DEUX THÉORÈMES DE TYPE MERCERIEN

par

VLADETA VUČKOVIĆ (Zrenjanin)

SOMMAIRE — De $(N, p_n)-\lim \{s_{n-1}+c(s_n-s_{n-1})\}=\sigma$ on conclut que $(N, p_n)-\lim s_n=\sigma$ toutes les fois que $\Re\{c\}>1/2$. Le même pour (A)-lim.

1. Soit

$$s_n=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \tag{1.1}$$

la suite des sommes partielles de la série Σa_ν et

$$\sigma_n=\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu + c\, a_n, \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{1.2}$$

D'après un théorème de G. Pólya (c. Pólya [1] et Pólya–Szegö [4] 3. Teil, Aufgabe 48) de $\sigma_n \to \sigma$, $n \to \infty$, et $\Re\{c\}>1/2$ (ou bien $c=0$) il s'ensuit que $s_n \to \sigma$, $n \to \infty$.

Dans cette note nous nous proposons d'étudier des théorèmes où la convergence de la suite σ_n est remplacée par la sommabilité, en particulièr par celle de Nörlund et d'Abel. Notons que Andersen [2] avait déjà établi un théorème analogue en montrant que la sommabilité (C, k) de la suite

$$s_n + q \cdot \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu$$

implique celle de la suite s_n toutes les fois que $q>-1$.

Soit (N, p_n) un procédé de Nörlund, régulier et tel que

$$P_n=p_0+p_1+\ldots+p_n \to \infty,\ n \to \infty$$

$$p_0>0,\ p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n \geqslant 0.$$

Nous allons établir les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *De*

$$(N, p_n) - \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \tag{1.3}$$

et $\Re\{c\} > 1/2$ (*ou bien* $c = 0$), *il s'ensuit*

$$(N, p_n) - \lim_{n\to\infty} s_n = \sigma. \tag{1.4}$$

THÉORÈME 2. *De*

$$(A) - \lim \sigma_n = \sigma \tag{1.6}$$

et $\Re\{c\} > 1/2$ (*ou bien* $c = 0$), *il s'ensuit*

$$(A) - \lim s_n = \sigma. \tag{1.6}$$

2. Tandis que la démonstration du théorème 1 est un peu laborieuse, celle du théorème 2 peut se faire en quelques lignes. En posant

$$\alpha = c/(c-1), \tag{2.1}$$

(le cas $c = 1$ étant, comme trivial, exclu), avec $|\alpha| > 1$, ce qui correspond à $\Re\{c\} > 1/2$, on peut écrire la suite σ_n comme suit:

$$\sigma_n = (s_n \alpha^{n+1} - s_{n-1} \alpha^n)/(\alpha^{n+1} - \alpha^n), \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad s_{-1} = 0. \tag{2.2}$$

Le système (2.2) peut être résolu très facilement; on obtient

$$s_n = \frac{\alpha - 1}{\alpha^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu \alpha^\nu = \sigma_n - \frac{\sigma_0}{\alpha^{n+1}} + \sum_{\nu=0}^{n-1} (\sigma_\nu - \sigma_{\nu+1}) \alpha^{\nu-n}. \tag{2.3}$$

De (2.3) on peut conclure: si la série

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n. \tag{2.4}$$

converge pour $|x| < 1$, il en sera de même avec la série

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n, \tag{2.5}$$

et on a

$$\psi(x) = \Phi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} (\sigma_\nu - \sigma_{\nu+1}) \alpha^{\nu-n} \right\} - \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\alpha^{n+1}},$$

ou, après une légère modification,

$$\psi(x) = \Phi(x) + \frac{x}{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_n - \sigma_{n+1}) x^n \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\alpha^n} \right\} - \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\alpha^{n+1}}. \tag{2.6}$$

Or, en vertu des suppositions du théorème 2 on a

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x)\, \Phi(x) = \lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n x^n = \sigma$$

et, à fortiori,

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_n - \sigma_{n+1})\, x^n = 0.$$

La série $\Sigma\, x^n/\alpha^n$ converge au point $x = 1$ (car $|\alpha| > 1$) et on a aussi

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n/\alpha^n = 0.$$

En multipliant (2.6) par $(1-x)$ et en prenant $x \to 1-0$, on a enfin

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x)\, \psi(x) = \lim_{x \to 1-0} (1-x)\, \Phi(x) = \sigma, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

3. Avant de passer à la démonstration du théorème 1, nous allons établir un lemme sur l'inclusion, dont nous auront besoin plus tard.

Soit (c_ν^i) la matrice d'un procédé régulier et normal, dont les éléments satisfont alors aux relations:

$$c_\nu^i = 0, \quad \nu > i, \quad c_i^i \neq 0. \tag{3.1}$$

$$\gamma_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu^i| < H \qquad (H \text{ ne dépendant pas de } i) \tag{3.2}$$

$$c_\nu^i \to 0, \quad i \to \infty, \qquad \text{pour tout } \nu \text{ fixé}, \tag{3.3}$$

$$\Gamma_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^i \to 1, \quad i \to \infty. \tag{3.4}$$

(N, p_n) soit un procédé de Nörlund régulier, c.-à.-d.

$$\begin{gathered} p_n/P_n \to 0, \quad n \to \infty, \\ P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n\,; \quad (p_0 > 0, \quad p_1, p_2, \ldots p_n \geqslant 0). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Formons les séries (convergentes pour x convenablement choisi)

$$\begin{gathered} p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \\ c^i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^i x^n \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \\ C^i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^i x^n \quad \text{avec} \quad C_n^i = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^i, \end{gathered} \tag{3.6}$$

et les quotients

$$k^i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^i x^n = \frac{c^i(x)}{p(x)} = \frac{C^i(x)}{P(x)}\,, \tag{3.7}$$

car $p(x) = (1-x)P(x)$ et $c^i(x) = (1-x)C^i(x)$.

Remarquons que $C_n^i = C_i^i$, pour $n \geqslant i$, et que

$$c_n^i = k_0^i p_n + k_1^i p_{n-1} + \ldots + k_n^i p_0,$$

$$C_n^i = k_0^i P_n + k_1^i P_{n-1} + \ldots + k_n^i P_0\,.$$

Posons enfin pour une suite quelconque $\{\sigma_n\}$:

$$t_i = \sum_{n=0}^{i} c_{i-n}^i \sigma_n \tag{3.8}$$

et

$$N_i = \frac{1}{P_i} \sum_{n=0}^{i} p_n \sigma_{i-n}\,. \tag{3.9}$$

Alors, nous pouvons établir le

LEMME: *Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'inclusion:*

„De $N_i \to \sigma$, $i \to \infty$ il s'ensuit que $t_i \to \sigma, i \to \infty$“

sont:

$$|k_i^i| P_0 + |k_{i-1}^i| P_1 + |k_{i-2}^i| P_2 + \ldots + |k_0^i| P_i < H, \tag{3.10}$$

H ne dépandant pas de i, et

$$k_{i-\nu}^i P_\nu \to 0, \quad i \to \infty, \quad \nu = 0, 1, \ldots, i. \tag{3.11}$$

Si $P_n \to \infty$, $n \to \infty$, la condition (3.11) *est superflue.*

Nous n'insisterons point ici sur la démonstration de ce lemme, car elle se fait à peu près de la même manière que celle d'inclusion des deux procédés réguliers de Nörlund, qu'on trouve dans le livre connu de Hardy [3].

4. Passons maintenant à la démonstration du théorème 1. De (2.3) on déduit que la moyenne de Nörlund de la suite $\{s_n\}$ a la forme

$$T_i = \sum_{\nu=0}^{i} p_\nu\, s_{i-\nu}/P_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{i-\nu}^i \sigma_\nu, \tag{4.1}$$

avec

$$c_{i-\nu}^{i} = \frac{\alpha^{\nu} - \alpha^{\nu-1}}{P_i} \sum_{k=\nu}^{i} \frac{p_{i-k}}{\alpha^k}, \qquad \nu \leqslant i,$$
(4.2)
$$c_{\nu}^{i} = 0, \qquad \nu > i.$$

La forme de T_i étant la même que celle de t_i dans (3.8), pour pouvoir appliquer le lemme du № 3 nous devons d'abord prouver que le procédé normal (c_ν^i), avec c_ν^i définis par (4.2), est régulier.

De (4.2) on, a pour $\nu \leqslant i$,

$$c_\nu^i = (\alpha - 1) \cdot \frac{P_\nu}{P_i} \cdot \left\{p_0 \frac{1}{\alpha^{\nu+1}} + p_1 \frac{1}{\alpha^\nu} + \ldots + p^\nu \frac{1}{\alpha^1}\right\} \Big/ P_\nu,$$

d'où, en tenant compte que $1/\alpha^\nu \to 0$ et que $P_i \to \infty$, il s'ensuit que $c_\nu^i \to 0$, $i \to \infty$ pour tout $\nu = 0,1,\ldots,i$. Alors la condition (3.3) de régularité est satisfaite.

En introduisant

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^{-\nu}, \tag{4.3}$$

on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^i = \frac{\alpha - 1}{P_i} \sum_{\nu=0}^{i} p_{i-\nu} A_{\nu+1} \to 1, \; i \to \infty,$$

car $A_n \to 1/(\alpha - 1)$ et le procédé (N, p_n) est régulier ce qui vérifie la condition (3.4) de régularité.

Quant à la dernière condition (3.2), en introduisant

$$B_n = \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha|^{-\nu} \leqslant 1/(|\alpha| - 1),$$

on a aussitôt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu^i| \leqslant \frac{|\alpha - 1|}{P_i} \sum_{\nu=0}^{i} p_{i-\nu} B_{\nu+1} \leqslant \frac{|\alpha - 1|}{|\alpha| - 1} = H,$$

où H ne dépend pas de i.

Alors le procédé (c_ν^i) est régulier et on peut appliquer le lemme du № 3 pour conclure que, de $N_i \to \sigma$, $i \to \infty$, il s'ensuit que $T_i \to \sigma$, $i \to \infty$.

P_i tendant vers $+\infty$, il faut et il suffit de montrer que (3.10), où k_ν^i sont définis comme dans № 3, moyennant la matrice (c_ν^i) de (4.2), est satisfait.

A cet effet introduisons la fonction

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/\alpha^{n+1}, \tag{4.4}$$

de sorte qu'on a

$$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n. \tag{4.5}$$

Pour $n \leqslant i$ on a

$$C_n^i = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^i = \frac{\alpha - 1}{P_i} \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu A_{n+1-\nu},$$

d'où

$$C^i(x) = \frac{\alpha - 1}{P_i} p(x) \cdot \frac{A(x)}{1-x} + \psi_{i+1}(x) \tag{4.6}$$

avec

$$\psi_{i+1}(x) = C_i^i \sum_{\nu=i+1}^{\infty} x^\nu - \frac{\alpha - 1}{P_i} \sum_{\nu=i+1}^{\infty} x^\nu \left(\sum_{k=0}^{\nu} P_k A_{\nu+1-k} \right). \tag{4.7}$$

De (4.6) on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n^i x^n = \frac{C^i(x)}{P(x)} = \frac{\alpha - 1}{P_i} \frac{p(x)}{P(x)(1-x)} A(x) + \frac{\psi_{i+1}(x)}{P(x)}$$

et enfin

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n^i x^n = \frac{\alpha - 1}{P_i} A(x) + \frac{\psi_{i+1}(x)}{P(x)}. \tag{4.8}$$

De (4.8) on tire aussitôt que, pour $n \leqslant i$,

$$k_n^i = \frac{\alpha - 1}{P_i} \cdot \frac{1}{\alpha^{n+1}} \tag{4.9}$$

et alors

$$|k_i^i| P_0 + |k_{i-1}^i| P_1 + \ldots + |k_0^i| P_i \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\alpha - 1|}{P_i} \left\{ \frac{P_0}{|\alpha|^i} + \frac{P_1}{|\alpha|^{i-1}} + \ldots + \frac{P_i}{|\alpha|} \right\} \leqslant \frac{|\alpha - 1|}{|\alpha| - 1} = H,$$

puisque $P_\nu / P_i \leqslant 1$, $\nu \leqslant i$, qui établit (3.10).

Ainsi le théorème 1 est complètement démontré.

(*Reçu le 1 juin 1955*)

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Pólya — Problème. *Arc. de Math. und Phys.* (3) **24** (1916), 282. Solution de S. Sidon, *ibid* (3) **26**, (1917), 68.

[2] A. F. Andersen — Om en Graensevaerdi saetning af J. Mercer. *Math. Tidskrift* (1927), 77—83.

[3] G. Hardy — Divergent Series. Oxford, 1953.

[4] Pólya—Szegö — Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I, Berlin, 1933.