SUR LES PROPIÉTÉS D'UNE CLASSE DE MATRICES

M. STOJAKOVIĆ (Novi Sad)

SOMMAIRE — Dans cet article on démontre la généralisation du théorème suivant du à Stieltjes: „Soit $[g_{ij}]$ la matrice des coefficients d'une forme quadratique définie positive, $[g^{ij}]$ la matrice inverse; alors $g^{ij} > 0$ pour tout $i, j = 1, 2, \ldots, n$ si $g_{ij} < 0$ pour $i \neq j$", et aussi la généralisation relative à la question de positivité des mineurs de la matrice inverse, à savoir:

„Si dans la matrice A_n d'orde $n \times n$ tous les mineurs nondiagonaux d'ordre $k \times k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sont nonpositifs et si les mineurs successifs diagonaux de la matrice associée $a_k(A_n)$, dont les éléments sont les mineurs d'ordre $k \times k$ de la matrice A_n, sont positifs, $a_k(A_n)$ étant indécomposable, alors tous les mineurs d'ordre $k \times k$ de la matrice inverse A_n^{-1} sont positifs".

THÉORÈME I. *Soit* $[g_{ij}]$ *la matrice des coefficients d'une forme quadratique définie positive,* $[g^{ij}]$ *la matrice inverse; alors* $g^{ij} > 0$ *pour tout* $i, j = 1, 2, \ldots n$ si $g_{ij} < 0$ pour $i \neq j$.

Cette proposition, attribuée à Stieltjes [1], a été l'objet des considérations de nombreux auteurs parmi lesquels G. de Rham [2] et E. Egerváry [3] ont donné quelques généralisations et démonstrations nouvelles de ce théorème.

Dans [2] on obtient le résultat mentionné en utilisant la transformation linéaire

$$G_t = G\,t + I\,(1-t) \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

et en s'appuyant sur la continuité de celle-ci.

Dans [3] on décompose d'abord successivement la matrice donnée A_n d'ordre $n \times n$ en produit ABC de deux matrices triangulaires A, C et une matrices diagonale B dont tous les éléments diagonaux sont positifs. Comme l'on a

$$A = I - M, \quad C = I - N, \quad M^n = N^n = 0; \quad M^k \neq 0, \quad N^k \neq 0 \quad \text{pour} \quad k < n$$

où M, N sont les matrices dont tous les éléments sont positifs, on a

$$A_n^{-1} = (ABC)^{-1} = (I - N)^{-1} B^{-1} (I - M)^{-1} =$$
$$= (I + N + \ldots + N^{n-1}) B^{-1} (I + M + \ldots + M^{n-1})$$

d'où la conclusion énoncée.

Dans [3] on trouve l'énoncé du théorème généralisé équivalent à ce qui suit:

THÉORÈME 2. *Si tous les mineurs successifs diagonaux d'une matrice carrée indécomposable A_n sont positifs et si les éléments nondiagonaux sont nonpositifs, alors tous les éléments de la matrice inverse A_n^{-1} sont positifs.*

La littérature classique sur cette question est assez abondante ([4], [5], [6]) mais néanmoins l'intérêt s'en accroit aujourd'hui ([7], [8], [9], [10], [11], [12]) du fait d'applications nombreuses des matrices nonnégatives dans la recherche des phénomènes stochastiques (chaînes de Markoff) et aussi dans la recherche des systèmes dynamiques élastiques.

Nous donnons ici la démonstration simple du théorème 2 et une généralisation relative à la positivité des mineurs de la matrice inverse.

Partons du lemme suivant:

LEMME. *Soit A une matrice carrée indécomposable d'ordre* $(n-1) \times (n-1)$ *dont tous les mineurs successifs diagonaux sont positifs* (v. [13] p. 338) *et dont les éléments nondiagonaux sont nonpositifs. Soit B la matrice carrée d'ordre $n \times n$*

$$B = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & A \end{bmatrix},$$

où $[C_1\, C_2]$ est une matrice ligne et $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix}$ une matrice colonne dont au moins un élément est négatif, les autres étant nonpositifs; alors $\det B < 0$.

Démonstration du lemme.

Développons $\det B$ suivant les éléments $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ de la première ligne de B. On obtient

$$\det B = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{1i} \det B_{1i},$$

où B_{1i} est la matrice déduite de la matrice B en supprimant dans celle-ci la première ligne et la i-ème colonne. Si dans B_{1i} on amène la $(i-1)$-ième ligne à la place de la première ligne, on obtient la matrice B_{1i}^* d'ordre $(n-1) \times (n-1)$ qui remplit toutes les conditions auxquelles était assujetie la matrice B. Comme

$$\det B_{1i}^* = (-1)^{i-2} \det B_{1i},$$

l'on a

$$\det B = \sum_{i=1}^{n} (-a_{1i}) \det B^*_{1i}.$$

Or, a_{1i} étant nonnégatif, mais $a_{1i} < 0$ pour au moins un $i = j, j = 1, 2, .. n$, on aura la conclusion $\det B < 0$ pour la matrice B d'ordre $n \times n$, si la conclusion est valable pour une telle matrice d'ordre $(n-1) \times (n-1)$. Mais pour

$$B_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} a_{22} > 0, & c_{11} \leqslant 0, & c_{12} \leqslant 0, & c_{21} \leqslant 0, \\ c_{11} + c_{12} < 0, & c_{11} + c_{21} < 0 \end{matrix}$$

on a évidemment $\det B_2 < 0$ et la conclusion $\det B < 0$ est ainsi assurée.

Démonstration du théorème 2. Les éléments de la matrice A_n^{-1} sont de mêmes signes que les éléments correspondants de la matrice adjointe $\operatorname{adj} A_n$ et, puisque les éléments de $\operatorname{adj} A_n$ sont les mineurs d'ordre $(n-1) \times (n-1)$ de la matrice A_n, il suffit d'évaluer ceux-ci.

Soit A_{ij} la matrice déduite de la matrice A_n en supprimant dans celle-ci la i-ème ligne et la j-ème colonne. On a $\det A_{ij} > 0$ pour $i = j$ d'après la proposition du théorème (A_{ii} est le mineur diagonal de la matrice A_n). Soit $i < j$ $(i > j)$. Si dans A_{ij} on amène la $(j-1)$-ème (j-ième) ligne et i-ième ($(i-1)$-ième) colonne à la place de la première ligne et de la première colonne respectivement, on obtient la matrice B_{ij} qui remplit les conditions du lemme et, par conséquent, $\det B_{ij} < 0$. Mais en effectuant les opérations de remplacement des lignes et des colonnes dans A_{ij} on change $(i-1)+(j-2)$ fois le signe de $\det A_{ij}$ pour obtenir $\det B_{ij}$ et l'on a

$$(-1)^{i+j-3} \det A_{ij} = \det B_{ij}$$

ou

$$(-1)^{i+j} \det A_{ij} = -\det B_{ij} > 0.$$

$(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ étant l'élément de la matrice $\operatorname{adj} A_n$ et

$$((-1)^{i+j} \det A_{ij}) / \det A_n = \alpha_{ji}$$

l'élément de la matrice A_n^{-1}, la conclusion $\alpha_{ji} > 0$, pour tout $i, j = 1, 2, .., n$, s'en suit.

Voici maintenant un théorème concernant la détermination de signes des mineurs de la matrice inverse d'une matrice.

THÉORÈME 3. *Si dans la matrice A_n d'ordre $n \times n$ tous les mineurs nondiagonaux d'ordre $k \times k$ $(k = 1, 2, .., n)$ sont nonpositifs et si les mineurs successifs diagonaux de la matrice associée $a_k(A_n)$, dont les éléments sont* *les mineurs d'ordre $k \times k$ de la matrice A_n, sont positifs, $a_k(A_n)$ étant indécomposable, alors tous les mineurs d'ordre $k \times k$ de la matrice inverse A_n^{-1} sont positifs.*

D é m o n s t r a t i o n. Formons la matrice associée $a_k(A_n)$ en rangeant les mineurs d'ordre $k \times k$ de la matrice A_n par l'ordre lexicographique. Alors $a_k(A_n)$ remplit les conditions du théorème 2 et, par conséquent, tous les éléments de la matrice $(a_k(A_n))^{-1}$ sont positifs. Mais

$$(a_k(A_n))^{-1} = a_k(A_n^{-1}) \quad \text{(voir [13] p. 26)}$$

et, comme les éléments de $a_k(A_n^{-1})$ sont les mineurs d'ordre $k \times k$ de la matrice A_n^{-1}, la conclusion du théorème s'en suit.

Dans le cas $k = 1$ l'on a $a_1(A_n) \equiv A_n$ et on retombe sur le théorème 2. Dans le cas $k = n - 1$ les rôles des matrices A_n et A_n^{-1} s'échangent mais, comme $(A_n^{-1})^{-1} = A_n$, c'est de nouveau le théorème 2 dont il s'agit ici. En général, les cas $k = l$ et $k = n - l$ $(l = 1, 2, .., n)$ sont équivalents.

(Reçu le 20 avril 1955)

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. J. Stieltjes — Sur les racines de l'équation. *Acta math.*, (1886), 385—400.

[2] G. de Rham — Sur un théorème de Stieltjes relatif à certaines matrices. *Publ. Inst. math. Acad. serbe sci.*, **IV** (1952), 133—44.

[3] E. Egerváry — On a lemma of Stieltjes on matrices. *Acta sci. Szeged*, **XIV** (1954), 99—103.

[4] O. Perron — Über Matrizen. *Math. Ann.*, **64** (1907), 248—63.

[5] G. Frobenius — Über Matrizen aus positiven Elementen. *Sitzber. Ac.* (1909), 514—18.

[6] ———— Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. *Ibidem* (1912), 456—77.

[7] H. E. Goheen — On a lemma of Stieltjes matrices. *Amer math. month.*, **56** (1949), 328—29.

[8] J. L. Mosak -- General equilibrium theory in int. trade. *Cowles Commission monographs* (1944), 49—51.

[9] H. Wielandt — Unzerlegbare nicht negative Matrizen. *Math. Zeitschrift*, **52** (1950), 642—48.

[10] Д. М. Котелянский — К теории неотрицателнюх осцилляционых матриц. *Укр. Маш. журн.* II, 2 (1950), 994—1001.

[11] ———— О некоторых својствах матриц с положителными элементами. *Маш. сб.*, **31** (1952), 497—506.

[12] ———— О некоторых достаточных признаков веществености и простоти матричнога спектра. *Маш. сб.*, **36** (1955), 163 - 69.

[13] Ф. Р. Гантмахер — Теория матриц. Москва, 1954.