SUR L'INTÉGRABILITÉ DE CERTAINES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

par

S. ALJANČIĆ (Beograd), R. BOJANIĆ (Skoplje) et M. TOMIĆ (Beograd)

SOMMAIRE — Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité de $x^{-\gamma} L(1/x)\, g(x)$ et $x^{-\gamma} L(1/x) f(x)$, où $g(x)$ et $f(x)$ représentent les séries trigonométriques à coefficients monotones, $L(x)$ étant une fonction à croissance lente.[1])

1. *INTRODUCTION.* Soit $\lambda_n \downarrow 0$, $n \to \infty$. Alors les séries

$$g(x) = \sum_1^\infty \lambda_n \sin nx \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{2}\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos nx$$

sont des fonctions continues dans $\delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$ pour chaque $\delta > 0$, mais pas nécessairement intégrables-L dans $(0, \pi)$.

Boas [2] a montré que pour $0 < \gamma \leqslant 1$, $x^{-\gamma} g(x) \in L(0, \pi)$ si et seulement si $\sum n^{\gamma-1} \lambda_n$ converge. Il est bien connu, d'après Young [7], que ce résultat reste valable aussi pour $\gamma = 0$. Heywood [4] a déduit que ceci a lieu aussi pour $1 < \gamma < 2$ et, en utilisant une remarque de Hartman et Wintner [3], que pour $\gamma > 2$ ce n'est plus vrai.

Les résultats analogues ont lieu pour $f(x)$. Ainsi, Boas dans la même note a montré que de $\lambda_n \downarrow 0$, $0 < \gamma < 1$, on a $x^{-\gamma} f(x) \in L(0, \pi)$ si et seulement si la série $\sum n^{\gamma-1} \lambda_n$ converge. Pour $\gamma \geqslant 1$ il est nécessaire d'introduire les hypothèses supplémentaires sur la convergence de $\sum \lambda_n$ et supposer que $f(0) = 0$. Dans le cas $\gamma = 1$, et en supposant qu'on ait à partir d'un certain rang $\lambda_n \downarrow$, le même auteur a montré que $x^{-1} f(x) \in L(0, \pi)$ dans le cas où et seulement dans ce cas là la série $\sum \lambda_n \log n$ converge. Le résultat pour $\gamma = 1$ est un cas exceptionnel car, comme l'a montré Heywood [4], on a pour $1 < \gamma < 3$, $x^{-\gamma} f(x) \in L(0, \pi)$ dans le

[1]) Pour la définition de ces fonctions voir (1).

seul cas où $\Sigma n^{\gamma-1} \lambda_n$ converge. De plus, le dernier auteur en démontrant ceci, n'admet que la positivité des coefficients λ_n à partir d'un certain rang. Il a montré aussi que pour $\gamma \geqslant 3$ la conclusion n'est plus valable.

Nous nous proposons ici de généraliser les résultats de Young, Boas et Heywood en remplaçant dans lesdits théorèmes la puissance $x^{-\gamma}$ par $x^{-\gamma} L(1/x)$, et respectivement $n^{\gamma-1}$ par $n^{\gamma-1} L(n)$, où $L(x)$ désigne une *fonction à croissance lente.*

D'après Karamata [5] une fonction $L(x)$, positive et continue, definie pour $x \geqslant 0$, est une fonction à croissance lente si

$$\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1, \qquad x \to \infty, \tag{1}$$

pour chaque $t > 0$ fixe. Nous désignons dans la présente note toujours par $L(x)$ une fonction à croissance lente.[2])

THÉORÈME 1. *Si* $\lambda_n \downarrow 0$ *et* $0 < \gamma < 2$, *alors* $x^{-\gamma} L(1/x)\, g(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$ *si et seulement si* $\Sigma n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n$ *converge.*

THÉORÈME 2. *Soit* $L(x)$ *convexe et non décroissant. Si* $\lambda_n \downarrow 0$, *alors* $L(1/x)\, g(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$ *si et seulement si* $\Sigma n^{-1} L(n) \lambda_n$ *converge.*

THÉORÈME 3. *Si* $\lambda_n \downarrow 0$ *et* $0 < \gamma < 1$, *alors* $x^{-\gamma} L(1/x) f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$ *si et seulement si* $\Sigma n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n$ *converge.*

THÉORÈME 4. *Soit* $L(x)$ *convexe et non décroissant. Si, à partir d'un certain rang,* λ_n *décroît,* $\Sigma \lambda_n$ *converge et* $f(0) = 0$, *alors* $x^{-1} L(1/x) f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$ *si et seulement si* $\Sigma n^{-1} L(n) \Lambda_n$, *où l'on a posé* $\Lambda_n = \Sigma_n^{\infty} \lambda_\nu$, *converge.*

THÉORÈME 5. *Si, à partir d'un certain rang,* $\lambda_n \geqslant 0$, $\Sigma \lambda_n$ *converge,* $f(0) = 0$ *et* $1 < \gamma < 3$, *alors* $x^{-\gamma} L(1/x) f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$ *si et seulement si* $\Sigma n^{\gamma-1} L(n)$ *converge.*

Pour $L(x) \equiv 1$ les théorèmes 1, 2, 3, et 5 se réduisent aux théorèmes analogues de Young, Boas et Heywood. Pour $L(x) \equiv 1$ la série mentionnée au théorème 4 se réduit à $\Sigma n^{-1} \Lambda_n$; cette série est equiconvergente

---

[2]) Des fonctions à croissance lente sont, par exemple: $\log x$, $\log \log x$, $(\log x)^\alpha$, $(\log \log x)^\alpha, \ldots$, chaque fonction $F(x)$ qui a une limite lorsque $x \to \infty$, $\log x + \sin \pi x$, $\log x + \sin \log x$, $\dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\log t}$, etc.

avec $\Sigma \Delta \Lambda_n \log n = \Sigma \lambda_n \log n$ ([9], § 5.13). Ainsi, le théorème 4 contient le théorème correspondant de Boas (théorème 3 de [2]). Et même, dans le cas général, où $L(x) \not\equiv 1$, on peut formuler le théorème 4 de la manière semblable, si $L(x)$ satisfait à la condition supplémentaire

$$(2) \qquad x\{L(x+a) - L(x)\} \asymp 1, \; a > 0.^{3)}$$

Dans ce cas, la série $\Sigma n^{-1} L(n) \Lambda_n$, qui figure dans le théorème 4, peut être remplacée par $\Sigma \{L(n)\}^2 \lambda_n$. L'equiconvergence de ces deux séries sera démontrée au № 3.7.

En démontrant son théorème 1 ([2], p. 219), qui correspond à notre théorème 1, avec $L(x) \equiv 1$, $0 < \gamma < 1$, Boas utilise dans la première partie de sa démonstration seulement la monotonie des coefficients λ_n. Quant à la seconde partie, il n'utilise que le fait qu'ils sont positifs. Nous n'insisterons pas sur ce point, quoique, en employant le procédé de Boas pour la démonstration de notre théorème 1 on puisse arriver à la même conclusion. Heywood a étendu le théorème de Boas à l'intervalle $1 < \gamma < 2$, en réduisant la série de sinus pour $1 < \gamma < 2$ en une série de cosinus pour l'intervalle $0 < \gamma < 1$, et en appliquant le théorème correspondant de Boas (qui correspond à notre théorème 3 avec $L(x) \equiv 1$). Nous allons donner une démonstration directe valable pour tout intervalle $0 < \gamma < 2$.

Le № 2 contient les propriétés des fonctions à croissance lente utilisées dans la présente note. Nous allons démontrer quelques unes de ces propriétés, car il nous semble qu'elles ne soient pas connues.

2. *PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE.* Pour la démonstration des propriétés (i-iv) voir Karamata [5]. En particulier, une démonstration directe de la propriété (i) a été faite par J. Korevaar, T. v. Ardenne-Ehrenfest et N. G. de Bruijn [6]. La démonstration de la propriété (v) se trouve dans notre note [1].

(i) *Le passage à la limite* (1), *qui définit la classe de fonctions à croissance lente, a lieu uniformément par rapport à* $t \in (a, b)$, $0 < a < b < \infty$.

(ii) *Si* $f(x) \sim L(x)$, $x \to \infty$, *alors* $f(x)$ *est de même une fonction à croissance lente.*[4]

---

[3] La notation $f \asymp 1$ désigne $0 < m \leqslant f \leqslant M$. On voit que le logarithme itéré, par exemple, satisfait à la condition (2); ce n'est pas le cas si $L(x)$ est une puissance quelconque du logarithme.

[4] $f \sim g$ signifie que $f/g \to 1$.

(iii) *Si* $\alpha > 0$, *on a*

$$x^{\alpha} L(x) \to \infty \quad \textit{et} \quad x^{-\alpha} L(x) \to 0, \; x \to \infty.$$

(iv) *Soit* $\alpha > 0$ *et posons*

$$\underline{L}_1(x) = x^{\alpha} \operatorname*{Min}_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{-\alpha} L(t)\}, \quad \overline{L}_1(x) = x^{-\alpha} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{\alpha} L(t)\};$$

$$\underline{L}_2(x) = x^{-\alpha} \operatorname*{Min}_{x \leqslant t < \infty} \{t^{\alpha} L(t)\}, \quad \overline{L}_2(x) = x^{\alpha} \operatorname*{Max}_{x \leqslant t < \infty} \{t^{-\alpha} L(t)\}.$$

Alors, $\underline{\overline{L}}_k(x) \sim L(x)$, $x \to \infty$ $(k = 1,2)$, *c. à. d., d'après* (ii), $\underline{\overline{L}}_k(x)$ $(k = 1,2)$ *sont aussi des fonctions à croissance lente. Les fonctions* $x^{-\alpha}\overline{L}_1(x)$ *et* $x^{-\alpha}\underline{L}_2(x)$ *sont non croissantes, tandis que* $x^{\alpha}\underline{L}_1(x)$ *et* $x^{-\alpha}\overline{L}_2(x)$ *sont des fonctions non décroissantes.*

(v) *Soit* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$. *Si l'intégrale*

$$\int_{+0}^{\infty} x^{\varkappa} |f(x)| \, dx$$

converge pour $-\alpha < \varkappa < \beta$, *on a*

$$\int_{+0}^{\infty} f(x) L(\lambda x) \sim L(\lambda) \int_{+0}^{\infty} f(x) \, dx, \qquad \lambda \to \infty$$[5].

(vi) *Si* $L(x)$ *est convexe, alors pour chaque* $a > 0$ *fixe*

$$x \left\{ \frac{L(x+a)}{L(x)} - 1 \right\} \to 0, \qquad x \to \infty.$$

---

[5] Dans la présente note nous utilisons la relation asymptotique

$$\int_{c/\lambda}^{\infty} f(x) L(\lambda x) \, dx \sim L(\lambda) \int_{+0}^{\infty} f(x) \, dx \qquad \text{pour un } c > 0 \text{ fixe.}$$

Or, celle-ci est une conséquence immédiate de la relation mentionnée sous (v), car pour $0 < \eta < \alpha$, en tenant compte de (iv) et (ii), on a

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_{+0}^{c/\lambda} f(x) L(\lambda x) \, dx \right| \leqslant \frac{\lambda^{-\eta}}{L(\lambda)} \int_{+0}^{c/\lambda} x^{-\eta} |f(x)| (\lambda x)^{\eta} L(\lambda x) \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\lambda^{-\eta}}{L(\lambda)} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant x \leqslant c} \{x^{\eta} L(x)\} \int_{+0}^{c/\lambda} x^{-\eta} |f(x)| \, dx \to 0, \qquad \lambda \to \infty.$$

D é m o n s t r a t i o n. L'hypothèse de $L(x)$ convexe implique sa monotonie. Supposons que $L(x)$ croît d'une façon monotone et posons $n = [x]$. Alors,

$$0 \leqslant L(x + na) - L(x) = \varphi(x) L(x), \tag{3}$$

où, en vertu de (i),

$$\varphi(x) \overset{def}{=\!=} \frac{L(x+na)}{L(x)} - 1 \to 0, \quad x \to \infty.$$

D'autre part on a

$$L(x+na) - L(x) = \{L(x+na) - L(x+(n-1)a)\} + \ldots$$
$$\ldots + \{L(x+2a) - L(x+a)\} + \{L(x+a) - L(x)\}.$$

En partant de l'hypothèse de convexité de $L(x)$, c. à. d. du fait que

$$\Delta_\alpha^2 L(x) \equiv L(x) - 2L(x+a) + L(x+2a)$$

est de signe constant, on obtient

$$L(x+a) - L(x) \leqslant \quad \text{ou} \quad \geqslant L(x+2a) - L(x+a),$$

suivant que

$$\Delta_a^2 L(x) \geqslant 0 \quad \text{ou bien} \quad \Delta_a^2 L(x) \leqslant 0.$$

De (4) résulte alors

$$L(x+na) - L(x) \geqslant \begin{cases} n\{L(x+a) - L(x)\} & \text{si } \Delta_a^2 L(x) \geqslant 0, \\ n\{L(x+na) - L(x+(n-1)a)\} & \text{si } \Delta_a^2 L(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

D'après (3) on a, donc,

$$0 \leqslant n\{L(x+a) - L(x)\} \leqslant \varphi(x) L(x) \quad \text{si} \quad \Delta_a^2 L(x) \geqslant 0 \tag{5}$$

et

$$0 \leqslant n\{L(x+na) - L(x+(n-1)a)\} \leqslant \varphi(x) L(x) \quad \text{si} \quad \Delta_a^2 L(x) \geqslant 0.$$

De la dernière inégalité il résulte

$$\{x + (n-1)a\}\{L(x+na) - L(x+(n-1)a)\} < M_1 \varphi(x) L(x),$$

et, étant donné que de (i) on déduit

$$L(x) = \frac{L(x)}{L(x+(n-1)a)} \cdot L(x+(n-1)a) < M_2 L(x-(n-1)a);$$

on constate finalement que pour $\Delta_a^2 L(x) \leqslant 0$, on a

$$0 \leqslant \{x+(n-1)a\}\{L(x+na) - L(x+(n-1)a)\} <$$
$$< M_3 \varphi(x) L(x(n-1)a). \tag{6}$$

De (5) et (6), en tenant compte de $n \sim x$, il résulte que pour chaque fonction convexe et croissante on a

$$0 \leqslant x \{L(x+a) - L(x)\} < \varepsilon(x) L(x),$$

où $\varepsilon(x) \to 0$ avec $x \to \infty$.

La même démonstration subsiste si l'on suppose que $L(x)$ est une fonction convexe décroissante.

(vii) *Pour* $\alpha > 0$ *on a*

$$0 < A n^{\alpha} L(n) \leqslant \sum_{1}^{n} \nu^{\alpha-1} L(\nu) \leqslant B n^{\alpha} L(n).$$

Démonstration. D'une part, d'après (iv), on a

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{n} \nu^{\alpha-1} L(\nu) &\leqslant \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{\nu^{\alpha/2} L(\nu)\} \cdot \sum_{1}^{n} \nu^{\alpha/2-1} \leqslant \\ &\leqslant n^{\alpha/2} \overline{L}_1(n) \left\{1 + \int_{1}^{n} x^{\alpha/2-1} dx\right\} \leqslant \\ &\leqslant B n^{\alpha} L(n), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{n} \nu^{\alpha-1} L(\nu) &\geqslant \min_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \{\nu^{-1} L(\nu)\} \cdot \sum_{1}^{n} \nu^{\alpha} \geqslant n^{-1} \underline{L}_1(n) \cdot \int_{0}^{n} x^{\alpha} dx \geqslant \\ &\geqslant A n^{\alpha} L(n) > 0. \end{aligned}$$

3. *DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES* 1–5. Nous ferons usage dans la démonstration des théorèmes 1 et 3 du lemme suivant.

3.1. LEMME. *Si* $\alpha > 0$ *et* $c_n \downarrow 0$, *la série*

$$\sum_{1}^{\infty} n^{\alpha-1} L(n) c_n$$

converge, si et seulement si la série

$$\sum_{1}^{\infty} n^{\alpha} L(n) (c_n - c_{n+1})$$

converge.

Démonstration. Posons

$$S_n = \sum_{1}^{n} \nu^{\alpha-1} L(\nu), \quad S_0 = 0.$$

D'après (vii) les séries

$$\Sigma\, n^{\alpha} L(n)(c_n - c_{n+1}) \quad \text{et} \quad \Sigma\, S_n (c_n - c_{n+1})$$

seront convergentes ou divergentes en même temps. Il faut donc montrer, l'equiconvergence de la dernière série et de la série $\Sigma\, n^{\alpha-1} L(n)\, c_n$; celle-ci résulte de

$$\sum_{1}^{p} S_n (c_n - c_{n+1}) + S_{n-1}\, c_n \cdot \sum_{1}^{p} n^{\alpha-1} L(n)\, c_n . \tag{7}$$

En effet, soit $\Sigma\, n^{\alpha-1} L(n)\, c_n < \infty$. Les deux termes dans le premier membre de (7) sont bornés; c'est pourquoi $\Sigma\, S_n (c_n - c_{n+1})$ converge.

Inversement, soit $\Sigma\, S_n (c_n - c_{n+1}) < \infty$. D'après (vii) et (iv) on a

$$\begin{aligned}\sum_{p}^{\infty} S_n (c_n - c_{n+1}) &\geqslant A \sum_{p}^{\infty} n^{\alpha} L(n)(c_n - c_{n+1}) \geqslant \\ &\geqslant A \min_{p \leqslant n < \infty} \{n^{\alpha} L(n)\} \cdot \sum_{p}^{\infty} (c_n - c_{n+1}) \geqslant \\ &\geqslant A\, p^{\alpha} \underline{L}_2(p)\, c_p \geqslant \\ &\geqslant A\, M\, p^{\alpha} L(p)\, c_p , \qquad M > 0,\end{aligned}$$

et en tenant compte de (vii)

$$\sum_{p}^{\infty} S_n (c_n - c_{n+1}) \geqslant \frac{A\,M}{B} S_p\, c_p .$$

Donc,

$$S_p\, c_p \to 0, \qquad p \to \infty.$$

De (7) résulte donc la convergence de la série $\Sigma\, n^{\alpha-1} L(n)\, c_n$.

3.2. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME* 1. Une transformation simple nous permet (Zygmund [9], § 5.13) d'écrire $g(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2}\lambda_1 \operatorname{tg}\frac{x}{4} + \frac{1}{2\sin x/2}\sum_{1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n+1})\,(1 - \cos (n + {}^1\!/_2)\, x) = \\ &= -\frac{1}{2}\lambda_1 \operatorname{tg}\frac{x}{4} + \frac{x}{2 \sin x/2}\, G(x). \end{aligned}$$

Étant donné que dans le théorème 1 il s'agit de l'intégrabilité au voisinage du point $x = 0$ et que, d'après (iii), $x^{-\gamma} L(1/x) \operatorname{tg}\dfrac{x}{4} \in \mathrm{L}(0, \pi)$ pour

$0<\gamma<2$, on peut donc, sans nuire à la généralité, considérer la fonction nonnégative $G(x)$, au lieu de la fonction $g(x)$. Alors on a

$$\int_0^\pi x^{-\gamma} L(1/x)\, G(x)\, dx =$$

$$= \int_0^\pi x^{-\gamma-1} L(1/x) \sum_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n+1})(1 - \cos(n+{}^1/_2)x)\, dx =$$

$$= \sum_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \int_0^\pi x^{-\gamma-1} L(1/x)(1 - \cos(n+{}^1/_2)x)\, dx.$$

Le dernier changement d'ordre de sommation et d'intégration est justifié par le fait que les termes de la série sont positifs.

On a donc

$$\int_0^\pi x^{-\gamma} L(1/x)\, G(x)\, dx = \sum_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n+1})\, n^\gamma L(n)\, I_n \tag{8}$$

où

$$I_n \overset{def}{=} \frac{1}{n^\gamma L(n)} \int_0^\pi x^{-\gamma-1} L\left(\frac{1}{x}\right)(1 - \cos(n+{}^1/_2)x)\, dx.$$

Nous aurons d'après (v), pour $0<\gamma<2$ et $\alpha_n = \dfrac{1}{(n+{}^1/_2)\pi}$ [6]

$$\tag{9} \begin{aligned} I_n &= \left(\frac{n+{}^1/_2}{n}\right)^\gamma \frac{1}{L(n)} \int_{\alpha_n}^\infty x^{\gamma-1}\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) L((n+{}^1/_2)x)\, dx \to \\ &\to \int_{+0}^\infty x^{\gamma-1}\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) dx = I > 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Supposons que $\Sigma n^{\gamma-1} L(n)\lambda_n < \infty$. En vertu du lemme la série $\Sigma(\lambda_n - \lambda_{n+1})\, n^\gamma L(n)$ est convergente et d'après (9) la série au second

[6] Voir la remarque 3).

membre de (8) l'est aussi. Par suite, l'intégrale au premier membre de la formule (8 est finie et, de $G(x) \geqslant 0$, résulte $x^{-\gamma} L(1/x)\, G(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$.

Inversement, soit $x^{-\gamma} L(1/x)\, G(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$. Alors la série au second membre de (8) est convergente, et, d'après (9), ses termes, à partir d'un certain rang, ne sont pas inférieurs aux termes de la série

$$\frac{I}{2} \Sigma (\lambda_n - \lambda_{n+1})\, n^{\gamma} L(n).$$

Autrement dit, la dernière série converge et aussi, en vertu du lemme, la série $\Sigma\, n^{\gamma-1} L(n)\, \lambda_n$.

3.3. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME* 2. Supposons que $\Sigma\, n^{-1} L(n)\, \lambda_n$ converge. Soit

(10) $$\frac{1}{k+1} \leqslant x < \frac{1}{k}.$$

De

$$g(x) = \sum_{1}^{k-1} \lambda_n \sin n x + \sum_{k}^{\infty} \lambda_n \sin n x,$$

après une transformation abelienne effectuée sur la seconde somme, résulte

$$|g(x)| \leqslant \sum_{1}^{k-1} \lambda_n + \frac{\lambda_k}{\sin x/2} \leqslant \overline{\Lambda}_{k+1} + \pi \frac{\lambda_k}{x},$$

et, d'après (10),

(11) $$|g(x)| \leqslant \overline{\Lambda}_{k-1} + \pi (k+1)\, \lambda_k, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant x < \frac{1}{k}.$$

Étant donné qu'il s'agit de l'intégrabilité au voisinage du point $x = 0$, il suffit de montrer que

$$I \stackrel{def}{=\!=} \int_{0}^{1} L\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)|\, dx < \infty.$$

Selon (11) on a

$$I = \sum_{1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} L\left(\frac{1}{x}\right) |g(x)|\, dx \leqslant \sum_{1}^{\infty} \{\overline{\Lambda}_{n-1} + \pi (n+1)\, \lambda_n\} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} L\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

et du fait que $L(x)$ croît d'une façon monotone, on arrive à l'inégalité

$$I \leqslant \sum_{1}^{\infty} \{\overline{\Lambda}_{n-1} + \pi(n+1)\lambda_n\} L(n+1) \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} dx =$$

$$\leqslant \sum_{1}^{\infty} \frac{L(n+1)}{n(n+1)} \overline{\Lambda}_{n-1} + \pi \sum_{1}^{\infty} \frac{L(n+1)}{n} \lambda_n =$$

$$\leqslant \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{12}$$

La série Σ_2 converge selon l'hypothèse. Pour montrer la convergence de Σ_1, remarquons d'abord que la convexité de $L(x)$ implique, d'après (vi),

$$L(n+1) - L(n) = \frac{L(n+1)}{n} \varepsilon_n = \frac{n+1}{n} \frac{L(n+1)}{n+1} \varepsilon_n \leqslant 2\varepsilon_n \frac{L(n+1)}{n+1},$$

où $\varepsilon_n \to 0$. $L(x)$ étant une fonction monotone et croissante on a

$$\frac{L(n)}{n} - \frac{L(n+1)}{n+1} = \frac{L(n+1)}{n(n+1)} - \frac{L(n+1) - L(n)}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{L(n+1)}{n(n+1)} - 2\varepsilon_n \frac{L(n+1)}{n(n+1)} =$$

$$\geqslant (1 - 2\varepsilon_n) - \frac{L(n+1)}{n(n+1)}.$$

De la dernière inégalité résulte que $L(n)/n$ décroît d'une façon monotone et, d'autre part, que la série Σ_1 converge si la série

$$\Sigma \left\{ \frac{L(n)}{n} - \frac{L(n+1)}{n+1} \right\} \overline{\Lambda}_n \tag{13}$$

converge. Cependant,

$$\sum_{1}^{m} \left\{ \frac{L(n)}{n} - \frac{L(n+1)}{n+1} \right\} \overline{\Lambda}_n + \frac{L(m+1)}{m+1} \overline{\Lambda}_m = \sum_{1}^{m} \frac{L(n)}{n} \lambda_n,$$

et étant donné que $\Sigma n^{-1} L(n) \lambda_n$ converge d'après l'hypothèse, l'expression au premier membre est bornée. Donc, la série (13) converge et, par conséquent, la série Σ_1 converge de même. En vertu de (12) on a donc $L(1/x) g(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$.

Inversement, soit $L(1/x)\,g(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$. $L(x)$ ne décroissant pas, il s'ensuit d'après (iii) que $g(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$, c. à. d. λ_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $g(x)$. Soit $0 < \delta < \pi$ et posons $p = [1/\delta]$. On a alors

$$\frac{\pi}{2} \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \lambda_n \leqslant \left\{ \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right\} |g(x)| \left| \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \sin nx \right| dx. \tag{14}$$

Soit $q = [1/x]$. Dans la première intégrale $x \leqslant \delta$, c. à. d. $q \geqslant p$, et en considérant que $\sin nx \geqslant 0$ pour $x \in (0, \delta)$, $n = 1, \ldots, q$ et que $L(x)$ ne décroît pas, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \sin nx \right| &\leqslant \sum_1^q \frac{L(n)}{n} \sin nx \leqslant x \sum_1^q L(n) \leqslant \\ &\leqslant x q\, L(q) \leqslant L\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Dans la deuxième intégrale $x \geqslant \delta$, c. à. d. $q \leqslant p$; de (15) et de la monotonie de $L(n)/n$, résulte

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \sin nx \right| &\leqslant \sum_1^q \frac{L(n)}{n} \sin nx + \left| \sum_{q+1}^p \frac{L(n)}{n} \sin nx \right| \leqslant \\ &\leqslant L\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sin x/2} \frac{L(q+1)}{q+1} \leqslant \\ &\leqslant L\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{x} \frac{L(q)}{q} < M\, L\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit finalement de (14) que

$$\frac{\pi}{2} \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \lambda_n \leqslant M \int_0^\pi L(1/x)\, |g(x)|\, dx,$$

pour chaque $p > [1/\delta]$, c. à. d. que la série $\Sigma n^{-1} L(n) \lambda_n$ est convergente.

Remarquons, que la démonstration précédente reste valable si λ_n décroît d'une façon monotone à partir d'un certain rang N. Il faut alors, au lieu de $g(x)$, prendre $\bar{g}(x) = \Sigma_N^\infty \lambda_n \sin nx$ et considérer ensuite l'intégrale $\int_0^{1/N} L(1/x)\, |\bar{g}(x)|\, dx$.

3.4. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME* 3. Soit $\Sigma n^{\gamma-1} L(n) \lambda_n$, $0 < \gamma < 1$, convergente. On obtient par une transformation abelienne

$$f(x) = \frac{1}{2} \lambda_0 + \frac{1}{\sin x/2} \sum_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \cos(n+1)x \ \sin nx.$$

Étant donné que, d'après (iii), $x^{-\gamma} L(1/x) \in \mathrm{L}(0,\pi)$ pour $\gamma < 1$, la fonction $x^{-\gamma} L(1/x) f(x)$ est intégrable dans l'intervalle $(0,\pi)$ si l'intégrale

$$\int_0^\pi x^{-\gamma-1} L(1/x) \left| \sum_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \cos(n+1)x \ \sin nx \right| dx$$

existe. A plus forte raison elle est intégrable, si

$$K \stackrel{def}{=} \int_0^\pi x^{-\gamma-1} \ L(1/x) \sum_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n+1}) |\sin nx| \, dx < \infty$$

Les termes du second membre étant positifs, on a

$$K = \sum_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \int_0^\pi x^{-\gamma-1} L(1/x) |\sin nx| \, dx =$$

$$= \sum_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n+1}) n^\gamma L(n) K_n,$$

où l'on a posé

$$K_n = \frac{1}{L(n)} \int_{\frac{1}{n\pi}}^\infty x^{\gamma-1} |\sin(1/x)| L(nx) \, dx.$$

Pour $0 < \gamma < 1$, selon (v) et en vertu de la remarque [5],

$$K_n \to \int_{+0}^\infty x^{\gamma-1} |\sin(1/x)| \, dx, \quad n \to \infty,$$

d'où

$$K < M \sum_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n+1}) n^\gamma L(n).$$

En vertu du lemme, le second membre est borné pour $0 < \gamma < 1$, ce qui prouve que $x^{-\gamma} L(1/x) f(x) \in \mathrm{L}(0,\pi)$.

Inversement, soit $x^{-\gamma} L(1/x) f(x) \in L(0,\pi), 0<\gamma<1$. Soit $0<\delta<\pi$ et $p = [1/\delta]$. En premier lieu on a

$$\frac{\pi}{2}\sum_{1}^{p} n^{\gamma-1} L(n) \leqslant \frac{\pi}{2}\sum_{1}^{p}\lambda_n \operatorname*{Max}_{n\leqslant\nu<\infty}\{\nu^{\gamma-1} L(\nu)\} =$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2}\sum_{1}^{p} n^{\gamma-1}\overline{L}_2(n)\,\lambda_n,$$

où $n^{\gamma-1}\overline{L}_2(n)$ ne croît pas. D'après (iii), $f(x) \in L(0,\pi)$, c. à. d. λ_n sont des coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$. Donc,

$$\frac{\pi}{2}\sum_{1}^{p} n^{\gamma-1} L(n)\lambda_n \leqslant \left\{\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right\}|f(x)|\left|\sum_{1}^{p} n^{\gamma-1}\overline{L}_2(n)\cos nx\right| dx. \tag{16}$$

Soit $q=[1/x]$. En tenant compte de (vii) et (iv), pour $0\leqslant x\leqslant\delta$ on a d'une manière analogue à celle exposée dans la démonstration de la seconde partie du théorème 2,

$$\left|\sum_{1}^{p} n^{\gamma-1}\overline{L}_2(n)\cos nx\right| \leqslant \sum_{1}^{q} n^{\gamma-1}\overline{L}_2(n) \leqslant$$

$$\leqslant M q^{\gamma}\overline{L}_2(q) \leqslant$$

$$\leqslant M_1 x^{-\gamma} L(1/x).$$

Vu que $n^{\gamma-1}\overline{L}_2(n)$ ne croît pas, on a pour $\delta\leqslant x\leqslant\pi$, en vertu de (vii),

$$\left|\sum_{1}^{p} n^{\gamma-1}\overline{L}_2(n)\cos nx\right| \leqslant \sum_{1}^{q} n^{\gamma-1}\overline{L}_2(n) + \left|\sum_{q+1}^{p} n^{\gamma-1}\overline{L}_2(n)\cos nx\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_1 x^{-\gamma} L(1/x) + q^{\gamma-1}\overline{L}_2(q)\operatorname*{Max}_{q\leqslant\nu\leqslant p}\left|\frac{\sin(\nu+{}^1/_2)x}{2\sin x/2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_2 x^{\gamma-1} L(1/x).$$

De (16) résulte donc

$$\frac{\pi}{2}\sum_{1}^{p} n^{\gamma-1} L(n)\lambda_n \leqslant M_3\int_0^\pi x^{-\gamma} L(1/x)|f(x)|\,dx,$$

ç. à. d. la convergence de la série $\Sigma n^{\gamma-1} L(n)\lambda_n$.

3.5. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME* 4. Si on procède comme Boas, une sommation par partie et l'hypothèse $f(0)=0$ nous donnent

$$f(x) = -\sum_{1}^{\infty} \lambda_n (1-\cos nx) =$$

$$= \sum_{2}^{\infty} \Lambda_n \{\cos(n-1)x - \cos nx\} =$$

$$= 2\sum_{2}^{\infty} \Lambda_n \sin(n-{}^1/_2)x \cdot \sin x/2,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = \frac{\sin x}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{2}^{\infty} \Lambda_n \sin nx - 2\left(\frac{\sin x/2}{x}\right)^2 x L\left(\frac{1}{x}\right) \sum_{2}^{\infty} \Lambda_n \cos nx =$$

$$(17) \qquad = \frac{\sin x}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) \bar{g}(x) - 2\left(\frac{\sin x/2}{x}\right)^2 x L\left(\frac{1}{x}\right) \bar{f}(x).$$

Supposons que $\Sigma n^{-1} L(n) \Lambda_n$ converge Le fait que $L(x)$ est une fonction monotone et croissante implique à fortiori la convergence de la série $\Sigma n^{-1} \Lambda_n$ (les Λ_n étant positifs à partir d'un certain rang), d'où, après une transformation abelienne, résulte la convergence de la série $\Sigma \Delta \Lambda_n \log n$ ([9], § 5.13). Or, Szidon [7] a montré que de $\Sigma \Delta \Lambda_n \log n < \infty$ résulte l'intégrabilité de $\bar{f}(x)$; donc, d'après (iii), $xL(1/x)\bar{f}(x) \in \mathrm{L}(0,\pi)$. Le fait que $L(1/x)\bar{g}(x) \in \mathrm{L}(0,\pi)$ est une conséquence du théorème 2 et de la remarque faite à la fin de la démonstration de ce théorème. De (17) résulte finalement que $x^{-1} L(1/x) f(x) \in \mathrm{L}(0,\pi)$.

Inversement, supposons que $x^{-1} L(1/x) f(x) \in \mathrm{L}(0,\pi)$. Posons

$$s_n = \sum_{1}^{n} \frac{L(\nu)}{\nu}, \quad s_0 = 0.$$

Soit $0 < \delta < \pi$; alors on a, en posant $p = [1/\delta]$,

$$\frac{\pi}{2} \sum_{1}^{p} \frac{L(n)}{n} \Lambda_n = \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{1}^{p} s_n \lambda_n + s_p \Lambda_{p+1} \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{1}^{p} s_n \lambda_n + s_p \left(-\frac{1}{2}\lambda_0 - \sum_{1}^{p} \lambda_n \right) \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{1}^{p} (s_n - s_p) \lambda_n - \lambda_0 s_p \right\}.$$

Étant donné que $L(x)$ croît d'une façon monotone, on a, d'après (iii), $f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$, de sorte que λ_n sont des coefficients de Fourier de la fonction $f(x)$. Donc,

$$\frac{\pi}{2} \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \Lambda_n = \int_0^\pi f(x) \left\{ - s_p + \sum_1^p (s_n - s_p) \cos n x \right\} dx,$$

et si l'on pose

$$\sigma_n = \sum_0^n \cos \nu x = \frac{\sin x/2 + \sin (n + {}^1/_2) x}{2 \sin x/2}, \tag{18}$$

on obtient, après une sommation par parties,

$$\frac{\pi}{2} \sum_1^p \frac{L(n)}{n} \Lambda_n \leqslant \int_0^\pi | f(x) | \left| \frac{L(p+1)}{p+1} \sigma_p(x) - L(1) - \sum_1^p \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant M \frac{L(p+1)}{p+1} \int_0^\pi x^{-1} | f(x) | \, dx + L(1) \int_0^\pi | f(x) | \, dx + \tag{19}$$

$$+ \int_0^\pi | f(x) | \left| \sum_1^p \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x) \right| dx,$$

où M est indépendent de p. On a, comme nous allons le démontrer tout de suite,

$$\sum_1^p \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x) < M_1 \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{20}$$

où M_1 est aussi indépendant de p. Par suite, en tenant compte de $x^{-1} L(1/x) f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$, $L(x) \uparrow$ et $L(x)/x \to 0$ $(x \to \infty)$ les trois termes au second membre de (19) seront bornés, d'où la convergence de $\Sigma n^{-1} L(n) \Lambda_n$.

Enfin, l'inégalité (20) sera demontrée d'une manière analogue à celle employée dans la deuxième partie du théorème 2. On a, en effet, pour

$0 \leqslant x \leqslant \delta$, c. à. d. pour $q \geqslant p$, d'après (18)

$$\left|\sum_{1}^{p} \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x)\right| \leqslant \sum_{1}^{q} \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x) \leqslant \sum_{1}^{q} \frac{L(n+1)}{n+1} \frac{(n+1)x}{\sin x/2} \leqslant$$

$$\leqslant \pi \sum_{1}^{q} L(n+1) \leqslant \pi q L(q+1) \leqslant \tag{21}$$

$$\leqslant M_2 \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'autre part, de $L(x)/x \downarrow 0$, on obtient par une transformation d'Abel, pour $\delta \leqslant x \leqslant \pi$, c. à. d. pour $q \leqslant p$,

$$\left|\sum_{1}^{p} \frac{L(n+1)}{n+1} \sigma_n(x)\right| \leqslant \left|\sum_{1}^{q}\right| + \left|\sum_{q+1}^{p}\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{M_3}{x^2} \frac{L(q+1)}{q+1} \leqslant$$

$$\leqslant M_4 \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui, avec (21), donne (20).

3.6. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME* 5. Du fait que la série de $f(x)$ est absolument et uniformément convergente et que $f(0) = 0$, on arrive à la formule

$$f(x) = -\sum_{1}^{\infty} \lambda_n (1 - \cos n x)$$

et $f(x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$. Supposons que, à partir de l'indice N, les λ_n sont positifs et décroissants. Comme il s'agit de l'intégrabilité au voisinage du point $x = 0$, et comme d'après (iii) $x^{-\gamma} L(1/x)(1 - \cos n x) \in \mathrm{L}(0, \pi)$ pour $1 < \gamma < 3$ et $n = 1, 2, \ldots, N-1$, on peut, sens restreindre la généralité, au lieu de $f(x)$ considérer la fonction

$$F(x) = \sum_{N}^{\infty} \lambda_n (1 - \cos n x),$$

qui n'est pas négative dans $(0,\pi)$. On obtient

$$\int_0^\pi x^{-\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right) F(x)\,dx = \int_0^\pi x^{-\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right)\left\{\sum_N^\infty \lambda_n (1-\cos nx)\right\} dx =$$

$$= \sum_N^\infty \lambda_n \int_0^\pi x^{-\gamma} L\left(\frac{1}{x}\right)(1-\cos nx)\,dx,$$

en tenant compte du fait que les termes de la série ne sont pas negatifs. En posant

$$T_n \stackrel{def}{=} \frac{1}{L(n)} \int_{\frac{1}{n\pi}}^\infty x^{\gamma-2}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) L(nx)\,dx,$$

on aura

$$\int_0^\pi x^{-\gamma} L(1/x) F(x)\,dx = \sum_N^\infty \lambda_n n^{\gamma-1} L(n)\, T_n. \tag{22}$$

D'après (v) et la remarque [5] il s'ensuit pour $1<\gamma<3$ que

$$T_n \to \int_{+0}^\infty x^{\gamma-2}\{1-\cos(1/x)\}\,dx = T>0, \quad n\to\infty. \tag{23}$$

Supposons que $\Sigma n^{\gamma-1} L(n)\lambda_n < \infty$, $1<\gamma<3$. Vu (23) la série $\Sigma n^{\gamma-1} L(n)\lambda_n T_n$ elle aussi est convergente, c. à. d. le second membre dans (22) est fini. Étant donné que $F(x)\geqslant 0$, on obtient $x^{-\gamma} L(1/x) F(x) \in \mathrm{L}(0,\pi)$.

Inversement, soit $x^{-\gamma} L(1/x) F(x) \in \mathrm{L}(0,\pi)$, $1<\gamma<3$. Alors, de (22) il s'ensuit que $\Sigma n^{\gamma-1} L(n)\lambda_n T_n$ converge et, vu (23), les termes de cette série, à partir d'un certain rang, ne sont pas inférieurs aux termes de la série

$$\frac{T}{2}\sum_N^\infty n^{\gamma-1} L(n)\lambda_n.$$

Autrement dit, $\Sigma n^{\gamma-1} L(n)\lambda_n$ converge.

3.7. Pour démontrer l'equiconvergence des séries

$$\Sigma n^{-1} L(n)\Lambda_n \quad \text{et} \quad \Sigma L^2(n)\lambda_n, \tag{24}$$

nous remarquons que la première de ces deux séries converge ou diverge en même temps que la série

$$\Sigma \{L^2(n) - L^2(n-1)\} \Lambda_n. \tag{25}$$

C'est la conséquence immédiate de la condition supplémentaire (2), d'après laquelle

$$L^2(n) - L^2(n-1) \asymp \frac{L(n)}{n}.$$

L'equiconvergence de la série (25) et de la deuxième des séries (24) résulte de

$$\sum_1^p L^2(n)\lambda_n + L^2(p)\Lambda_{p+1} = \sum_1^p \{L^2(n) - L^2(n-1)\}\Lambda_n + L(0)\Lambda_1 \tag{26}$$

Soit $\Sigma \{L^2(n) - L^2(n-1\}\Lambda_n < \infty$. Les deux expressions au premier membre de (26) sont bornées, c. à. d. $\Sigma L^2(n)\lambda_n < \infty$.

Inversement, supposons $\Sigma L^2(n)\lambda_n < \infty$. Alors on a

$$\sum_p^\infty L^2(n)\lambda_n \geqslant L^2(p)\sum_p^\infty \lambda_n = L^2(p)\Lambda_p,$$

c. à. d.

$$L^2(p)\Lambda_p \to 0, \quad p \to \infty.$$

Par suite, d'après (26), $\Sigma \{L^2(n) - L^2(n-1)\}\Lambda_n < \infty$.

(Reçu le 14 septembre 1955)

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Aljančić, R. Bojanić et M. Tomić — Sur la valeur asymptotique d'une classe des intégrales définies. *Publ. Inst. math. Acad. serbe sci.*, **VII** (1954), 81—94.

[2] R. P. Boas — Integrability of trigonometric series (III). *Quart. J. of Math.* (Oxford) (2), **3** (1952), 217—221.

[3] P. Hartman and A. Wintner — On sine series with monotonic coefficients. *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 102—104.

[4] P. Heywood — On the integrability of functions defined by trigonometric series. *Quart J. of Math.* (Oxford) (2), **5** 1954), 71—76,

[5] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière. *Bull. Soc. Math. France*, **LXI** (1933), 55—62.

[6] J. Korevaar, T. V. Ardenne-Ehrenfest and N. G. de Bruijn — A note on slowly convergent oscillating functions. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **23** (1949), 77—86.

[7] S. Szidon — Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen. *Math. Zeitschrift*, **10** (1921), 118—135.

[8] W. H. Young — On the Fourier series of bounded functions. *Proc. London. Math. Soc.*, **12** (1913), 41—70.

[9] A. Zygmund — Trigonometrical series, Warszawa—Lwów, 1935.