EINE BEMERKUNG ZU DEN GLEICHUNGEN VON BELTRAMI-MICHELL

von

T. P. ANGELITCH (Beograd)

Durch seine Rezension in „Mathematical Reviews" (V. 15, 6 (1954), p. 578) hat mich C. A. Truesdell darauf aufmerksam gemacht, dass in meiner Arbeit unter obigem Titel (veröffentlicht in Publ. math. T. V — p. 1 – 4) eine unkorrekte Addition von zwei Nulltensoren verschiedener Varianz ausgeführt wurde, wodurch die Gültigkeit der erhaltenen Resultate auf nur affine Tensoren beschränkt war.

In folgenden ganz kurzen Ausführungen gebe ich die korrekte Herleitung der in Frage stehenden Gleichungen unter gleichen Voraussetzungen und mit gleichen Bezeichnungen.

Wird die Gleichung (2) kovariant nach x^k differenziert und der erhaltene zweimal kovariante Tensor in den symmetrischen und den antisymmetrischen Teil getrennt, so lässt sich schreiben

$$\begin{aligned}\rho\,(X_{i,k}+X_{k,i})+(\lambda+\mu)\,(\sigma_{,ik}+\sigma_{,ki})+\mu\,[(\Delta u_i)_{,k}+(\Delta u_k)_{,i}]\,+\\+\,\rho\,(X_{i,k}-X_{k,i})+(\lambda+\mu)\,(\sigma_{,ik}-\sigma_{,ki})+\mu\,[(\Delta u_i)_{,k}-(\Delta u_k)_{,i}]=0.\end{aligned}\tag{1'}$$

Um diese Gleichung nun weiter behandeln zu können, berücksichtigen wir, erstens, die folgenden, immer in einem Euklidischen Raum, geltenden Beziehungen

$$\begin{aligned}\sigma_{,ik}&=\sigma_{,ki}\\ u^j{}_{,ijk}&=u^j{}_{,kji}\\ (\Delta u_i)_{,k}&=\Delta\,(u_{i,k}),\end{aligned}\tag{2'}$$

die leicht zu prüfen sind; und zweitens, leiten wir aus der Navierschen Gleichung in der Form

$$\rho\,X_i+\vartheta^j_{i,j}=0,$$

durch kovariante Differentiation, die folgende Beziehung ab

$$\rho\,(X_{i,k}-X_{k,i})=-\,(\vartheta^j_{i,jk}-\vartheta^j_{k,ji}).$$

Wenn hier der Spannungstensor durch den Deformationstensor ersetzt wird und dieser letztere durch die Komponenten des Verschiebungsvektors ausgedrückt wird, ergibt sich unter Berücksichtigung von (2')

$$\rho\,(X_{i,k} - X_{k,i}) + \mu\,[(\Delta\, u_i)_{,k} - (\Delta\, u_k)_{,i}] = 0\,. \tag{3'}$$

Durch die Beziehungen (2') und (3') reduziert sich die Gleichung (1') auf

$$\rho\,(X_{i,k} + X_{k,i}) + 2\,(\lambda + \mu)\,\sigma_{,ik} + \mu\,\Delta\,(u_{i,k} + u_{k,i}) = 0\,.$$

Führt man nun hier E und $\varkappa$ anstatt von λ und μ ein, ersetzt man σ nach (7) durch θ, und berücksichtigt man, dass

$$u_{i,k} + u_{k,i} = 2\,\sigma_{ik} = \frac{2\,(1+\varkappa)}{E}\,\vartheta_{ik} - \frac{2\,\varkappa}{E}\,g_{ik}\,\theta$$

ist, so erhält man

$$\rho\,(X_{i,k} + X_{k,i}) + \frac{1}{1+\varkappa}\,\theta_{,ik} + \Delta\,\vartheta_{ik} - \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,g_{ik}\,\Delta\,\theta = 0\,.$$

Nun, da wie schon früher gezeigt wurde

$$\Delta\,\theta = -\,\rho\,\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\,X^j{}_{,j}$$

ist, bekommt man endlich die gesuchte allgemeine Form von Beltrami-Michellschen Gleichungen

$$\rho\,(X_{i,k} + X_{k,i}) + \frac{1}{1+\varkappa}\,\theta_{,ik} + \Delta\,\vartheta_{ik} + \frac{\rho\,\varkappa}{1-\varkappa}\,g_{ik}\,X^j{}_{,j} = 0\,. \tag{4'}$$

Durch Hinaufziehen des Indexes i lässt sich diese Gleichung in der früheren Form eines gemischten Tensors schreiben. Sie lautet korrekt

$$\rho\,(X^i{}_{,k} + X_k{}^{,i}) + \frac{1}{1+\varkappa}\,\theta^{,i}{}_{,k} + \Delta\,\vartheta^i_k + \frac{\rho\,\varkappa}{1-\varkappa}\,\delta^i_k\,X^j{}_{,j} = 0\,,$$

wobei natürlich betont werden muss, dass dieser Tensor jetzt nicht symmetrisch ist, aber dass unter seinen Komponenten drei offenbare Beziehungen bestehen.

Zum Schluss will ich hier noch erwähnen, dass man zu gleicher Form (4') von Beltrami-Michellschen Gleichungen auch durch eine Umwandlung von Saint-Venantschen Kompatibilitätsbedingungen, die in der allgemeinen Tensorform lauten

$$\varepsilon^{irp}\,\varepsilon^{jsq}\,\sigma_{ij,rs} = 0\,,$$

gelangen kann. Diese Herleitung werde ich an einer anderen Stelle durchführen.

(Eingegangen am 1. Mai 1956)