1-n)^{\varkappa-k-1}.$$

8. *DER DIFFERENZENSATZ*

Wir werden im folgenden eine Formel ableiten, die eine Differenz $\Delta^\alpha \varepsilon_n \delta_n$ als Produkte von Differenzen $\Delta^{\alpha_1} \varepsilon_p$ und $\Delta^{\alpha_2} \delta_q$ darzustellen gestattet. Dies ist eine Ergänzung zum wohlbekannten und durch (4) zum

[25]) Es sei $\delta_{00} = 1$, $\delta_{k0} = 0$ für $k \neq 0$.

Ausdruck gebrachten Sachverhalt im Fall eines ganzzahligen α. Für beliebiges α lässt sich $\Delta^{\alpha}\varepsilon_n\delta_n$ darstellen als Summe eines entsprechend zu (4) gebauten Hauptgliedes H und eines Restes R. H ist eine Linearkombination aus Differenzen $\Delta^{\alpha-\beta}\varepsilon_p\,\Delta^{\beta}\delta_q$ (für jedes Glied ist die Summe der Differenzenindizes $=\alpha$).

Der folgende Satz enthält eine Reihe von Parametern; durch deren Spezialisierung werden wir in § 9 verschiedene Spezialfälle herausgreifen.

SATZ 14. *Es sei* $\alpha>0$, $k\geqq-1$, $l\geqq-1$ *(k, l ganz)*, $\gamma_1\geqq 0$, $\gamma_3\geqq\gamma_2\geqq 0$, $k\leqq\gamma_1\leqq k+1$, $l\leqq\gamma_2\leqq\gamma_3\leqq l+1$, $\gamma_1+l\neq\alpha-1$, $\gamma_1+\gamma_2<\alpha$.

Ist $\varepsilon_n=O(1)$, $\delta_n=O(1)\ (n\to\infty)$, *so ist für* $n\to\infty$

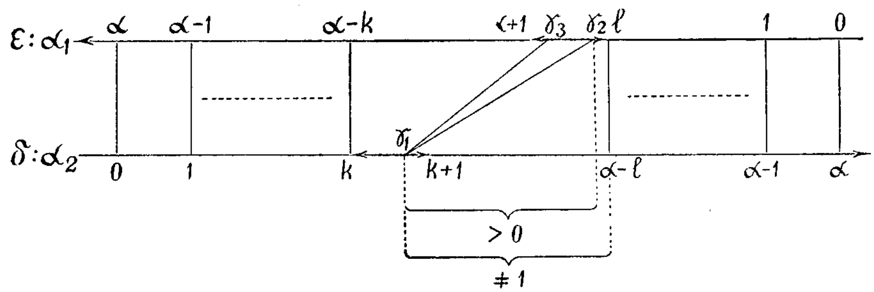
$$\Delta^{\alpha}\varepsilon_n\delta_n=\sum_{\lambda=0}^{k}\binom{\alpha}{\lambda}\Delta^{\lambda}\delta_n\,\Delta^{\alpha-\lambda}\varepsilon_{n+\lambda}+\sum_{\mu=0}^{l}\binom{\alpha}{\mu}\Delta^{\mu}\varepsilon_n\,\Delta^{\alpha-\mu}\delta_{n+\mu}+R_n \tag{72}$$

mit

$$\begin{aligned}R_n=O(1)\,\overline{\operatorname{fin}}_{\nu\geqq n}\,|\Delta^{\gamma_1}\delta_\nu|\Bigg\{&n^{l+\gamma_1-\alpha}\sum_{\mu=n}^{2n}\left[\frac{(1-\delta_{l0})}{n}+|A_{\mu-n}^{\gamma_2-l-1}|\right]|\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|\\&+\sum_{\mu=2n+1}^{\infty}\left[|A_{\mu-n}^{\gamma_2-l-2}|+(\mu+1-n)^{\gamma_1+\gamma_2-\alpha-1}\right]|\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|\\&+\sum_{\mu=n}^{2n}\left[(\mu+1-n)^{\gamma_1+\gamma_3-\alpha-1}+|A_{\mu-n}^{\gamma_3-l-2}|\right]|\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu|+\\&+(1+n^{\gamma_1+l-\alpha+1})\sum_{\mu=2n+1}^{\infty}|A_{\mu-n}^{\gamma_3-l-2}|\,|\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu|\Bigg\}.\end{aligned} \tag{73}$$

Ist $k=-1$ *oder* $l=-1$, *so tritt die entsprechende Summe in* (72) *nicht auf.*

Die möglichen Lagen der Indizes α_1 und α_2 der in (72) und (73) auftretenden Produkte $\Delta^{\alpha_1}\varepsilon_p\,\Delta^{\alpha_2}\delta_q$ sind in der folgenden Figur dargestellt.



Ausgezogene Linien die von der α_1 zur α_2 Achse führen, verbinden zusammengehörige Indizes α_1 und α_2. Die senkrechten Linien entsprechen den Produkten des Hauptgliedes in (72). Die Zahlen γ_1, γ_2 und γ_3 dürfen sich nur in den mit $<>$ markierten Intervallen bewegen. Später wird der Fall von besonderem Interesse sein, in dem der Punkt γ_3 links vom Pukt γ_1 liegt (Sätze 16 und 18).

Beweis. Der Beweis ist erbracht, wenn wir zeigen, dass für das Restglied (64) von Hilfssatz 11 die Beziehung (73) gilt. Aus (64), (69) und (58) folgt die Beziehung

$$R_n = O(1)\,\overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n}\,|\Delta^{\gamma_1}\delta_\nu| \sum_{m=n+l+1}^{\infty} (m+1-n)^{\gamma_1-\alpha-1} \left| \sum_{\sigma=n+1}^{m-l} A_{m-l-\sigma}^{l-1} (\Delta^l \varepsilon_\sigma - \Delta^l \varepsilon_n) \right| \tag{74}$$

für alle Zahlen k und γ_1 die den Voraussetzungen von Satz 14 genügen (im Fall $k=-1$ muss $\gamma_1=0$ sein — beachte (62)). Ist nun $l=-1$ (d. h. $\gamma_2=\gamma_3=0$), so wird die rechte Seite von (74) wegen (62) zu

$$O(1)\,\overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n}\,|\Delta^{\gamma_1}\delta_\nu| \sum_{m=n}^{\infty} (m+1-n)^{\gamma_1-\alpha-1}\,|\varepsilon_m|$$

was (73) für $l=-1$ beweist. Im folgenden dürfen wir also annehmen, dass $l \geqq 0$ ist.

Wir zerlegen R_n in zwei Teile gemäss

$$R_n = O(1)\,\overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n}\,|\Delta^{\gamma_1}\delta_\nu| \left\{ \sum_{m=n+l+1}^{2n+l} (\ldots) + \sum_{m=2n+l+1}^{\infty} (\ldots) \right\} \quad (n \geqq 1). \tag{75}$$

Führt man in der ersten Summe durch Hilfssatz 15 (Formel (71) mit $r=n-1$) die Differenz $\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu$ ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen (Vertauschung von Summationen, Anwendung von (58)) für $n \to \infty$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=n+l+1}^{2n+l} (m+1-n)^{\gamma_1-\alpha-1} \left| \sum_{\sigma=n+1}^{m-l} A_{m-l-\sigma}^{l-1} (\Delta^l \varepsilon_\sigma - \Delta^l \varepsilon_n) \right| \\
&= O(1) \sum_{\mu=n}^{2n} |\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu|\,(\mu+1-n)^{\gamma_3-l-1} \sum_{m=\mu}^{2n} (m+1-n)^{\gamma_1+l-\alpha-1} \\
&\quad + O(1) \sum_{\mu=n+1}^{2n} (\mu+1-n)^{\gamma_1-\alpha-1}\,|\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu| \\
&\quad + O(1) \sum_{\mu=n+2}^{2n} |\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu| \sum_{m=1}^{\mu-n-1} m^{l+\gamma_1-\alpha-1}\,|A_{\mu-n-m}^{\gamma_3-l-1} - A_{\mu-n}^{\gamma_3-l-1}|
\end{aligned}$$

$$+O(1)\sum_{\mu=2n+1}^{\infty}|\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu|\sum_{m=1}^{n} m^{l+\gamma_1-\alpha-1}\,|A_{\mu-n-m}^{\gamma_3-l-1}-A_{\mu-n}^{\gamma_3-l-1}|$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}.$$

Für I und II gilt die Abschätzung

$$O(1)\sum_{\mu=n}^{2n}(\mu+1-n)^{\gamma_1+\gamma_3-\alpha-1}\,|\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu|.$$

Nach Hilfssatz 12 ist ferner

$$\mathrm{III}=O(1)\sum_{\mu=n}^{2n}|\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu|\,[(\mu+1-n)^{\gamma_1+\gamma_3-\alpha-1}+|A_{\mu-n}^{\gamma_3-l-2}|]$$

und

$$\mathrm{IV}=O(1)\,(1+n^{\gamma_1+l-\alpha+1})\sum_{\mu=2n+1}^{\infty}|\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu|\,|A_{\mu-n}^{\gamma_3-l-2}|.$$

Daraus ergibt sich der $\Delta^{\gamma_3}\varepsilon_\mu$ enthaltende Teil der Abschätzung (73).

Führt man in der zweiten Summe der geschweiften Klammer von (75) durch Hilfssatz 15 (Formel (71), $r=2n$) die Differenz $\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu$ ein, so ergibt sich in entsprechender Weise für $n\to\infty$ die Beziehung

$$\sum_{m=2n+l+1}^{\infty}(m+1-n)^{\gamma_1-\alpha-1}\left|\sum_{\sigma=n+1}^{m-l}A_{m-l-\sigma}^{l-1}(\Delta^l\varepsilon_\sigma-\Delta^l\varepsilon_n)\right|$$

$$=O(1)\sum_{\mu=n}^{2n}|A_{\mu-n}^{\gamma_2-l-1}|\,|\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|\sum_{m=2n}^{\infty}(m+1-n)^{l+\gamma_1-\alpha-1}$$

$$+(1-\delta_{l0})\,O(1)\sum_{\mu=n+1}^{2n}|\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|\sum_{m=2n}^{\infty}(m+1-n)^{\gamma_1+l-\alpha-2}$$

$$+O(1)\sum_{\mu=2n+1}^{\infty}(\mu+1-n)^{\gamma_2-l-1}|\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|\sum_{m=\mu}^{\infty}(m+1-n)^{\gamma_1+l-\alpha-1}$$

$$+O(1)\sum_{\mu=2n+1}^{\infty}(\mu+1-n)^{\gamma_1-\alpha-1}\,|\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|$$

$$+O(1)\sum_{\mu=2n+2}^{\infty}|\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|\sum_{m=n+1}^{\mu-n-1}m^{\gamma_1+l-\alpha-1}\,|A_{\mu-n-m}^{\gamma_2-l-1}-A_{\mu-n}^{\gamma_2-l-1}|$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}.$$

Es ist

$$\mathrm{I} = O(1)\, n^{l+\gamma_1-\alpha} \sum_{\mu=n}^{2n} |A_{\mu-n}^{\gamma_2-l-1}|\, |\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|$$

und

$$\mathrm{II} = O(1)\,(1-\delta_{l0})\, n^{\gamma_1+l-\alpha-1} \sum_{\mu=n}^{2n} |\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|\,.$$

Für die Glieder III und IV gilt die Abschätzung

$$O(1) \sum_{\mu=2n+1}^{\infty} (\mu+1-n)^{\gamma_1+\gamma_2-\alpha-1}\, |\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|$$

und nach Hilfssatz 12 ist

$$\mathrm{V} = O(1) \sum_{\mu=2n+1}^{\infty} |\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu|\, |A_{\mu-n}^{\gamma_2-l-2}|\, [1+(\mu+1-n)^{l+\gamma_1-\alpha+1}]\,.$$

Aus diesen Abschätzungen ergibt sich der $\Delta^{\gamma_2}\varepsilon_\mu$ enthaltende Teil von (73).

9. *SPEZIALFÄLLE VON SATZ 14*

Im folgenden greifen wir einige wichtige Spezialfälle von Satz 14 heraus.

SATZ 15. *Es sei* $0 \leqq \gamma < \alpha$, $0 \leqq k \leqq \gamma \leqq k+1$ *(k ganz). Ist* $\varepsilon_n = O(1)$, $\delta_n = O(1)$ $(n \to \infty)$, *so gilt für* $n \to \infty$ *die Beziehung*

$$\Delta^\alpha \varepsilon_n \delta_n = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{\alpha}{\lambda} \Delta^\lambda \delta_n\, \Delta^{\alpha-\lambda} \varepsilon_{n+\lambda} + O(1) \overline{\mathrm{fin}}_{\nu \geqq n}\, |\Delta^\gamma \delta_\nu| \sum_{\mu=n}^{\infty} (\mu+1-n)^{\gamma-\alpha-1} |\varepsilon_\mu| \tag{76}$$

und speziell

$$\Delta^\alpha \varepsilon_n \delta_n = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{\alpha}{\lambda} \Delta^\lambda \delta_n\, \Delta^{\alpha-\lambda} \varepsilon_{n+\lambda} + O(1)\, \overline{\mathrm{fin}}_{\nu \geqq n} |\Delta^\gamma \delta_\nu|\, \overline{\mathrm{fin}}_{\nu \geqq n} |\varepsilon_\nu|\,. \tag{77}$$

B e w e i s. Dies ist der Spezialfall $l=-1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ von Satz 14 (beachte, dass $n^{\gamma_1-\alpha-1} \leqq (\mu+1-n)^{\gamma_1-\alpha-1}$ ist für $n \leqq \mu \leqq 2n-1$).

Est ist eine offene Frage, ob (77) auch noch für $\gamma = \alpha$ gilt.

SATZ 16. *Es sei* $0 \leqq k \leqq \gamma \leqq k+1$ *(k ganz),* $0 < \alpha - \gamma < \gamma' < 1$. *Ist* $\varepsilon_n = O(1)$, $\delta_n = O(1)$ $(n \to \infty)$, *so gilt für* $n \to \infty$ *die Beziehung*

$$\Delta^\alpha \varepsilon_n \delta_n = \sum_{\lambda=0}^{k} \binom{\alpha}{\lambda} \Delta^\lambda \delta_n \, \Delta^{\alpha-\lambda} \varepsilon_{n+\lambda} + \varepsilon_n \Delta^\alpha \delta_n + R_n \tag{78}$$

mit

$$\begin{aligned} R_n = O(1) \overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n} |\Delta^\gamma \delta_\nu| \Big\{ & n^{\gamma-\alpha} |\varepsilon_n| + \sum_{\mu=2n+1}^{\infty} \mu^{\gamma-\alpha-1} |\varepsilon_\mu| \\ & + \sum_{\mu=n}^{2n} (\mu+1-n)^{\gamma+\gamma'-\alpha-1} |\Delta^{\gamma'} \varepsilon_\mu| + n^{\gamma-\alpha+1} \sum_{\mu=2n+1}^{\infty} \mu^{\gamma'-2} |\Delta^{\gamma'} \varepsilon_\mu| \Big\} \end{aligned} \tag{79}$$

und speziell

$$R_n = O(1) \overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n} |\Delta^\gamma \delta_\nu| \Big\{ n^{\gamma-\alpha} \overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n} |\varepsilon_n| + n^{\gamma+\gamma'-\alpha} \overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n} |\Delta^{\gamma'} \varepsilon_\nu| \Big\}. \tag{80}$$

Beweis. Dies ist der Spezialfall $l = \gamma_2 = 0$ von Satz 14 $\Big($für $\mu \geqq 2n+1$ ist $(\mu+1-n) = (\mu+1)\Big(1 - \dfrac{n}{\mu+1}\Big)$ mit $0 \leqq \dfrac{n}{\mu+1} \leqq \dfrac{1}{2}\Big)$.

SATZ 17. *Es sei* $0 \leqq l \leqq \gamma \leqq l+1$ *(l ganz),* $0 \leqq \gamma < \alpha$. *Ist* $\varepsilon_n = O(1)$ $\delta_n = O(1)$ $(n \to \infty)$, *so gilt für* $n \to \infty$ *die Beziehung*

$$\Delta^\alpha \varepsilon_n \delta_n = \sum_{\lambda=0}^{l} \binom{\alpha}{\lambda} \Delta^\lambda \varepsilon_n \, \Delta^{\alpha-\lambda} \delta_{n+\lambda} + R_n \tag{81}$$

mit

$$R_n = O(1) \overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n} |\delta_\nu| \sum_{\mu=n}^{\infty} \big[(\mu+1-n)^{\gamma-\alpha-1} + |A_{\mu-n}^{\gamma-l-2}|\big] |\Delta^\gamma \varepsilon_\mu|. \tag{82}$$

Beweis. Dies ist der Spezialfall $k = -1$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \gamma_3$ von Satz 14, falls noch $l \neq \alpha - 1$ ist. Ist aber $l = \alpha - 1$, so ist (nach (4))

$$R_n = \delta_{n+\alpha} \Delta^\alpha \varepsilon_n = \delta_{n+\alpha} \Delta^{\alpha-\gamma} \Delta^\gamma \varepsilon_n = O(1) \delta_{n+\alpha} \sum_{\mu=n}^{\infty} |A_{\mu-n}^{\gamma-\alpha-1}| |\Delta^\gamma \varepsilon_\mu|.$$

ZUSATZ. Man kann die Abschätzung (82) auf folgende Form bringen: *Setzt man* $\varphi = \alpha - (l+1)$ *für* $\gamma = l+1$, $\varphi = \alpha - l$ *für* $\gamma = l$ *und* $\varphi = \operatorname{Min}(\alpha - \gamma, l+1-\gamma)$ *für* $l < \gamma < l+1$, *so gilt für* R_n *in* (81) *die Beziehung*

$$R_n = O(1) \overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n} |\delta_\nu| \sum_{\mu=n}^{\infty} (\mu+1-n)^{-1-\varphi} |\Delta^\gamma \varepsilon_\mu|. \tag{83}$$

SATZ 18. *Es sei* $0 \leqq l < l + \gamma_1 \leqq \gamma_1 + \gamma_2 < \alpha \leqq l + 1$ *(l ganz). Ist* $\varepsilon_n = O(1)$, $\delta_n = O(1)$, *so gilt für* $n \to \infty$ *die Beziehung*

$$\Delta^\alpha \varepsilon_n \delta_n = \sum_{\lambda=0}^{l} \binom{\alpha}{\lambda} \Delta^\lambda \varepsilon_n \Delta^{\alpha-\lambda} \delta_{n+\lambda} + \delta_n \Delta^\alpha \varepsilon_n + R_n \tag{84}$$

mit

$$\begin{aligned} R_n = O(1) \overline{\underset{\nu \geqq n}{\text{fin}}} |\Delta^{\gamma_1} \delta_\nu| \Bigg\{ & n^{l+\gamma_1-\alpha} \sum_{\mu=n}^{2n} (\mu+1-n)^{\gamma_2-l-1} |\Delta^{\gamma_2} \varepsilon_\mu| \\ & + \sum_{\mu=2n+1}^{\infty} \mu^{\gamma_1+\gamma_2-\alpha-1} |\Delta^{\gamma_2} \varepsilon_\mu| + \sum_{\mu=n}^{2n} (\mu+1-n)^{\gamma_1-1} |\Delta^\alpha \varepsilon_\mu| \\ & + n^{\gamma_1+l-\alpha+1} \sum_{\mu=2n+1}^{\infty} |A_{\mu-n}^{\alpha-l-2}| \, |\Delta^\alpha \varepsilon_\mu| \Bigg\}. \end{aligned} \tag{85}$$

B e w e i s. Dies folgt aus dem Spezialfall $k=0$, $\gamma_3 = \alpha$ von Satz 14 (wegen $l \geqq \alpha - 1$ und $\gamma_1 > 0$ ist $\gamma_1 + l > \alpha - 1$).

10. *ANWENDUNGEN*

Wir verwenden im folgenden die Sätze des vorangehenden Paragraphen um nachzuweisen, dass die Sätze 11—13 ohne die Einschränkung über die Ganzzahligkeit von α richtig sind. Die Beweise der Sätze 11—13 sind so allgemein gehalten, dass für die genannte Erweiterung nur eine Behandlung der in (76), (78), (81) und (84) auftretenden Restglieder nötig ist.

SATZ 19. *Es sei* $\alpha \geqq 0$ *und* $\beta \geqq 0$. *Genau dann erfüllt eine Folge* $\varepsilon_n = O(1)$ *die Bedingung*

$$\sum (n+1)^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \delta_n| < \infty \tag{86}$$

für alle δ_n *mit*

$$\delta_n = o(1), \quad \sum (n+1)^\beta |\Delta^{\beta+1} \delta_n| < \infty, \tag{87}$$

wenn gilt

(88) $\varepsilon_n = O(n^{\beta-\alpha})$ *für* $\beta \leqq \alpha$ *und* $\sum (n+1)^\alpha \, | \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n | < \infty$.

Beweis. Wegen Satz 11 dürfen wir $\alpha > 0$ annehmen, ferner wurde die Notwendigkeit von (88) für alle $\alpha \geqq 0$ im Beweis von Satz 11 dargetan; schliesslich folgt aus (88) und Hilfssatz 8, dass wir uns beim Beweis des hinreichenden Teiles auf den Fall $0 \leqq \beta \leqq \alpha$ beschränken dürfen.

Wir stellen zunächst fest, dass aus (87) und (88) nach Hilfssatz 8 die Beziehungen

$$\sum (n+1)^{\gamma_2 - 1} \, | \Delta^{\gamma_2} \delta_n | < \infty \quad (0 < \gamma_2 \leqq \beta + 1)$$

und

$$\Delta^{\gamma_1} \varepsilon_n = \frac{O(1)}{n^{\gamma_1}} \quad (0 \leqq \gamma_1 \leqq \alpha)$$

folgen.

Wird die Differenz $\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \delta_n$ in (86) durch (81) ($\beta < \alpha$) bzw. (84) ($\beta = \alpha$) ersetzt (wobei ε und δ in (81) bzw. (84) vertauscht sind), so sind wegen (52) ($q = p = 0, 1, \ldots, l < \alpha + 1$ und $q = 0$, $p = \alpha + 1$)[26] nur die entsprechenden Restglieder zu behandeln.

Im Fall $\beta < \alpha$ ist nach (83) (mit $\gamma = \beta + 1$)

$$\sum (n+1)^\alpha \, | R_n | = \sum O(1) \; (n+1)^\beta \sum_{\mu=n}^{\infty} (\mu + 1 - n)^{-1-\varphi} \, | \Delta^{\beta+1} \delta_\mu | =$$

$$= O(1) \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^\beta \, | \Delta^{\beta+1} \delta_\mu | < \infty .$$

[26]) Für $\beta \leqq \alpha$ ist nach (52) sogar $\sum (n+1)^\alpha \, | \Delta^{\alpha+1-p} \varepsilon_{n+q} \Delta^p \delta_n | < \infty$ für $0 \leqq p \leqq \beta$, $1 \leqq p \leqq \alpha + 1$. Wir bemerken, dass die hier zugelassenen Werte von p für $\beta < 1$ die Lücke $\beta < p < 1$ aufweisen (für unsere Überlegungen ist dies ohne Belang). Allgemein kann diese Lücke nicht geschlossen werden wie folgende Überlegung zeigt: Ist $\alpha = \beta = 0$, $p = 1/2$, $\varepsilon_n = \delta_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu \left(\sum | \alpha_\nu | < \infty \right)$, so sind die Bedingungen (87) und (88) erfüllt, aber es ist nicht immer $\sum | \Delta^{1/2} \varepsilon_n |^2 < \infty$, denn daraus würde folgen, dass

$$\sum \eta_n \, \Delta^{1/2} \varepsilon_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \sum_{n=0}^{\nu} A_{\nu-n}^{-1/2} \eta_n$$

für alle $\sum \eta_n^2 < \infty$ konvergiert. Dies impliziert, dass stets $\sum_{n=0}^{\nu} A_{\nu-n}^{-1/2} \eta_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ gilt, was wegen $\sum_{n=0}^{\nu} | A_{\nu-n}^{-1/2} |^2 \to \infty$ nicht zutrifft (Vgl. Banach [1] S. 86, 68 und th. 5 S. 80).

Im Fall $\beta=\alpha$ ist nach (85) (wobei etwa $\gamma_1=\varepsilon$, $\gamma_2=\alpha+1-2\varepsilon>l$ gesetzt sei, so dass für genügend kleines $\varepsilon>0$ die Voraussetzungen von Satz 18 erfüllt sind; es sei überdies $0<\gamma_1=\varepsilon<\alpha$)

$$\sum (n+1)^{\alpha}\,|R_n| = \sum O(1)\;(n+1)^{\alpha-\gamma_1}\{\ldots\}$$

$$= O(1)\sum_{\mu=0}^{\infty}|\Delta^{\gamma_2}\delta_\mu|(\mu+1)^{l-1}\sum_{\mu/2\leqq n\leqq\mu}(\mu+1-n)^{\gamma_2-l-1}$$

$$+\;O(1)\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{\gamma_1+\gamma_2-\alpha-2}\,|\Delta^{\gamma_2}\delta_\mu|\sum_{n\leqq\frac{\mu-1}{2}}(n+1)^{\alpha-\gamma_1}$$

$$+\;O(1)\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+1)^{\alpha-\gamma_1}\,|\Delta^{\alpha+1}\delta_\mu|\sum_{\mu/2\leqq n\leqq\mu}(\mu+1-n)^{\gamma_1-1}$$

$$+\;O(1)\sum_{\mu=1}^{\infty}\mu^{l}\,|\Delta^{\alpha+1}\delta_\mu|\sum_{n\leqq\frac{\mu-1}{2}}A_{\mu-n}^{\alpha-l-1}$$

$$= O(1)\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+1)^{\gamma_2-1}\,|\Delta^{\gamma_2}\delta_\mu|$$

$$+\;O(1)\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+1)^{\alpha}\,|\Delta^{\alpha+1}\delta_\mu|<\infty\,.$$

SATZ 20. *Es sei* $\alpha\geqq 0$ *und* $\beta\geqq 0$. *Genau dann erfüllt eine Folge* $\varepsilon_n=O(1)$ *die Bedingung*

(89) $$\Delta^{\alpha}\,\varepsilon_n\,\delta_n=\frac{O(1)}{n^{\alpha+1}}\qquad(n\to\infty)$$

für alle δ_n *mit*

(90) $$\delta_n=o(1),\quad \Delta^{\beta}\,\delta_n=\frac{O(1)}{n^{\beta+1}}\qquad(n\to\infty),$$

wenn gilt

(91) $$\varepsilon_n=O(n^{\beta-\alpha})\quad \text{für}\quad \beta\leqq\alpha\quad\text{und}\quad \Delta^{\alpha}\frac{\varepsilon_n}{n}=\frac{O(1)}{n^{\alpha+1}}\qquad(n\to\infty).$$

Beweis. Wegen Satz 12 dürfen wir $\alpha > 0$ annehmen, ferner wurde die Notwendigkeit von (91) für alle $\alpha \geqq 0$ im Beweis von Satz 12 dargetan; schliesslich folgt aus (91) und Hilfssatz 9, dass wir uns beim Beweis des hinreichenden Teiles auf den Fall $0 \leqq \beta \leqq \alpha$ beschränken dürfen.

Wir stellen zunächst fest, dass aus (90) und (91) nach den Hilfssätzen 7 und 9 für $n \to \infty$ die Beziehungen

$$\Delta^{\gamma} \delta_n = \frac{O(1)}{n^{\gamma+1}} \quad (0 \leqq \gamma \leqq \beta) \quad \text{und} \quad \Delta^{\gamma'} \varepsilon_n = \frac{O(1)}{n^{\gamma'}} \quad (0 \leqq \gamma' \leqq \alpha)$$

folgen.

Wird die Differenz $\Delta^{\alpha} \varepsilon_n \delta_n$ in (89) durch (77) $(\beta < \alpha)$ bzw. (78) $(\beta = \alpha)$ ersetzt, so sind wegen (54) $(q = p = 0, 1, \ldots, k < \alpha$ und $q = 0,\ p = \alpha)$ nur die entsprechenden Restglieder zu behandeln.

Im Fall $\beta < \alpha$ ist nach (77) (mit $\gamma = \beta$)

$$R_n = O(1) \overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n} |\Delta^{\beta} \delta_{\nu}| \, \overline{\operatorname{fin}}_{\nu \geqq n} |\varepsilon_{\nu}| = O(1) \frac{1}{n^{\beta+1}} n^{\beta-\alpha} = \frac{O(1)}{n^{\alpha+1}} \quad (n \to \infty,)$$

und im Fall $\beta = \alpha$ ist nach (80) (wobei etwa $\gamma' = 2\varepsilon$, $\gamma = \alpha - \varepsilon$ gesetzt sei, so dass für genügend kleines $\varepsilon > 0$ die Vorraussetzungen von Satz 16 erfüllt sind; es sei überdies $0 < \gamma' = 2\varepsilon \leqq \alpha$)

$$R_n = O(1) \frac{1}{n^{\gamma+1}} \left\{ n^{\gamma-\alpha} O(1) + n^{\gamma+\gamma'-\alpha} \frac{O(1)}{n^{\gamma'}} \right\} = \frac{O(1)}{n^{\alpha+1}} \quad (n \to \infty).$$

Ehe wir zum Beweis der Erweiterung von Satz 13 übergehen, geben wir die folgende Ergänzung zum Hilfssatz 5.

HILFSSATZ 16. *Bewirkt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *unter den Voraussetzungen von Hilfssatz* 5 *die in Satz* 6 *genannte Transformation, so ist*

$$\sum \left| \frac{b_{nn}}{a_{nn}} \varepsilon_n \right| < \infty.$$

Beweis. Aus (15) folgt nach einem Lemma von Chow[27], dass $\sum |A_{nn}| < \infty$ sein muss und wegen $A_{nn} = \dfrac{b_{nn}}{a_{nn}} \varepsilon_n$ ist dies gerade die Behauptung.

[27] Chow [2], Lemma 6 (falls $y_n = O(1)$ in Satz 6) und [3].

SATZ 21. *Es sei* $\alpha \geqq 0$ *und* $\beta \geqq 0$. *Genau dann erfüllt eine Folge* $\varepsilon_n = O(1)$ *die Bedingung*

$$\sum (n+1)^{\alpha} |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \delta_n| < \infty \tag{92}$$

für alle δ_n *mit*

$$\delta_n = O(1), \quad \Delta^{\beta} \frac{\delta_n}{n} = \frac{O(1)}{n^{\beta+1}} \quad (n \to \infty), \tag{93}$$

wenn gilt

$$\sum (n+1)^{\alpha-\beta} |\varepsilon_n| < \infty \quad (\beta \leqq \alpha+1), \quad \sum \left|\frac{\varepsilon_n}{n+1}\right| < \infty \quad (\beta > \alpha+1), \tag{94}$$

und

$$\sum (n+1)^{\alpha} |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n| < \infty .$$

B e w e i s. Wegen Satz 13 dürfen wir annehmen, dass $\alpha > 0$ ist. Die Notwendigkeit der letzten Bedingung in (94) wurde im Beweis zu Satz 13 für alle $\alpha \geqq 0$ dargetan. Die Notwendigkeit der ersten Bedingung in (94) folgt unmittelbar aus Hilfssatz 16 (nach Satz 10). Die Notwendigkeit der zweiten Bedingung in (94) ergibt sich aus dem Spezialfall $\alpha = 0$ von Satz 13, da (nach Hilfssatz 8) aus (92) folgt, dass $\sum |\Delta \varepsilon_n \delta_n| < \infty$ ist für alle δ_n mit (93). Beim hinreichenden Teil des Beweises dürfen wir uns wegen Hilfssatz 9 auf den Fall $0 \leqq \beta \leqq \alpha + 1$ beschränken.

Wir stellen zunächst fest, dass aus (93) und (94) nach den Hilfssätzen 7, 8 und 9 für $n \to \infty$ die Beziehungen $\Delta^{\gamma} \delta_n = O(1)/n^{\gamma}$ $(0 \leqq \gamma \leqq \beta)$ und $\sum (n+1)^{\gamma'-1} |\Delta^{\gamma'} \varepsilon_n| < \infty$ $(0 < \gamma' \leqq \alpha + 1)$ folgen.

Wird die Differenz $\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \delta_n$ in (92) durch (76) $(\beta < \alpha+1)$ bzw. (78) $(\beta = \alpha + 1)$ ersetzt, so sind wegen (57) $(q = p = 0, 1, \ldots, k < \alpha + 1$ und $q = 0$, $p = \alpha + 1)$ nur die entsprechenden Restglieder zu behandeln.

Im fall $\beta < \alpha + 1$ ist nach (76) (mit $\gamma = \beta$)

$$\sum (n+1)^{\alpha} |R_n| = \sum O(1)\, (n+1)^{\alpha-\beta} \sum_{\mu=n}^{\infty} (\mu + 1 - n)^{\beta-\alpha-2} |\varepsilon_{\mu}| =$$

$$= O(1) \sum (\mu+1)^{\alpha-\beta} |\varepsilon_{\mu}| < \infty .$$

Im Fall $\beta = \alpha + 1$ ist nach (79) (wobei $\gamma' = 2\varepsilon$, $\gamma = \alpha + 1 - \varepsilon$ gesetzt sei, so dass für genügend kleines $\varepsilon > 0$ die Voraussetzungen von Satz 16 erfüllt sind)

$$\sum (n+1)^{\alpha} |R_n| = O(1) \sum \left| \frac{\varepsilon_n}{n+1} \right| + O(1) \sum \left| \frac{\varepsilon_n}{\mu+1} \right| +$$

$$+ O(1) \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^{\alpha-\gamma} |\Delta^{\gamma'} \varepsilon_\mu| \sum_{\mu/2 \leqq n \leqq \mu} (\mu+1-n)^{\gamma+\gamma'-\alpha-2}$$

$$+ O(1) \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{\gamma'-1} |\Delta^{\gamma'} \varepsilon_\mu| = O(1) \sum \left| \frac{\varepsilon_n}{n+1} \right| + O(1) \sum (\mu+1)^{\gamma'-1} |\Delta^{\gamma'} \varepsilon_\mu| < \infty.$$

(Eingegangen am 9. Mai 1956)

LITERATUR

[1] Banach, S. — Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932.

[2] Chow, H. C. — Note on convergence and summability factors. *Journ. Lond. Math. Soc.* **29** (1954), 459-476.

[3] Peyerimhoff, A. — Über ein Lemma von Herrn H. C. Chow. (Erscheint im *Journ. Lond. Math. Soc.*)