EIN VERFAHREN ZUR NUMERISCHEN LÖSUNG DER RANDWERTAUFGABEN VOM ELLIPTISCHEN TYPUS

von
NIKOLA HAJDIN (Beograd)

ZUSAMMENFASSUNG. — Das hier dargelegte Verfahren besteht im Grunde in der Zurückführung der betrachteten Randwertaufgabe auf ein System von Integralgleichungen und in der Ersetzung dieses durch ein System von linearen algebraischen Gleichungen. Die gesuchte Lösung wird dann mit Hilfe von Matrizenrechnung gefunden.

1. *Einführung.* Bezeichnen wir mit S das endliche und abgeschlossene Gebiet der x, y-Ebene, welches mit einer stückweise glatten Randkurve L begrenzt ist. Einfachheitshalber, werden wir voraussetzen, dass die Geraden, die parallel den Koordinatenachsen laufen, den Rand L höchstens in zwei Punkten schneiden.

Bezeichnen wir mit $ABCD$ (Abb. 1) das kleinste Rechteck, welches das Gebiet S enthält und dessen den Koordinatenachsen parallele Seiten durch die Gleichungen

$$x = a; \quad x = b;$$

$$y = c; \quad y = d;$$

bestimmt sind. Die Strecke AD teilen wir durch Punkte $x_1, x_2, \ldots x_M$, und die Strecke AB durch Punkte $y_1, y_2, \ldots, y_N$.

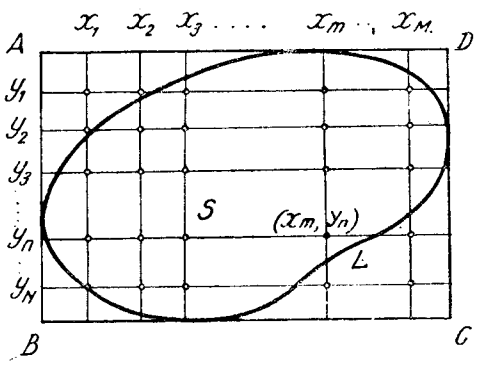

Abb. 1

$F(x, y)$ sei eine im Gebiet $S + L$ definierte sonst beliebige Funktion, die in den Restteilen des Rechtecks $ABCD$ überall gleich Null ist.

Indem wir, nun,

$$F(x_m, y_n) = F_{mn}$$

setzen, können wir die Werte der Funktion $F(x, y)$, in den Knotenpunkten, des Netzes, in der Form einer MN-Matrix angeben:

$$\|F_{mn}\| = \begin{Vmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2N} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ F_{M1} & F_{M2} & \cdots & F_{MN} \end{Vmatrix}.$$

Setzen wir ferner

$$\mathbf{F}_\nu = \begin{Vmatrix} F_{1\nu} \\ F_{2\nu} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{M\nu} \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{F}_\nu^* = \begin{Vmatrix} F_{\nu 1} \\ F_{\nu 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{\nu N} \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{Vmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{F}_N \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{F}^* = \begin{Vmatrix} \mathbf{F}_1^* \\ \mathbf{F}_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{F}_M^* \end{Vmatrix}.$$

Wie ersichtlich, hat der Spaltenvektor $\mathbf{F}^*$ die Zeilen der Matrix $\|F_{mn}\|$ als Elemente, während der Spaltenvektor $\mathbf{F}$ ihre Spalten als Elemente besitzt.

Zuerst zeigen wir, dass es eine quadratische Matrix $\mathbf{T}$ von der Ordnung $M \cdot N$ gibt, deren Elemente gleich 1 und Null sind, die folgende Eigenschaft besitzt

$$\mathbf{T}\,\mathbf{F}^* = \mathbf{F}.$$ [1]

Bezeichnen wir mit $\mathbf{T}_{ij}$ die MN-Matrix, deren Elemente gleich Null sind, mit Ausnahme von demjenigen Element, welches sich im Schnittpunkt der i-ten Spalte und der j-ten Reihe befindet und gleich 1 sein soll. Dann haben wir

$$\mathbf{T}_{ij}\,\mathbf{F}_\nu^* = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & & i & & & N \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdots & & 1 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \\ \begin{Vmatrix} F_{\nu 1} \\ F_{\nu 2} \\ \vdots \\ \cdot \\ \\ F_{\nu N} \end{Vmatrix} \\ N \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{\nu i} \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix} \\ M \end{array} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} j \\ \\ \\ \end{matrix},$$

[1] Auf diese Transformation, die in den späteren Ausführungen gebraucht wird hat mich R. Bojanić aufmerksam gemacht, wofür ich ihm meinen Dank ausspreche.

demnach

$$\mathbf{T}_{n1}\mathbf{F}_1^* + \mathbf{T}_{n2}\cdot\mathbf{F}_2^* + \ldots + \mathbf{T}_{nM}\mathbf{F}_M^* = \begin{Vmatrix} F_{1n} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ F_{2n} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix} + \ldots + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{Mn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_{1n} \\ F_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{Mn} \end{Vmatrix} = \mathbf{F}_n.$$

Setzen wir $\mathbf{T} = \|\mathbf{T}_{ij}\|$. Dann ist, auf Grund der vorherigen Formel,

$$\mathbf{T}\,\mathbf{F}^* = \begin{Vmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \ldots & \mathbf{T}_{1M} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \ldots & \mathbf{T}_{2M} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathbf{T}_{N1} & \mathbf{T}_{N2} & \ldots & \mathbf{T}_{NM} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathbf{F}_1^* \\ \mathbf{F}_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{F}_M^* \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{F}_N \end{Vmatrix} = \mathbf{F},$$

was zu beweisen war. Es ist leicht einzusehen, dass die $\mathbf{T}$-Matrix ortogonal, d. h. dass $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}'$ ist.

2. *Numerische Lösung.* — Es sei die Randwertaufgabe

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + h(x, y)\,\Phi = -f(x, y), \qquad (x, y) \in S,$$
$$\Phi = 0, \qquad (x, y) \in L \tag{1}$$

gegeben. Setzen wir

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -p(x, y); \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -q(x, y), \tag{2}$$

dann haben wir, nach (1),

$$p(x, y) + q(x, y) - h(x, y)\,\Phi(x, y) = f(x, y). \tag{3}$$

Es sei $a(x, \xi, y_n)$ die Greensche Funktion der Randwertaufgabe

$$u'' = 0, \quad (x, y_n) \in S,$$
$$u = 0, \quad (x, y_n) \in L,$$

und $b(x_m, y, \eta)$ die Greensche Funktion der Randwertaufgabe

$$v'' = 0, \quad (x_m, y) \in S,$$
$$v = 0, \quad (x_m, y) \in L.$$

In den Teilen des Rechtecks, welche dem Gebiet S nicht angehören, seien beide diese Funktionen gleich Null. Dann folgt aus (2)

$$\Phi(x, y_n) = \int_a^b a(x, \xi, y_n)\, p(\xi, y_n)\, d\xi,$$
$$\Phi(x_m, y) = \int_c^d b(x_m, y, \eta)\, q(x_m, \eta)\, d\eta. \tag{4}$$

Bezeichnen wir jetzt mit $\{\alpha_\mu\}$ und $\{\beta_\nu\}$ die Konstanten, die von der numerischen Integration abhängen und ersetzen wir die Gleichungen (4) durch die Gleichungen

$$\Phi(x, y_n) = \sum_{\mu=1}^{\overline{M}} a(x, \xi_\mu, y_n)\, p(\xi_\mu, y_n)\, \alpha_\mu, \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$
$$\Phi(x_m, y) = \sum_{\nu=1}^{\overline{N}} b(x_m, y, \eta_\nu)\, q(x_m, \eta_\nu)\, \beta_\nu, \qquad m = 1, 2, \ldots, M.$$

Die Punkte $\{\xi_\nu\}$ und $\{\eta_\nu\}$ können mit Punkten $\{x_\nu\}$ und $\{y_\nu\}$ zusammenfallen, aber dass ist nicht notwendig. Setzen wir in der ersten Gleichung x_m, $m = 1, 2, 3 \ldots M$, statt x, und in der zweiten y_n, $n = 1, 2, 3 \ldots N$, statt y, so erhalten wir

$$\Phi(x_m, y_n) = \sum_{\mu=1}^{\overline{M}} a(x_m, \xi_\mu, y_n)\, p(\xi_\mu, y_n)\, \alpha_\mu,$$
$$\Phi(x_m, y_n) = \sum_{\nu=1}^{\overline{N}} b(x_m, y_n, \eta_\nu)\, q(x_m, \eta_\nu)\, \beta_\nu.$$

Wenn noch

$$a(x_m\, \xi_\mu, y_n) = a_{m\mu n}, \quad p(\xi_\mu, y_n) = \overline{p}_{\mu n},$$
$$b(x_m, y_n, \eta_\nu) = b_{mn\nu}, \quad q(x_m, \eta_\nu) = \overline{q}_{m\nu},$$

gesetzt wird, kann das obige System wie folgt geschrieben werden

$$\Phi_{mn} = \sum_{\mu=1}^{\overline{M}} a_{m\mu n}\, \overline{p}_{\mu n}\, \alpha_\mu, \quad m = 1, 2 \ldots M;$$
$$\Phi_{mn} = \sum_{\nu=1}^{\overline{N}} b_{mn\nu}\, \overline{q}_{m\nu}\, \beta_\nu, \quad n = 1, 2 \ldots N. \tag{5}$$

Wenn $\mathbf{a}_n = \| a_{ijn} \|$ eine $M\overline{M}$ – Matrix, $\mathbf{b}_m = \| b_{mij} \|$ eine $N\overline{N}$ – Matrix, während α und β Diagonalmatrizen sind, deren Elemente α_ν, $\nu = 1, 2 \ldots \overline{M}$ bzw. β_ν, $\nu = 1, 2 \ldots \overline{N}$ sind, dann haben wir

$$\mathbf{a}_n \alpha \overline{\mathbf{p}}_n = \begin{Vmatrix} a_{11n} & a_{12n} & \cdots & a_{1\overline{M}n} \\ a_{21n} & a_{22n} & \cdots & p_{2\overline{M}n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{M1n} & a_{M2n} & \cdots & a_{M\overline{M}n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \alpha_{\overline{M}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \overline{p}_{1n} \\ \overline{p}_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{p}_{\overline{M}n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Phi_{1n} \\ \Phi_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_{Mn} \end{Vmatrix} = \mathbf{\Phi}_n$$

und auf ähnliche Weise

$$\mathbf{b}_m \beta \overline{\mathbf{q}}_m^* = \begin{Vmatrix} b_{m11} & b_{m12} & \cdots & b_{m1\overline{N}} \\ b_{m21} & b_{m22} & \cdots & b_{m2\overline{N}} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{mN1} & b_{mN2} & \cdots & b_{mN\overline{N}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \beta_{\overline{N}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \overline{q}_{m1} \\ \overline{q}_{m2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{q}_{m\overline{N}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Phi_{m1} \\ \Phi_{m2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_{mN} \end{Vmatrix} = \mathbf{\Phi}_m^*$$

d. h.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_n &= \mathbf{a}_n \alpha \overline{\mathbf{p}}_n, \qquad n = 1, 2 \ldots N; \\ \mathbf{\Phi}_m^* &= \mathbf{b}_m \beta \overline{\mathbf{q}}_m^*, \qquad m = 1, 2 \ldots M. \end{aligned} \tag{6}$$

Bezeichnen wir mit p_{mn} und q_{mn} die Werte der Funktionen $p(x, y)$ und $q(x, y)$ in den Punkten $x = x_m$, $y = y_n$. Die Werte

$$\overline{p}_{1n}, \overline{p}_{2n}, \ldots \overline{p}_{\overline{M}n}, \text{ bzw. } \overline{q}_{m1}, \overline{q}_{m2}, \ldots, \overline{q}_{m\overline{N}}, \tag{*}$$

können wir linear, durch Interpolation, mit Hilfe von Werten

$$p_{1n}, p_{2n}, \ldots, p_{Mn}; \qquad q_{m1}, q_{m2}, \ldots q_{mN}$$

ausdrücken. Nehmen wir an, wir hätten auf irgend eine Weise eine Anzahl von Werten (*) schon interpoliert, dann wird es im allgemeinsten Falle

$$\overline{p}_{\mu n} = \sum_{k=1}^{M} L_{\mu kn} p_{kn}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \overline{M};$$

bzw.

$$\overline{q}_{m\nu} = \sum_{k=1}^{N} K_{m\nu k} q_{mk}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \overline{N},$$

wo $L_{\mu kn}$ bzw. $K_{m\nu k}$ die Koeffizienten sind, welche von der Interpolationsart abhängen.

Führen wir jetzt die Matrizen

$$\mathbf{L}_n = \begin{Vmatrix} L_{11n} & L_{12n} & \dots & L_{1Mn} \\ L_{21n} & L_{22n} & \dots & L_{2Mn} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ L_{\overline{M}1n} & L_{\overline{M}2n} & \dots & L_{\overline{M}Mn} \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{K}_m = \begin{Vmatrix} K_{m11} & K_{m12} & \dots & K_{m1N} \\ K_{m21} & K_{m22} & \dots & K_{m2N} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ K_{m\overline{N}1} & K_{m\overline{N}2} & \dots & K_{m\overline{N}N} \end{Vmatrix},$$

ein, so erhalten wir

$$\bar{\mathbf{p}}_n = \mathbf{L}_n \mathbf{p}_n, \quad \bar{\mathbf{q}}^*_m = \mathbf{K}_m \mathbf{q}^*_m,$$

woraus sich dann ergibt

$$\mathbf{\Phi}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{p}_n, \quad \mathbf{\Phi}^*_m = \mathbf{B}_m \mathbf{q}^*_m,$$

wo

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{a}_n \alpha \mathbf{L}_n, \quad \mathbf{B}_m = \mathbf{b}_m \beta \mathbf{K}_m$$

bedeutet. Im Falle, dass die Punkte $\{\xi_\mu\}$ und $\{\eta_\nu\}$ mit den Punkten $\{x_m\}$ und $\{y_n\}$ zusammenfallen, hat man offenbar

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{I}.$$

Wenn wir ferner setzen

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \mathbf{A}_1 & & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \mathbf{A}_N \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \mathbf{B}_1 & & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \mathbf{B}_M \end{Vmatrix},$$

die vorherigen Gleichungen reduzieren sich auf

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}\,\mathbf{p}, \quad \mathbf{\Phi}^* = \mathbf{B}\,\mathbf{q}^*.$$

Multiplizieren wir die zweite von diesen Gleichungen mit der **T**-Matrix, die wir vorher definiert haben, so erhalten wir

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}\,\mathbf{p}, \quad \mathbf{\Phi} = \mathbf{T}\,\mathbf{B}\,\mathbf{T}'\mathbf{q}. \tag{7}$$

Auf diese Weise haben wir zwei Gleichungen für die unbekannten Vektoren $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ erhalten. Um noch eine Beziehung zwischen diesen Vektoren aufzustellen benützen wir die Gleichung (3). Wenn wir $x = x_m$, $y = y_n$ setzen, erhalten wir aus (3)

$$p_{mn} + q_{mn} - h_{mn}\,\Phi_{mn} = f_{mn}. \tag{8}$$

Führen wir die Matrizen

$$\mathbf{h}_n = \begin{Vmatrix} h_{1n} & & & & \\ & h_{2n} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & h_{Mn} \end{Vmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{h} = \begin{Vmatrix} \mathbf{h}_1 & & & & \\ & \mathbf{h}_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \mathbf{h}_N \end{Vmatrix}$$

ein, so wird das System (8) durch

$$\mathbf{p}_n + \mathbf{q}_n - \mathbf{h}_n \mathbf{\Phi}_n = \mathbf{f}_n$$

ausgedrückt werden können, d. h.

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{h}\,\mathbf{\Phi} = \mathbf{f}.$$

Wenn wir in diese Gleichung noch die Werte für $\mathbf{\Phi}$ aus (7) einführen, bekommen wir schliesslich folgende zwei Gleichungen

$$(\mathbf{I} - \mathbf{h}\,\mathbf{A})\,\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{f},$$

$$\mathbf{p} + (\mathbf{I} - \mathbf{h}\,\mathbf{T}\,\mathbf{B}\,\mathbf{T}')\,\mathbf{q} = \mathbf{f},$$

aus welchen wir dann $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ bestimmen können.

3. *Beispiel.* — Die Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens werden wir am Beispiel der Torsion eines prismatischen Stabs zeigen, dessen Querschnitt die Abb. 2 zeigt

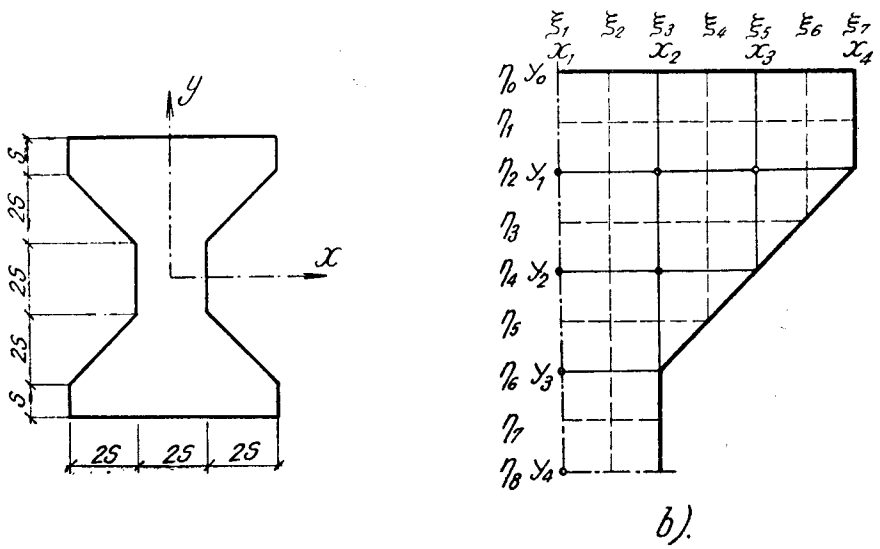

Abb. 2

Wie bekannt, das Torsionsproblem reduziert sich auf Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= -2G\theta, \qquad (x, y) \in S; \\ \Phi &= 0, \qquad (x, y) \in L; \end{aligned} \tag{α}$$

wobei G der Gleitmodul und θ der Torsionswinkel ist.

Wegen der Symmetrie des Querschnitts in Bezug auf die Achsen x und y genügt das Viertel des Bildes zu betrachten.

Die Gleichungen (5) lauten hier

$$\Phi_{mn} = \sum_{\mu=1}^{6} a_{m\mu n} \bar{p}_{\mu n} \alpha_\mu, \qquad m = 1, 2, 3;$$

$$\Phi_{mn} = \sum_{\nu=1}^{8} b_{mn\nu} \bar{q}_{m\nu} \beta_\nu, \qquad n = 1, 2, 3, 4;$$

wobei die Punkte $\{\xi_\mu\}$ und $\{\eta_\nu\}$ in der Abb. 2 gegeben sind. Die Konstanten der numerischen Integration, von der Simpsonschen Regel ausgehend, sind durch die Matrizen

$$\alpha = \frac{s}{6} \begin{Vmatrix} 1 & & & & & \\ & 4 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 4 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 4 \end{Vmatrix}, \qquad \beta = \frac{s}{6} \begin{Vmatrix} 4 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 4 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 4 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & 1 \end{Vmatrix}$$

gegeben, während die Matrizen $\mathbf{a}_n$ und $\mathbf{b}_m$ unmittelbar geschrieben werden können.

Nehmen wir jetzt an, die Funktion $p(x, y_n)$ sei zwischen den Punkteo x_m, x_{m+1} und die Funktion $q(x_m, y)$ zwischen den Punkten y_n, y_{n+1} angenähert durch Interpolationspolynome bis zum zweiten Grade gegeben, welche ihrerseits durch die Koordinaten der Vektoren $\mathbf{p}_n$ und $\mathbf{q}_m^*$ bestimmt sind.

Um die Genauigkeit der Interpolationsformel in diesem speziellen Fall zu erhöhen, werden wir die Tatsache ausnützen, dass uns auf Grund von (α) die Werte von Funktionen

$$q(x, \eta_0) = c, \qquad p(\xi_7, y) = p(\xi_8, y_3) = p(\xi_3, y_4) = c$$

bekannt sind, wobei $c = 2G\theta$ ist.

Auf solche Weise erhalten wir

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 8 & & & \\ 6 & 2 & & \\ & 8 & & \\ -1 & 6 & 3 & \\ & & 8 & \\ & -1 & 6 & \end{Vmatrix}\mathbf{p}_1 + \frac{c}{8}\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{p}}_2 = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 8 & \\ 6 & 2 \\ & 8 \\ -10 & 18 \end{Vmatrix}\mathbf{p}_2,$$

$$\bar{\mathbf{p}}_3 = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 8 \\ 6 \end{Vmatrix}\mathbf{p}_3 + \frac{c}{8}\begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \end{Vmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{p}}_4 = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 8 \\ 6 \end{Vmatrix}\mathbf{p}_4 + \frac{c}{8}\begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \end{Vmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{q}}_1^* = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 6 & -1 & & & & \\ 8 & & & & & \\ 3 & 6 & -1 & & & \\ & 8 & & & & \\ & 3 & 6 & -1 & & \\ & & 8 & & & \\ & & 2 & 6 & & \\ & & & 8 & & \end{Vmatrix}\mathbf{q}_1^* + \frac{c}{8}\begin{Vmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{q}}_2^* = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 6 & -1 \\ 8 & \\ 3 & 6 \\ & 8 \\ & 3 \end{Vmatrix}\mathbf{q}_2^* + \frac{c}{8}\begin{Vmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{q}}_3^* = \frac{1}{8}\begin{Vmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{Vmatrix}\mathbf{q}_3^* + \frac{c}{8}\begin{Vmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{Vmatrix}.$$

Demnach erhalten wir

$$\mathbf{\Phi} = \frac{s^2}{12}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} p_{11} & p_{21} & p_{31} & p_{12} & p_{22} & p_{13} & p_{14} \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 19{,}5 & 21{,}5 & 11{,}5 & & & & \\ 14{,}5 & 20{,}5 & 11{,}5 & & & & \\ 7{,}0 & 11{,}5 & 10{,}0 & & & & \\ & & & 8{,}0 & 16{,}0 & & \\ & & & 3{,}0 & 15{,}0 & & \\ & & & & & 5{,}0 & \\ & & & & & & 5{,}0 \end{Vmatrix} \end{array}\mathbf{p} + c\frac{s^2}{12}\begin{Vmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 1{,}0 \\ 1{,}0 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{\Phi} = \frac{s^2}{12}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} q_{11} & q_{21} & q_{31} & q_{12} & q_{22} & q_{13} & q_{14} \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 10 & & & 12{,}5 & & 11{,}0 & 7{,}0 \\ & 6{,}0 & & & 5{,}0 & & \\ & & 6{,}0 & & & & \\ 11{,}5 & & & 22{,}5 & & 22{,}5 & 14{,}0 \\ & 3{,}5 & & & 7{,}5 & & \\ 11{,}5 & & & 24{,}0 & & 31{,}5 & 21{,}5 \\ 11{,}5 & & & 24{,}0 & & 32{,}5 & 26{,}5 \end{Vmatrix} \end{array}\mathbf{q} + c\frac{s^2}{12}\begin{Vmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}0 \\ 0 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{Vmatrix}, \qquad (\beta)$$

wobei die Koordinaten der Vektoren $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ und $\mathbf{\Phi}$, die dem Gebiet S nicht angehören, weggelassen sind.

Die Gleichungen (β) und die Gleichung

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{c}$$

bilden das System aus welchem **p** und **q** leicht bestimmt werden können. Durch die Lösung des Systems erhalten wir

$$\mathbf{p} = c \left\| \begin{matrix} 0{,}2216 \\ 0{,}1709 \\ 0{,}0614 \\ 0{,}5576 \\ 0{,}4102 \\ 1{,}3341 \\ 1{,}1336 \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{q} = c \left\| \begin{matrix} 0{,}7784 \\ 0{,}8291 \\ 0{,}9386 \\ 0{,}4424 \\ 0{,}5898 \\ -\,0{,}3341 \\ -\,0{,}1336 \end{matrix} \right\|.$$

Aus der bekannten Formel für den Torsionsmoment

$$\mathfrak{M} = 2 \iint \Phi \, dx \, dy,$$

durch die Anwendung der numerischen Integration, erhalten wir

$$\mathfrak{M} = 59{,}0 \, s^4 \, G \, \theta.$$

Die Linien der Schubspannungen sind in der Abb. 3 gezeigt.

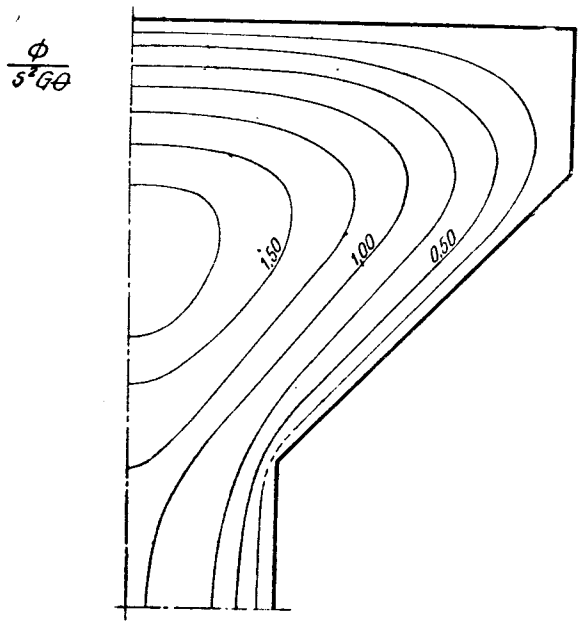

Abb. 3

Die Schubspannung im Punkt (x_2, y_4) ist durch die Gleichung

$$(\tau_y)_{\substack{x=x_2 \\ y=y_4}} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_2 \\ y=y_4}} = \int_{-s}^{+s} \frac{\partial a}{\partial x}(x_2, \xi, y_4) \, p(\xi, y_4) \, d\xi$$

gegeben, woraus sich dann

$$(\tau_y)_{\substack{x=x_2 \\ y=y_4}} = -\,0{,}0312 \frac{\mathfrak{M}}{s^3}.$$

ergibt.

(Eingegangen am 19 Oktober 1955)