# INVERSION ET INVARIANTES DE LA TRANSFORMATION GÉNÉRALISÉE DE HANKEL

par

B. STANKOVIĆ (Novi Sad)

SOMMAIRE — Une amélioration des résultats connus relatifs à l'inversion de la transformation généralisée de Hankel et la solution d'une équation intégrale homogène par laquelle les invariantes de cette transformation sont donnés.

La transformation de Hankel de la fonction $\overline{h}(x)$ est définie par:

$$\overline{H}(x) = \int_0^\infty \sqrt{x\,y}\, J_\mu(x\,y)\, \overline{h}(y)\, d\,y, \tag{1}$$

où $J_\mu(x)$ est la fonction de Bessel. Par un changement des variables:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2\xi}, \quad \frac{1}{\sqrt{y}}\overline{h}(y) = h(\eta), \\ y &= \sqrt{2\eta}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\overline{H}(x) = H(\xi) \end{aligned} \tag{2}$$

la relation (1) se transforme en

$$H(\xi) = \int_0^\infty J_\mu(2\sqrt{\xi\,\eta})\, h(\eta)\, d\,\eta. \tag{3}$$

Quand on parle de la transformation de Hankel, on pense souvent justement à la relation (3).

Cette transformation (1) a été généralisée de diverses façons. Ainsi R. P. Agarwal [1] a considéré une généralisation en prenant pour noyau l'expression:

$$2^{-\mu}(x\,y)^{\mu+1/2}\, \Phi\left(\mu+1,\ \nu;\ -\frac{x^2 y^2}{4}\right),$$

c'est-à-dire il a considéré la transformation:

$$\overline{G}(x) = 2^{-\mu} \int_0^\infty (x\,y)^{\mu+1/2}\, \Phi\left(\mu+1, \nu; -\frac{x^2\,y^2}{4}\right) \overline{g}(y)\,dy, \tag{4}$$

où $\Phi(\mu, \nu; z)$ est la fonction de M. Wright [5], définie par

$$\Phi(\mu, \nu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\mu+\nu k)}.$$

Pour $\nu = 1$ ce noyau se réduit au noyau de Hankel ordinaire.

Dans ce qui suit, nous considérons la transformation:

$$G(x) = \int_0^\infty \Phi(\mu+1, \nu; -x^\nu y)\, y^\mu g(y)\,dy, \quad \mu > -1, \ \nu > 0 \tag{5}$$

et qui se réduit à (3) pour $\nu = 1$. Le noyau de cette transformation (5) satisfait à la relation:

$$\int_0^\infty x^\mu\, \Phi(\mu+1, \nu; -y\,x^\nu)\, e^{-xs}\,dx = \frac{1}{s^{\mu+1}}\, e^{-y/s^\nu}. \tag{6}$$

Si nous nous rappelons la relation bien connue

$$\int_0^\infty (x/y)^{\mu/2}\, J_\mu(2\sqrt{xy})\, e^{-xs}\,dx = \frac{1}{s^{\mu+1}}\, e^{-y/s},$$

pour le noyau de la transformation (3), nous voyons comment cette généralisation s'effectue sur leurs transformées de Laplace.

Les fonctions $g(x)$ et $G(x)$ de la transformation (5) sont liées avec $\overline{g}(x)$ et $\overline{G}(x)$ de (4) par les relations:

$$G(x)\, x^{\frac{\mu\nu}{2}} = x^{-\nu/4}\, \overline{G}(\sqrt{2}\, x^{\nu/2}), \quad g(x)\, x^{\frac{\mu\nu}{2}} = x^{\mu(\nu-1)-\nu/4}\, \overline{g}(\sqrt{2x}). \tag{7}$$

En particulier, pour $\nu = 1$, ces formules se réduisent aux formules (2).

## 1. *INVERSION DE LA TRANSFORMATION GÉNÉRALISÉE DE HANKEL*

R. P. Agarwal, dans l'article que nous venons de citer, propose le théorème suivant, qu'il appelle théorème fondamental:

THÉORÈME A. *Si*

$$\overline{G}(x) = 2^{-\mu} \int_0^\infty (x\,y)^{\mu+1/2}\, \Phi\left(\mu+1,\, \nu;\, -\frac{x^2\, y^2}{4}\right) \overline{g}(y)\, dy,$$

*alors*

$$\overline{g}(x) = \frac{1}{\nu}\, 2^{\mu - 2\frac{1+\mu}{\nu} + 3} \int_0^\infty (x\,y)^{\frac{2}{\nu}(1+\mu)-\mu-3/2}\, \Phi\left(\frac{1+\mu}{\nu},\, 1/\nu;\, -\frac{x^{2/\nu}\, y^{2/\nu}}{4}\right) \overline{G}(y)\, dy,$$

*à condition que* $\overline{g}(x) = O(e^{-x^2})$ *pour x grand,* $\overline{g}(x) = O(x^\eta)$ *pour x petit avec* $\Re(\eta + \mu + 3/2) > 0$ *et* $\Re(\nu) > 0$, $\Re(\mu) > -1$.

Il prouve ce théorème en s'appuyant sur le lemme suivant:

LEMME A. *Si*

$$\frac{1}{s} \overline{L}(s^{-\nu}) = \int_0^\infty e^{-st}\, \overline{l}(t)\, dt,$$

*alors pour* $\nu > 0$ *et* $\Re(\mu) > -1$, *on a*

$$s^{-\mu+1/\nu-1}\, \overline{L}(s) \subset x^\mu \int_0^\infty \Phi(\mu+1,\, 1/\nu;\, -x^{1/\nu} t)\, \overline{l}(t)\, dt,$$

*en admettant que* $\overline{l}(x)$ *soit une image et que l'intégrale converge.*

La condition du théorème A, $\overline{g}(x) = O(e^{-x^2})$ pour $x$ grand, est très grave. Nous nous proposons de donner l'inversion de la transformation (5) avec moins de conditions. Puisque les fonctions de la transformation (5) et (4) sont liées, cette inversion sera valide pour la transformation (4) aussi.

LEMME I. *Soit* $l(x)$ *une fonction-L* *) *et*

$$L(x) = x^\mu \int_0^\infty \Phi(\mu+1, \nu;\, -x^\nu y)\, l(y)\, dy, \quad \mu > -1,\ \nu > 0; \tag{1.1}$$

---

*) En ce qui concerne la définition des fonctions-$L$ et -$l$, voir [2] p. 32 et 34.

*si l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-st}\, l(t)\, dt = \lambda(s)$$

*converge pour* $\Re(s) \geqslant x_0$, *il en sera de même de*

$$\int_0^\infty e^{-st} L(t)\, dt = \Lambda(s)$$

*pour* $\Re(s) > 0$ *et*

$$\Lambda(s) = \frac{1}{s^{\mu+1}} \lambda(s^{-\nu}). \tag{1.2}$$

Démonstration du lemme I. L'intégrale (6) converge uniformément dans l'intervalle $0 < \xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_2$. Ce-ci résulte du théorème fondamental de la transformation de Laplace après un changement de variable $z = tx^{1/\nu}$ et du comportement de la fonction $\Phi$ [5]. La fonction $l(x)$, comme une fonction-$L$, est bornée, excepté en un nombre fini de points, où l'intégrale est absolument convergente. Compte tenu de ces faits, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\xi_2} l(y)\, dy \int_0^\infty e^{-st}\, t^\mu \Phi(\mu+1, \nu; -yt^\nu)\, dt = \\ = \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_{\xi_1}^{\xi_2} t^\mu \Phi(\mu+1, \nu; -yt^\nu)\, l(y)\, dy. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Si maintenant dans la dernière relation $\xi_1 \to 0$, $\xi_2 \to \infty$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_1 \to 0,\, \xi_2 \to \infty} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{s^{\mu+1}} e^{-y/s^\nu}\, l(y)\, dy = \\ = \lim_{\xi_1 \to 0,\, \xi_2 \to \infty} \int_0^\infty e^{-st} \left[ L(t) - \int_{\xi_2}^\infty - \int_0^{\xi_1} t^\mu \Phi(\mu+1, \nu; -yt^\nu)\, l(y)\, dy \right] dt, \end{aligned} \tag{1.4}$$

en ayant recours à la convergence de l'intégrale (1.1).

Nous avons supposé que la fonction $l(x)$ a sa transformation de Laplace convergente pour $\Re(s) \geqslant x_0$; il en résulte que l'intégrale

$$\frac{1}{s^{\mu+1}} \int_0^\infty e^{-t/s^\nu} \, l(t) \, dt$$

et le second membre de la relation (1.4), converge pour $\Re(s^{-\nu}) \geqslant x_0$. D'après une propriété de la transformation de Laplace, ces intégrales convergent aussi pour $\Re(s) > 0$.

Il reste à démontrer que

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_2 \to \infty} I(\xi_2) &= \lim_{\xi_2 \to \infty} \int_0^\infty e^{-st} \, dt \int_{\xi_2}^\infty t^\mu \, \Phi(\mu + 1, \nu; - yt^\nu) \, l(y) \, dy = 0 \, , \\ \lim_{\xi_1 \to 0} I(\xi_1) &= \lim_{\xi_1 \to 0} \int_0^\infty e^{-st} \, dt \int_0^{\xi_1} t^\mu \, \Phi(\mu + 1, \nu; - yt^\nu) \, l(y) \, dy = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pour cela il suffit de montrer que, pour chaque $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver un nombre $\xi_2$ tel que

$$| I(\xi_2'') - I(\xi_2') | < \varepsilon,$$

pour chaque $\xi_2'' > \xi_2' > \xi_2$; ou, pour la deuxième relation (1.5), qu'on peut trouver un nombre $\xi_1$ tel que

$$| I(\xi_1'') - I(\xi_1') | < \varepsilon,$$

pour chaque $\xi_1' < \xi_1'' < \xi_1$.

La démonstration, en ses lignes générales, se fait de la même manière pour l'un que pour l'autre cas et nous la donnerons seulement pour la première intégrale (1.5), en ayant recours aux relations (6), (1.3) et que $l(x)$ est une fonction-$L$

$$\begin{aligned} | I(\xi_2'') - I(\xi_2') | &= \left| \int_{\xi_2'}^{\xi_2''} l(y) \, dy \int_0^\infty e^{-st} \, t^\mu \, \Phi(\mu + 1, \nu; - yt^\nu) \, dt \right| = \\ &= \left| \int_{\xi_2'}^{\xi_2''} \frac{1}{s^{\mu+1}} \, e^{-y/s^\nu} \, l(y) \, dy \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Maintenant, il est clair que la relation (1.4) peut s'écrire

$$\frac{1}{s^{\mu+1}} \int_0^\infty e^{-y/s^\nu}\, l(y)\, dy = \int_0^\infty e^{-st} L(t)\, dt$$

et on en déduit facilement l'affirmation du lemme I.

THÉORÈME I. *$G(x)$ étant la transformation généralisée de Hankel de la fonction $g(x)$, c'est-à-dire*

$$G(x) = \int_0^\infty \Phi(\mu + 1, \nu; -x^\nu y)\; y^\mu g(y)\, dy,$$

*alors*

$$x^{(\mu+1)(\nu-1)/\nu} g(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{\mu+1}{\nu}, 1/\nu; -x^{1/\nu} y\right) y^\mu G(y)\, dy,$$

*lorsque cette dernière intégrale converge et lorsque $x^\mu g(x)$ est une fonction-L.*

Démonstration. Du lemme I il s'ensuit que la fonction $x^\mu G(x)$ a aussi sa transformation de Laplace et que

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s^{\mu+1}} \Upsilon(s^{-\nu}),$$

où

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-st} G(t)\, t^\mu\, dt,$$

$$\Upsilon(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, t^\mu\, dt.$$

Changeons $s$ en $s^{-1/\nu}$; il en résulte:

$$\frac{1}{s^{\frac{\mu+1}{\nu}}} \Gamma(s^{-1/\nu}) = \Upsilon(s).$$

Reprenons pour la deuxième fois le lemme I et, compte tenu de l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Laplace, nous obtiendrons de cette dernière relation l'affirmation du théorème I.

Nous voyons qu'une condition semblable à celle: $g(x) = O(e^{-x^2})$ pour $x$ grand, du théorème A n'a pas apparu dans le théorème I. En effet, nous avons supposé que l'intégrale

$$\int_0^\infty \Phi(\mu + 1, \nu; -x^\nu y)\, y^\mu g(y)\, dy, \qquad \mu > -1,\ \nu > 0$$

converge et on peut imaginer que dans la convergence de cette intégrale se cache une condition équivalente à celle du théorème A. Mais en observant que

$$|\Phi(\mu, \nu; -yx^\nu)| < M(yx^\nu)^b\, e^{a(yx^\nu)^{\frac{1}{1+\nu}}},$$

où

$$b = \frac{1 - 2\mu}{2(\nu + 1)}, \qquad a = \frac{1 + \nu}{\nu}\, \nu^{\frac{1}{1+\nu}} \cos \pi/(\nu + 1),$$

il devient évident que la condition du théorème A est évitée.

## 2. *INVARIANTES DE LA TRANSFORMATION GÉNÉRALISÉE DE HANKEL*

Les invariantes de la transformation (5) sont les solutions de l'équation

$$g(x) = \int_0^\infty \Phi(\mu + 1, \nu; -x^\nu y)\, y^\mu g(y)\, dy, \quad \nu > 0,\ \mu > -1. \tag{2.1}$$

THÉORÈME II. *Lorsque* $x^\mu g(x)$ *est une fonction-L, la solution générale de l'équation homogène* (2.1) *satisfait à la relation*

$$\int_0^\infty e^{-sx} x^\mu g(x)\, dx = s^{-\frac{\mu+1}{\nu+1}}\, \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln(-\nu)}\right), \tag{2.2}$$

*où* $\omega(x)$ *est une fonction périodique de période* 1, *c'est-à-dire* $\omega(x + 1) = \omega(x)$, *telle que la fonction définie par* (2.2) *soit une fonction-l.*

Démonstration. $\gamma(s)$ étant la transformation de Laplace de la fonction $x^\mu g(x)$, en appliquant le théorème I à l'équation (2.1), on en déduit l'équation fonctionnelle:

$$\gamma(s) = \frac{1}{s^{\mu+1}}\, \gamma(s^{-\nu}). \tag{2.3}$$

Désignons par $K(s) = s^{\frac{\mu+1}{\nu+1}} \gamma(s)$; alors l'équation fonctionnelle précédente se transforme en

$$K(s) = K(s^{-\nu});$$

c'est une équation fonctionnelle d'Abel. Nous obtenons facilement ([6], p. 111—112) la solution générale de cette équation,

$$K(s) = \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln(-\nu)}\right),$$

en utilisant un théorème d'Abel. La fonction $\omega(x)$ satisfait à la relation $\omega(x+1) = \omega(x)$. D'où la solution générale de l'équation (2.3) est:

$$\gamma(s) = s^{-\frac{\mu+1}{\nu+1}} \omega\left(\frac{\ln \ln s}{\ln(-\nu)}\right). \tag{2.4}$$

Avec le théorème II nous avons ramené la discussion de l'équation homogène (2.1) à une équation bien connue de première espèce (2.2). Comme nous savons son inversion, le théorème II nous donne, en effet, la solution générale de l'équation intégrale homogène (2.1).

Dans ce qui suit nous proposons des solutions explicites de l'équation (2.1).

THÉORÈME III. *Lorsque $w(x)$ est une fonction périodique de période 1 et telle que $x\, w\left(\frac{\ln x}{\ln(-\nu)}\right)$ est une fonction-l, $\mu > \nu > 0$, la solution de l'équation (2.2) est donnée par*

$$x^{\mu} g(x) = x^{a} \int_{0}^{\infty} t\, w\left(\frac{\ln t}{\ln(-\nu)}\right) \frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(1+a+t)}\right\} dt,$$

*où* $a = \dfrac{\mu+1}{\nu+1} - 1$.

Avant de passer à la démonstration du théorème III nous établirons les lemmes suivants:

LEMME II. *Pour chaque $0 < u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ et $\Re(s) > 0$ nous avons*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-st} \frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{t^u}{\Gamma(1+u)}\right\} dt = \frac{1}{s} e^{-u \ln s} \ln^2 s. \tag{2.5}$$

Démonstration du lemme II. Désignons par

$$D_i(u) = \frac{d^i}{du^i}\left\{\frac{t^u}{\Gamma(1+u)}\right\}, \quad i = 1, 2;$$

alors

$$D_1(u) = \frac{t^u}{\Gamma(1+u)}\{\ln t - \psi(u+1)\}, \tag{2.6}$$

et

$$D_2(u) = \frac{t^u}{\Gamma(1+u)}\{[\ln t - \psi(u+1)]^2 - \psi'(u+1)\}, \tag{2.7}$$

où $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$.

Les fonctions $D_1(u)$ et $D_2(u)$ ont leurs transformations de Laplace, convergentes par rapport à $u$ dans l'intervalle $0 < u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ et $\Re(s) \geqslant x_0 > 0$, et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\right\}dt &= \frac{d^2}{du^2}\int_0^\infty e^{-st}\frac{t^u}{\Gamma(u+1)}dt = \\ &= \frac{d^2}{du^2}\frac{1}{s^{u+1}} = \\ &= \frac{1}{s}e^{-u\ln s}\ln^2 s,\end{aligned}$$

ce qui est l'énoncé du lemme II.

LEMME III. *Soit $a(x)$ une fonction-L dont la transformée de Laplace $\alpha(s)$ converge pour $\Re(s) \geqslant x_0$; alors la transformée de Laplace $\beta(s)$ de la fonction:*

$$b(x) = \int_0^\infty a(t)\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(t+1)}\right\}dt \tag{2.8}$$

*converge pour $\Re(s) \geqslant e^{x_0}$ et est liée à $\alpha(s)$ par la relation*

$$\beta(s) = \frac{\ln^2 s}{s}\alpha(\ln s). \tag{2.9}$$

Démonstration du lemme III. Sachant que $a(x)$ est une fonction-$L$ et que l'intégrale de Laplace de la fonction $D_2(u)$ est uniformément convergente par rapport à $u$ dans l'intervalle $0 < u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, nous pouvons écrire

$$\int_{u_1}^{u_2} a(u)\,du \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\right\} dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\,dt \int_u^{u_2} a(u) \frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\right\} du .$$

Lorsque $u_1 \to 0$, $u_2 \to \infty$, en ayant recours au lemme II, nous obtiendrons:

$$\begin{aligned} \frac{\ln^2 s}{s} \int_0^\infty a(u)\, e^{-u \ln s}\, du &= \int_0^\infty e^{-st}\, b(t)\, dt - \\ &- \lim_{u_2 \to \infty} \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_{u_2}^\infty a(u) \frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\right\} du - \\ &- \lim_{u_1 \to 0} \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_0^{u_1} a(u) \frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\right\} du . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous avons supposé que l'intégrale de Laplace de la fonction $a(x)$ converge pour $\Re(s) \geqslant x_0$; il en résulte que le second membre de la dernière relation converge pour $\Re(s) \geqslant e^{x_0}$.

Pour démontrer ce lemme il nous reste seulement de montrer que les intégrales

$$J_1(u_1) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_0^{u_1} a(u) \frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\right\} du ,$$

$$J_2(u_2) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_{u_2}^\infty a(u) \frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\right\} du$$

tendent vers zéro avec $u_1 \to 0$ et $u_2 \to \infty$.

Nous allons établir ce fait seulement pour $J_1(u_1)$ car pour $J_2(u_2)$ on peut le faire de la même manière.

Ainsi pour $J_1(u_1)$ on peut toujours trouver un nombre $u_1$ tel que

$$|J_1(u_1'') - J_1(u_1')| = \left| \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int_{u_1'}^{u_1''} a(u) \frac{d^2}{du^2} \left\{ \frac{t^u}{\Gamma(u+1)} \right\} du \right| =$$

$$= \left| \frac{\ln^2 s}{s} \int_{u_1'}^{u_1''} a(u)\, e^{-u \ln s}\, du \right| =$$

$$\leqslant \left| \frac{\ln^2 s}{s} \right| \left| e^{-u_1 \ln s} \right| \int_{u_1'}^{u_1''} |a(u)|\, du < \varepsilon,$$

pour tous $u_1 > u_1'' > u_1' > 0$; c'est-à-dire

$$\lim_{u_1 \to 0} J_1(u_1) = 0.$$

On peut donc écrire l'équation (2.10)

$$\int_0^\infty e^{-st}\, b(t)\, dt = \frac{\ln^2 s}{s}\, \alpha(\ln s),$$

ce que nous voulions démontrer.

LEMME IV. *Lorsque la fonction $a(x)$ a sa transformation de Laplace convergente pour $\Re(s) \geqslant x_0 > 0$, l'intégrale*

$$\int_0^\infty a(u) \frac{d^2}{du^2} \left\{ \frac{x^u}{\Gamma(u+1)} \right\} du$$

*converge pour tout $x > 0$.*

Démonstration du lemme IV. Commençons par l'intégrale

$$\int_0^{\omega} a(u)\frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\right\}du = \int_0^{\omega} e^{-x_0 u}\, a(u)\, e^{x_0 u}\frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\right\}du =$$

$$= e^{x_0\omega}\frac{d^2}{d\omega}\left[\frac{x^{\omega}}{\Gamma(\omega+1)}\right]J(\omega) - \tag{2.11}$$

$$-\int_0^{\omega} J(u)\, e^{x_0 u}\left\{x_0 D_2(u) + D_3(u)\right\}du,$$

où

$$J(u) = \int_0^u e^{-x_0 t}\, a(t)\, dt.$$

La limite de l'intégrale $J(u)$, lorsque $u \to \infty$, existe parce que $a(x)$, comme il a été supposé, a sa transformation de Laplace convergente pour $\Re(s) \geqslant x_0$, c'est-à-dire

$$\lim_{u\to\infty} J(u) = M(x_0), \qquad \lim_{u\to 0} J(u) = 0.$$

Il reste à établir le comportement des fonctions $D_2(u)$ et $D_3(u)$ quand $u \to \infty$. La fonction $D_2(u)$ est donnée par la relation (2.7) de laquelle, par différentiation, nous obtenons facilement

$$D_3(u) =$$

$$= \frac{t^u}{\Gamma(u+1)}\left\{[\ln t - \psi(u+1)]^3 - 3\psi'(u+1)(\ln t - \psi(u+1)) - \psi''(u+1)\right\}.$$

Il est connu que $\psi(u) \sim \ln u$, $u \to \infty$. $\psi'(u)$ est donné par une série uniformément convergente

$$\psi'(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(u+k)^2},$$

d'où il vient: $\psi'(u) \to 0$, $u \to \infty$.

De la même manière nous avons:

$$\psi''(u) = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(u+k)^3},$$

et $\psi''(u) \to 0$, $u \to \infty$.

Il en résulte:

$$| D_2(u) | \leqslant M^2 e^{-(u+1/2)\ln(u+1)+u} x^u,$$

$$| D_3(u) | \leqslant M^3 e^{-(u+1/2)\ln(u+1)+u} x^u,$$

où

$$M = C[\ln x - \psi(u+1)].$$

En ayant recours à ces inégalités pour $D_2$ et $D_3$ et observant que $J(u)$ a sa limite, nous pouvons écrire

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_0^{\omega} a(u) \frac{d^2}{du^2}\left\{\frac{x^u}{\Gamma(u+1)}\right\} du \leqslant N,$$

pour tout $x > 0$.

LEMME V. *Si $w(x)$ est une fonction périodique de periode 1 et $x w\left(\frac{\ln x}{\ln(-\nu)}\right)$ une fonction-L, alors*

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\, t\, w\left(\frac{\ln t}{\ln(-\nu)}\right) dt = \frac{1}{s^2}\, \omega\left(\frac{\ln s}{\ln(-\nu)}\right),$$

*où $\omega(x)$ est aussi une fonction périodique de période* 1.

Démonstration du lemme V. Faisons dans la relation qu'il s'agit de démontrer un changement de variable $t$: $ts = u$ et nous obtiendrons:

$$\int_0^{\infty} e^{-u}\, u\, w\left(\frac{\ln u}{\ln(-\nu)} - \frac{\ln s}{\ln(-\nu)}\right) du = \omega\left(\frac{\ln s}{\ln(-\nu)}\right).$$

Désignons par $x = \dfrac{\ln s}{\ln(-\nu)}$

$$\int_0^{\infty} e^{-u}\, u\, w\left(\frac{\ln u}{\ln(-\nu)} - x\right) du = \omega(x),$$

d'où l'on voit que $\omega(x)$ est une fonction périodique de période 1.

D é m o n s t r a t i o n du théorème III. Dans le lemme V nous avons établi la relation

$$\int_0^\infty e^{-st}\, t\, w\left(\frac{\ln t}{\ln(-\nu)}\right) dt = \frac{1}{s^2}\, \omega\left(\frac{\ln s}{\ln(-\nu)}\right).$$

Faisons un changement de variable: $t = y - a$

$$\int_a^\infty e^{-sy}\,(y-a)\, w\left(\frac{\ln(y-a)}{\ln(-\nu)}\right) dy = e^{-as}\,\frac{1}{s^2}\,\omega\left(\frac{\ln s}{\ln(-\nu)}\right)$$

et désignons par

$$h(x) = \begin{cases} (x-a)\, w\left(\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(-\nu)}\right), & x \geqslant a, \\ 0, & x < a; \end{cases}$$

nous aurons

$$\int_0^\infty e^{-sy}\, h(y)\, dy = e^{-as}\,\frac{1}{s^2}\,\omega\left(\frac{\ln s}{\ln(-\nu)}\right).$$

Puisque $h(x)$ est une fonction-$L$, en vertu des lemmes III et IV, nous pouvons écrire

$$\int_0^\infty e^{-sy}\, dy \int_a^\infty h(t)\, \frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{y^t}{\Gamma(t+1)}\right\} dt = s^{-\frac{\mu+1}{\nu+1}}\, \omega\left(\frac{\ln\ln s}{\ln(-\nu)}\right).$$

Comparons maintenant ce résultat avec la relation (2.2) du théorème II et, d'après l'unicité de l'inversion de la transformation de Laplace, nous avons

$$x^\mu g(x) = \int_a^\infty h(t)\, \frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(t+1)}\right\} dt,$$

où

$$x^\mu g(x) = x^a \int_0^\infty t\, w\left(\frac{\ln t}{\ln(-\nu)}\right) \frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(t+a+1)}\right\} dt.$$

Le théorème III est ainsi démontré.

THÉORÈME IV. *Lorsque* $w(x)$ *est une fonction périodique de période* 1 *et telle que* $xw\left(\frac{\ln x}{\ln(-\nu)}\right)$ *est une fonction-L, la fonction* $g(x)$ *définie par*

$$\int_0^x t^\mu g(t)\,dt = x^b \int_0^\infty t\,w\left(\frac{\ln t}{\ln(-\nu)}\right)\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(t+b+1)}\right\}dt,$$

*où* $b = \frac{\mu+1}{\nu+1}$, *est la solution de l'équation* (2.2).

Démonstration du théorème IV. La démonstration est la même que celle du théorème III. Il faut seulement employer la relation connue

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt \int_0^t \tau^\mu g(\tau)\,d\tau = \frac{\Upsilon(s)}{s},$$

où

$$\int_0^\infty e^{-st}\,t^\mu g(t)\,dt = \Upsilon(s).$$

### 3. *INVARIANTES DE LA TRANSFORMATION DE HANKEL*

Plusieurs auteurs ont donné des fonctions spéciales qui sont invariantes de la transformation de Hankel ([3], p. 183). M. Parodi ([4], p. 64—65) au contraire a trouvé, par le calcul opérationel, une solution qui contient une fonction arbitraire.

Nous avons vu que pour $\nu = 1$ de la transformation (2.1), nous obtenons (1.2) et, en conséquence, les théorèmes II, III et IV nous donnent, pour $\nu = 1$, les invariantes de la transformation de Hankel.

*(Reçu le 4 mai 1955)*

## BIBLIOGRAPHIE


[1] R. P. Agarval — Sur une généralisation de la transformation de Hankel. *Ann. Soc. Sc. de Bruxelles*, **64** (1950), 164—168.

[2] G. Doetsch — Handbuch der Laplace — Transformation, Band I, Basel 1950.

[3] W. Magnus und F. Oberhettinger — Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin 1948.

[4] M. Parodi — Equations intégrales et transformation de Laplace. 1950.

[5] E. M. Wright — On the coefficients of power series having exponential singularities. *Journal of the London Math. Soc.*, **8** (1933), 71—79.

[6] B. Stanković — Sur une classe d'équations intégrales singulières. *Zbornik radova Mat. inst.*, **4** (1955), 81—130.