SUR LES FACTEURS DE CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER DES FONCTIONS CONTINUES

par

M. TOMIĆ (Beograd)

SOMMAIRE — Deux théorèmes relatifs aux facteurs de convergence des séries de Fourieur des fonctions continues. Les facteures de convergence sont supposés être quasi-convexes. Une application à la sommation des séries de Fourier.

1. Soit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1.1}$$

la série de Fourier de la fonction $f(x)$, supposée intégrable-L dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, et $\{\lambda_\nu\}$ une suite de nombres réels dits facteurs de convergence uniforme de la série (1.1), lorsque la série

$$\frac{1}{2} \lambda_0 a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1.2}$$

est uniformément convergente. Il convient de n'envisager ici que des suites *quasi-convexes,* c'est-à-dire telles que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) |\Delta^2 \lambda_\nu|, \quad \text{où} \quad \Delta^2 \lambda_\nu = \lambda_\nu - 2\lambda_{\nu+1} + \lambda_{\nu+2},$$

soit convergente.

Ceci posé, le but de cette note est de donner quelques compléments au théorème suivant

THÉORÈME 1. *Pour que $\{\lambda_\nu\}$ soit une suite de facteurs de convergence uniforme de la série de Fourier d'une fonction continue dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$, *il suffit qu'elle soit quasi-convexe et que*

$$\lambda_n \lg n = O(1). \tag{1.3}$$

En premier lieu on peut compléter ce résultat en démontrant la réciproque, à savoir:

THÉORÈME 2. *Pour qu'une suite quasi-convexe* $\{\lambda_\nu\}$ *constitue une suite de facteurs de convergence uniforme de la série de Fourier de toute fonction continue dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$, *il faut et il suffit que la relation* (1.3) *ait lieu.*

En second lieu, lorsqu'on suppose connu le module de continuité

$$\omega(t) \overset{def}{=\!=} \underset{o \leqslant x_2 - x_1 \leqslant t}{\operatorname{Max}} \{|f(x_2) - f(x_1)|\}$$

de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, on peut préciser le théorème 1 de la manière suivante.

THÉORÈME 3. *Soient* $\omega(t)$ *le module de continuité de la fonction* $f(x)$ *dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$ *et* $\{\lambda_\nu\}$ *une suite quasi-convexe; toutes les fois que la condition*

$$\omega(1/n)\,\lambda_n \lg n = o(1) \tag{1.4}$$

est satisfaite, la suite $\{\lambda_\nu\}$ *est une suite de facteurs de convergence uniforme de la série de Fourier de la fonction* $f(x)$.

En ce qui concerne le théorème 2, remarquons qu'en posant

$$K(t) \overset{def}{=\!=} \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \cos \nu t$$ [1]

la formule de Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t)\,K(t)\,dt = \frac{\lambda_0 a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \{a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x\},$$

aura également lieu et, lorsque $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) avec $o < a < b < 2\pi$, elle aura lieu uniformément dans tout intervalle $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

Rappelons enfin que le théorème 3 contient le critère de convergence de Dini-Lipschitz (voir [3], p. 30) et se réduit à ce dernier lorsque $\lambda_\nu = 1$ pour tout $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

1.1. Nous appliquerons les derniers résultats à la sommation des séries de Fourier.

Étant donnée une matrice triangulaire infinie

$$(\Lambda) = \lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots \lambda_n^n, \quad \lambda_{n+1}^n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

---

[1] Lorsque la suite $\{\lambda_\nu\}$ est quasi-convexe et tend vers zéro, cette série converge pour tout $x \neq 2k\pi$ et est la série de Fourier d'une fonction $K(t)$ positive et intégrable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. (Voir [3], p. 109).

de nombres réels, nous dirons que la matrice Λ engendre *un procédé de sommation permanent-F* lorsque les sommes

$$U_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.5}$$

tendent uniformément vers $f(x)$ pour chaque fonction continue.

Or, il est connu, d'après un résultat de Nikolsky [4], que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f, x) = f(x), \quad f(x) \in C$$

sont

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt \right| dt = O(1) \tag{1.6}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

En supposant maintenant que λ_k^n *forment une suite quasi-convexe pour que la relation* (1.6) *ait lieu, il faut et il suffit* (d'après le théorème 2) *que*

$$\lambda_n^n \lg n = O(1).$$

En connaissant le module de continuité $\omega(t)$ de $f(x)$ la dernière condition peut être remplacée par une condition tout à fait analogue à celle donnée au théorème 3. En effet, dans § 5 nous démontrerons le

THÉORÈME 4. *Une suite quasi-convexe*[2] $\{\lambda_\nu^n\}$ *dont les coefficients satisfont aux conditions* (1.7) *et*

$$\lambda_n^n \omega(1/n) \lg n = o(1) \tag{1.8}$$

engendre un procédé de sommation permanent-F.

Il est bien connu que la condition $\omega(\delta) = O(1/\lg 1/\delta)$ n'implique pas la convergence de la série de Fourier d'une fonction continue $f(x)$ de même, que cette dernière condition a lieu dans tout intervalle $(0, 2\pi)$ ([3], p. 171). D'après le théorème 4 *une suite quasi-convexe* $\{\lambda_\nu^n\}$ *assujettie à la condition* (1.7), *engendre un procédé de sommation permanent-F, pour chaque fonction continue* $f(x)$ *ayant le module de continuité d'ordre*

$$\omega(\delta) = O(1/\lg 1/\delta),$$

si $\lambda_n^n \to 0$, $n \to \infty$.

---

[2]) Ceci implique que $\sum \left| \lambda_\nu^n - \lambda_{\nu+1}^n \right| = O(1)$, c'est-à-dire que le procédé Λ est aussi permanent au sens ordinaire.

2. En ce qui concerne le théorème 1, remarquons qu'il est la conséquence immédiate du lemme suivant (voir [3] p. 58)

LEMME 1. *Soit* $\{\lambda_\nu\}$ *une suite quasi-convexe tendant vers zéro; pour que la série*

$$\sum \lambda_\nu u_\nu(x)$$

converge uniformément dans l'intervalle (a, b) *il suffit que la suite*

$$s_n(x) \overset{def}{=\!=} \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu(x)$$

y soit uniformément sommable $-(C, 1)$ *et que*

$$\lambda_n s_n(x) \to 0$$

uniformément dans l'intervalle (a, b).

Il suffit, en effet, d'y poser

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} a_0, & \text{pour } n = 0, \\[2ex] a_n \cos n x + b_n \sin n x, & \text{pour } n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

et d'appliquer le théorème classique de Fejér, en remarquant en outre que

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t + x) \frac{\sin(n + 1/2)\, t}{2 \sin t/2}\, dt = o(\lg n)$$

a lieu uniformément dans l'intervalle $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ lorsque $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) (voir [3], p. 32).

Quant au lemme 1, on l'obtient facilement en effectuant la double sommation par partie

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu u_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu + 1)(\Delta^2 \lambda_\nu)\, \sigma_\nu(x) + n(\Delta \lambda_{n-1})\, \sigma_{n-1}(x) + \lambda_n s_n(x), \quad (2.1)$$

où

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n + 1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu(x)$$

et en remarquant que, la suite $\{\lambda_\nu\}$ étant quasi-convexe,

$$\lambda_n = o(1) \longrightarrow n \Delta \lambda_n = o(1).$$

Cette dernière affirmation est contenue dans le lemme qui suit et dont nous aurons besoin plus tard.

. LEMME 2. *Si la série*

$$\sum (\nu + 1) \Delta^2 \lambda_\nu$$

converge, en particulier si la suite $\{\lambda_\nu\}$ *est quasi-convexe, il existe deux constantes* A *at* B *telles que*

$$\lambda_n = A\,n + B + o\,(1), \tag{2.2}$$

et

$$\Delta \lambda_n = -A + o\,(1/n). \tag{2.3}$$

En effet, de

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu + 1) \Delta^2 \lambda_\nu = \lambda_0 - \lambda_n - n \Delta \lambda_n, \tag{2.4}$$

en posant

$$\lambda_0 - \sum_{\nu=0}^{n-1} (\nu + 1) \Delta^2 \lambda_\nu = B_n$$

et

$$\lim_{n \to \infty} B_n = B,$$

il résulte

$$\frac{\lambda_n}{n} - \frac{\lambda_{n+1}}{n+1} = \frac{B_n}{n\,(n+1)},$$

d'où, en sommant de n à $N - 1$,

$$\frac{\lambda_n}{n} - \frac{\lambda_N}{N} = \sum_{\nu=n}^{N} \frac{B_\nu}{\nu\,(\nu + 1)}.$$

Puisque $B_n = O\,(1)$, cette dernière série converge; on peut donc y faire tendre N vers l'infini, et en posant

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\lambda_N}{N} = A,$$

et

$$B_\nu - B = \varepsilon_\nu,$$

on obtient finalement que

$$\lambda_n = A\,n + B + n \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu\,(\nu + 1)}.$$

De cette relation on peut facilement déduire les affirmations (2.2) et (2.3).

3. Pour établir le théorème 2, c'est-à-dire pour montrer la nécessité de la condition (1.3), partons de la relation (2.1) avec

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\, a_0, & \text{pour } n = 0, \\ a_n \cos n x + b_n \sin n x, & \text{pour } n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

En tenant compte du lemme 2, et en remplaçant dans les deux derniers membres de (2.1) λ_n et $\Delta\lambda_n$ par les valeurs tirées de (2.2) et (2.3) on aura

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu u_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1)(\Delta^2 \lambda_\nu)\, \sigma_\nu(x) + A\, n\, \{s_n(x) - \sigma_{n-1}(x)\} +$$
$$+ B s_n(x) + o(|s_n(x)|) + o(1).$$

D'après l'hypothèse, dans cette relation la série $\Sigma \lambda_\nu u_\nu(x)$ doit converger pour toute fonction continue $f(x)$, et puisque dans ce cas, d'après le théorème de Fejér, $\lim \sigma_n(x)$ existe, il s'ensuit, en la divisant par n, que

$$A\, \{s_n(x) - \sigma_{n-1}(x)\} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

On aura ainsi en premier lieu, que A doit être égal à zéro, puisque la série de Fourier (1.1), c'est-à-dire la suite $s_n(x)$, ne doit pas converger nécessairement.

En y posant donc $A = 0$, on en déduit en second lieu la relation

$$\lambda_n s_n(x) = O(1).$$

Puisqu'il existe des fonctions continues telles que

$$|s_n(x)| > \varepsilon_n \lg n,$$

ou ε_n tend vers zéro arbitrairement lente (voir [3], p. 172—3), on en déduit que cette dernière relation ne peut avoir lieu pour toute fonction continue, à moins que la condition (1.3) soit satisfaite.

4. Passons à la démonstration du théorème 3. D'après D. Jackson ([1], p. 7 ou bien [2], p. 45) si $\omega(t)$ est le module de continuité de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, il existe toujours un polynôme trigonométrique $T_{n-1}(x)$ d'ordre $n-1$ et une constante C, tels que l'inégalité

$$|f(x) - T_{n-1}(x)| \leqslant C\, \omega(1/n) \tag{4.1}$$

a lieu pour tout x.

En posant alors

$$K_n(t) = \frac{1}{2}\lambda_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \cos \nu t,$$

on peut mettre la suite $s_n^*(x)$ des sommes partielles de la série (1.2) sous la forme

$$s_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\,K_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_{n-1}(x+t)\,K_n(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{f(x+t) - T_{n-1}(x+t)\}\,K_n(t)\,dt =$$

$$= A_n(x) + B_n(x). \tag{4.2}$$

Ceci posé, on peut montrer en premier lieu que la suite $B_n(x)$ tend uniformément vers zéro, lorsque la condition (1.4) est satisfaite.

A cet effet, remarquons d'abord qu'une double sommation par partie donne

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \cos \nu t = L_n(t) + M_n(t) + N_n(t),$$

avec

$$L_n(t) = \frac{\lambda_n}{2}\,\frac{\sin(n-1/2)\,t}{\sin t/2},$$

$$M_n(t) = \frac{\Delta\lambda_{n-1}}{2}\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2,$$

$$N_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{\Delta^2\lambda_\nu}{2}\left(\frac{\sin(\nu+1)\,t/2}{\sin t/2}\right)^2;$$

or,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |L_n(t)|\,dt \leqslant C'\lambda_n \lg n,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |M_n(t)|\,dt = n\,|\Delta\lambda_n|$$

et

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |N_n(t)|\,dt \leqslant \sum_{\nu=0}^{n-2} (\nu+1)\,|\Delta^2\lambda_\nu|,$$

par suite

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K_n(t)|\,dt \leqslant C'\lambda_n \lg n + n\,|\Delta\lambda_n| + \sum_{\nu=0}^{n-2}(\nu+1)\,|\Delta^2\lambda_\nu|. \tag{4.3}$$

En tenant compte de (4.1) cela nous permet d'écrire

$$|B_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x+t) - T_{n-1}(x+t)|\,|K_n(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C\,\omega(1/n)\,\{C'\lambda_n \lg n + n\,|\Delta\lambda_n| + \sum_{\nu=0}^{n-2}(\nu+1)\,|\Delta^2\lambda_\nu|\},$$

et d'en déduire l'affirmation. En effet, on a, d'une part, d'après les hypothèses

$$\omega(1/n)\,\lambda_n \lg n = o(1)$$

et

$$\omega(1/n)\sum_{\nu=0}^{n-2}(\nu+1)\,|\Delta^2\lambda_\nu| = o(1);$$

d'autre part, la suite $\{\lambda_\nu\}$ étant quasi-convexe, de la relation (2.4) découle que

$$\omega(1/n)\,\lambda_n = o(1) \longrightarrow n\,\omega(1/n)\,\Delta\lambda_n = o(1).$$

Ainsi

$$B_n(x) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty \tag{4.4}$$

uniformément daus l'intervalle $(0, 2\pi)$.

En second lieu, il s'agit de montrer que la suite $A_n(x)$ converge uniformément dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. En effet, $T_{n-1}(x+t)$ étant un polynôme trigonométrique d'ordre $n-1$, on peut dans le polynôme $K_n(t)$ augmenter le nombre des termes à volonté et l'on aura

$$A_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_{n-1}(t+x)\,K_m(t)\,dt$$

quel que soit $m \geqslant n-1$; par suite

$$|A_m(x) - A_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |T_m(t+x) - T_{n-1}(t+x)|\,|K_m(t)|\,dt.$$

Or, on a d'après (4.1)

$$|T_m(t+x) - T_{n-1}(t+x)| \leqslant$$

$$\leqslant |T_m(t+x) - f(t+x)| + |T_{n-1}(t+x) - f(t+x)| \leqslant 2\,C\,\omega(1/n);$$

ainsi, en tenant compte de l'inégalité (4.3),

$$|A_m(x) - A_n(x)| \leqslant 2C\omega(1/n)\{C'\lambda_n \lg n + n|\Delta\lambda_n| + \\ + \sum_{\nu=0}^{n-2}(\nu+1)|\Delta^2\lambda_\nu|\},$$

quels que soient x et $m \geqslant n-1$.

Il s'ensuit d'après le raisonnement précédent que

$$A_m(x) - A_n(x) \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty,$$

quels que soient x et $m \geqslant n-1$. Ainsi la suite $A_n(x)$ converge uniformément dans l'intervalle $(0,2\pi)$, ce qui, avec (4.4) et d'après (4.2), achève la démonstration du théorème 3.

5. Pour simplifier les calculs dans la démonstrations du théorème **4** nous supposons que $x=0$, et que $f(x)$ soit une fonction paire avec $f(0)=0$. Alors la fonctionnelle (1.5) se réduit à

$$U_n(f,0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)K_n(t)\,dt,$$

où

$$K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_n^k \cos kt.$$

Il nous reste à montrer que

$$U_n(f,0) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Soit $T_{n-1}(t)$ le polynôme trigonométrique de Jackson d'ordre $n-1$ pour la fonction $f(x)$. Alors, on a

$$\left|\int_0^\pi (f(t) - T_{n-1}(t) + T_{n-1}(t))K_n(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^\pi (f(t) - T_{n-1}(t))K_n(t)\,dt + \int_0^\pi T_{n-1}(t)K_n(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\pi |f(t) - T_{n-1}(t)||K_n(t)|\,dt + \left|\int_0^\pi T_{n-1}(t)K_n(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(1/n)\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt + \left|\int_0^\pi T_{n-1}(t)K_n(t)\,dt\right|.$$

En procédant de la même manière que dans le numéro précédent, on obtient (voir la formule (4.3)) après deux transformations abeliennes que le premier terme du second membre de la dernière inégalité est d'ordre

$$\omega(1/n)\,\lambda_n^n \lg n. \tag{5.1}$$

Enfin, dans le dernier terme, sous le signe de l'intégrale se trouve le produit de deux polynômes trigonométriques en termes des cosinus. De là résulte

$$\left|\int_0^\pi T_{n-1}(t)\,K_n(t)\,dt\right| = \frac{\pi}{2}\,|\lambda_1^n c_1 + \lambda_2^n c_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^n c_{n-1}|,$$

où l'on a pose que $(c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1})$ représente $T_{n-1}(0)$, et qui converge uniformément vers $f(0) = 0$. Du fait que la suite $\{\lambda_\nu^n\}$ engedre aussi un procédé régulier[3] de sommation, on a finalement

$$|\lambda_1^n c_1 + \lambda_2^n c_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^n c_{n-1}| \to 0, \quad n \to \infty$$

ce qui, avec (5.1), démontre le théorème **4**.

(Reçu le 13 avril 1955)

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Jackson — The Theory of Approximation. *Colloqu. Publ. Amer. Math Soc.*, Vol. XI, New York, 1930.

[2] De La Vallée Poussin — Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, Gauthier-Villars, 1919.

[3] A. Zygmund — Trigonometrical Series, New York, Chelsea Publ. Co., 1952.

[4] S. M. Nikolsky — Sur des méthodes linéaires de sommation des séries de Fourier. *Izvest. Akad. Nauk* SSSR, série math., **12** (1948), 259—278 (en russe).

[3] Voir [2] p. 25.