SUR LES ITÉRÉES CONTINUES ET LEUR APPLICATION À LA RECHERCHE DES FONCTIONS LIMITES DE CERTAINES SUITES ITÉRÉES

par

M. BAJRAKTAREVIĆ (Sarajevo)

SOMMAIRE — Quelques généralisations des résultats connus relatifs aux itérées continues et de leur application à la recherche des fonctions limites de certaines suites itérées.

1. *INTRODUCTION ET RÉSULTATS.* Soit

$$F(x) \quad (-\infty \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant +\infty)$$

une fonction continue et strictement croissante de x telle que

(1a) $$F(x) > x \quad (a \leqslant x < b), \quad F(b) = b$$

ou

(1b) $$F(x) < x \quad (a < x \leqslant b), \quad F(a) = a;$$

désignons par

$$F_1(x) = F(x), \quad F_{n+1}(x) = F\{F_n(x)\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ses itérées successives et par

$$F_{-k}(x), \quad F_k(a) \leqslant x \leqslant F_k(b)$$

les fonctions inverses des $F_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Nous désignerons par α le nombre a ou le nombre b suivant que l'on a (1a) ou (1b).

D é f i n i t i o n. Nous appellerons itérée continue de $F(x)$ toute fonction $\theta_y(x)$ de deux variables x et y telle que

(i) $$\theta_0(x) = x, \quad \theta_1(x) = F(x), \quad x \in [a, b]; \quad \theta_y(x) \in [a, b];$$

(ii) $$\theta_{y_1+y_2}(x) = \theta_{y_1}\{\theta_{y_2}(x)\}$$

$$[\theta_{-\rho}(a) \leqslant x \leqslant \theta_{-\rho}(b); \quad y_1, y_2, y_1 + y_2 \geqslant \rho; \quad \rho \leqslant 0];$$

(iii) $\theta_y(c)$ ($y \in [0, 1]$) est une fonction de y continue et strictement monotone pour chaque $c = \theta_{-d}(\alpha)$ où $d \leqslant 0$.

Désignons par $g_{-1}(x)$ la fonction inverse de $g(x)$ et par D le domaine défini par

$$D: \qquad x \in [a, b] \quad \text{pour } y \geqslant 0, \quad F_{-y}(a) \leqslant x \leqslant F_{-y}(b) \quad \text{pour } y < 0.$$

THÉORÈME I. *Pour que la fonction* $\theta = F_y(x)$ *soit une itérée continue de la fonction* $F(x)$ ($x \in [a, b]$) *continue et strictement croissante, satisfaisant aux canditions* (1), *il faut et il suffit que, pour chaque* $d \leqslant 0$, *il existe une solution unique, continue et strictement monotone de l'équation fonctionnelle*

$$\psi(x+1) = F\{\psi(x)\} \quad (x \geqslant d), \quad \psi(d) = \alpha, \tag{2}$$

telle que

$$F_y(x) = \psi\{\psi_{-1}(x) + y\}, \quad (x, y) \in D. \tag{3}$$

L'équation (2) est équivalente à l'équation fonctionnelle de Schröder [1] ou à celle d'Abel [2].

CONSÉQUENCES du théorème I:

a) *La fonction* $F_y(x)$, $(x, y) \in D$ *est une fonction continue de deux variables* x *et* y, *strictement croissante par rapport à* x *et* y *pour* (1a) *respectivement strictement croissante par rapport à* x *et strictement décroissante par rapport à* y *pour* (1b).

b) $F_{-y}\{F_y(x)\} = x, \quad (x, y) \in D$.

Par le théorème I le problème de trouver toutes les itérées continues de $F(x)$ est ramené à la recherche de toutes les solutions continues strictement monotones de (2).

En désignant par $[x]$*) le plus grand entier $\leqslant x$, nous allons énoncer le

THÉORÈME II. $\varphi(x)$ *étant une fonction continue, strictement monotone de* $x \in [0,1)$ *avec*

$$\varphi(0) = c, \quad \varphi(1-0) = F(c), \quad c \in [a, b],$$

toute solution $\psi(x)$ *continue et strictement monotone de* (2) *a la forme*

$$\psi(x) = F_{[x]}\{\varphi(x - [x])\} \quad (x \geqslant d). \tag{4}$$

Inversement, pour chaque fonction $\varphi(x)$, *ainsi choisie, il est toujours possible de trouver un nombre* $d \leqslant 0$ *tel que l'équation* (4) *donne une solution continue et strictement monotone de* (2).

---

*) Pour s'accorder avec la notation employée dans [4] on fait ci-dessous une exception de la signification de $[x]$ pour le nombre p, base du système p-adique généralisée.

La définition des itérées continues et les théorèmes I et II ont été déjà donnés [3] pour le domaine D défini par $x \geqslant a$, $y \geqslant 0$ et pour le cas (1a) seulement.

Soit, maintenant, p un nombre réel > 1 et $\{d_k\}$ la suite des nombres entiers

$$d_k = 0, 1, \ldots, [p] \quad (k = 0, 1, \ldots; \ p - 1 \leqslant [p] < p)$$

correspondant univoquement, d'après ([4], Théorème I_1), au nombre

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{p^k} \in I = [0, G_0], \quad G_0 = \frac{p\,[p]}{p-1}.$$

Introduisons encore les $1 + [p]$ quantités différentes

$$\varepsilon(i) \ (i = 0, 1, \ldots, [p]); \quad 0 < |\varepsilon(i)| \leqslant 1.$$

Il est évident qu'à chaque suite $\{d_\nu\}$ correspond univoquement une suite

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon(d_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

et, inversement, à chaque suite $\{\varepsilon_\nu\}$ correspond univoquement une suite $\{d_\nu\}$. Par conséquent, à chaque nombre $z \in I$ correspond univoquement une suite $\{\varepsilon_\nu\}$.

La suite

(5) $$x_n(z, t) = \varepsilon_0 f\{\varepsilon_1 f[\ldots(\varepsilon_n f(t))\ldots]\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \ z \in I)$$

étant convergente pour $t = \bar{t}$, nous désignerons par E l'ensemble des valeurs de sa fonction limite $\xi(z)$, $z \in J^*$ ([4]; II. 2.1) et nous poserons

$$d = \log^{-1} p \cdot \log \frac{\xi_{-1}(c)}{G_0}, \quad c \in [a, b].$$

Dès lors on a le

THÉORÈME III. *Si la fonction limite*

$$\xi(z) = \xi(z, t) \quad (z \in I; \ t = \text{const.} \in E)\ ^{1)}$$

de la suite (5) *est continue et strictement monotone avec*

$$a \leqslant \xi(z) \leqslant b \quad (z \in I)$$

où $\xi(s)$ *prend effectivement les valeurs* a *et* b, *la fonction*

(6) $$F_y(x) = \xi\{p^{-y}\xi_{-1}(x)\} \quad \{F_{-\rho}(a) \leqslant x \leqslant F_{-\rho}(b); \ y \geqslant \rho; \ \rho \leqslant 0\}$$

est une itérée continue de $F(x) \equiv \varepsilon(0) f(x)$ *et la fonction*

(7) $$\psi(x) \equiv \xi\{p^{-x}\xi_{-1}(c)\} \quad (x \geqslant d)$$

est la solution correspondante de (2) *ayant la forme* (4).

---

[1]) D'après ([4], Théorème VI), on a

$$\xi(z, t) = \xi(z) = \xi(z, \bar{t}) \quad (z \in I; \ t \in E).$$

Inversement, si (2)[2] *admet une solution de la forme* (4) *satisfaisant, pour chaque* $d \leqslant 0$, *à l'équation*

$$\varepsilon_0 \psi \left\{ \frac{1}{\log p} \log \frac{\xi_{-1}(c)}{p^{-y}\xi_{-1}(c) - d_0} \right\} = \varepsilon(0)\psi(y) \quad (y \geqslant d)^{3)}, \tag{8}$$

la suite (5) *est convergente (pour* $t \in E$*) et la fonction limite* $\xi(z)$ *est donnée par*

$$\xi(z) = \psi \left\{ \frac{1}{\log p} \log \frac{\xi_{-1}(c)}{z} \right\} \quad (z \in I). \tag{9}$$

Par le théorème III on établit la liaison qui existe entre la fonction limite $\xi(z)$ de la suite (5) dans le cas de la continuité et la monotonie stricte de $\xi(z)$ et les itérées continues de $F(t)$ et on donne la formule (9) permettant de calculer, dans ce cas, la fonction limite $\xi(z)$ au moyen de l'itérée continue convenable, toutes les itérées continues, d'après le théorème II, pouvant toujours être calculées. Ce problème se rapportant à la suite (5) d'une forme tout à fait spéciale avec

$$p = 2; \quad \varepsilon_\nu = (1 - 2d_\nu)(1 - 2d_{\nu-1})^{-1} \ (\nu = 0, 1, 2, \ldots; \ d_{-1} = 0);$$

$$F(x) > x \ (-\infty < x < +\infty), \quad F(x) \to 0 \quad (x \to -\infty),$$

et le problème correspondant, analogue à celui des théorèmes I et II, a été déjà traité ([5], pp. 29—33) mais sous une forme incomplète et insuffisamment précise.

2.1. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.* A. Les conditions sont nécessaires. Supposons que $\theta = F_y(x)$ soit une fonction particulière satisfaisant au conditions (i), (ii), (iii). D'après (i), on a

$$F_1\{F_x(c)\} = F\{F_x(c)\},$$

et, d'après (ii), avec $\rho = d$, $y_1 = 1$, $y_2 = x$ et $c = F_{-d}(\alpha)$, on a

$$F_{1+x}(c) = F\{F_x(c)\} \quad (x \geqslant d), \tag{10}$$

d'où, d'après (iii), on tire que

$$F_x(c) = \psi(x) \quad (x \geqslant d) \tag{11}$$

[2] On suppose que $F(x)$ dans (2) satisfasse aux conditions citées au commencement de ce paragraphe,

[3] ε_0, d_0 représentent les éléments des suites $\{\varepsilon_\nu\}$, $\{d_\nu\}$ correspondant au nombre $z = p^{-y}\xi_{-1}(c) \in I$.

est continue et strictement monotone avec

$$\lim_{x \to \infty} F_x(c) = \beta = \begin{cases} b \text{ pour (1a)} \\ a \text{ pour (1b).} \end{cases}$$

Posant $F_d(c) = \lambda$, on a, d'après (ii) et (i),

$$F_{-d}\{F_d(c)\} = F_0(c) = F_{-d}(\lambda) = c$$

et, d'après (iii),

$$F_{-d}(\alpha) = F_{-d}(\lambda) \quad (d \leqslant 0). \tag{12}$$

Cette équation admet une solutian unique $\lambda = \alpha$. En effet, d'après (ii) avec $\rho = d$, on a

$$\psi(x+y) = F_{x+y}(c) = F_y\{F_x(c)\} = F_y\{\psi(x)\} \quad (x, y, x+y \geqslant d). \tag{13}$$

Posant

$$\psi(x) = u, \quad x = \psi_{-1}(u) \quad m \leqslant u \leqslant M)$$

avec

$$m = \min(\lambda, \beta), \quad M = \max(\lambda, \beta),$$

puis, écrivant x à la place de u, on a

$$F_y(x) = \psi\{\psi_{-1}(x) + y\}, \quad (x, y) \in D^*, \tag{14}$$

D^* étant défini par

$$D: \begin{cases} m \geqslant x \leqslant M \quad \text{pour } y \geqslant 0; \\ \min\{F_{-y}(\lambda), \beta\} \leqslant x \leqslant \max\{F_{-y}(\lambda), \beta\} \quad \text{pour } d \leqslant y < 0. \end{cases}$$

Cela est évident pour $y \geqslant 0$. Pour $d \leqslant y < 0$, on doit avoir $d - y \leqslant \leqslant \psi_{-1}(x) \leqslant +\infty$ ce qui veut dire que x parcourt le segment dont les bornes sont β et $\psi(d-y) = F_{-y}(\lambda)$. Maintenant, d'après (14), il est évident que $F_y(x)$ $((x, y) \in D^*)$ est une fonction continue de x et y strictement croissante par rapport à ces deux variables pour (1a), strictement croissante par rapport à x et strictement décroissante par rapport à y pour (1b).

En particulier, pour $d = 0$, on a

$$\lambda = F_d(c) = F_{-d}(c) = \alpha = c.$$

Il s'ensuit, d'après (14), que

$$F_y(x), \quad a = \min(\alpha, \beta) \leqslant x \leqslant \max(\alpha, \beta) = b$$

est bien définie et qu'elle est strictement croissante par rapport à x pour chaque $y \geqslant 0$ et, en particulier, pour $y = -d > 0$, d'où l'on conclut que (12) n'admet qu'une solution $\lambda = \alpha$ et que D^* est identique à D.

De $\lambda = \alpha$, (10) et (11) on tire (2).

Enfin, la fonction $F_y(x)$ étant donnée, la fonction $\psi(x)$ est univoquement déterminée par (3). En effet, de la condition $\psi(d) = \alpha$ et de l'hypothèse sur la continuité et la monotonie stricte de $\psi(x)$ on conclut, pour chaque $d \leqslant 0$, l'existence d'un nombre correspondant $c_1 \in [a, b]$, tel que $\psi(0) = c_1$, $\psi_{-1}(c_1) = 0$ de sorte que (3), en y posant c_1 et x respectivement à la place de x et y, donne uuivoquement

$$F_x(c_1) = \psi(x) \quad (x \geqslant d).$$

Pour $x = d$, en tenant compte de l'hypothèse $\psi(d) = \alpha$, on a $F_d(c_1) = \alpha$, d'où, à cause de la monotonie démontrée de $F_d(x)$ et de ce que $F_d(c) = \alpha$, il s'ensuit $c_1 = c$ et, d'après cela, univoquement

$$\psi(x) = F_x(c) \quad (x \geqslant d), \quad \psi(d) = \alpha.$$

Ainsi la nécessité des conditions du théorème I est démontrée.

B. Les conditions sont à la fois suffisantes. D'après (2), on a $\psi(x) \to \beta$, $x \to +\infty$. Maintenant de (3), pour $y = 0$, on a

$$F_0(x) = \psi\{\psi_{-1}(x)\} = x \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Pour $y = 1$ de (3) il résulte

$$F_1(x) = \psi\{\psi_{-1}(x) + 1\} \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Si l'on met, dans (2), $\psi(x) = u$ $(a \leqslant u \leqslant b)$, on obtient

$$\psi\{\psi_{-1}(u) + 1\} = F(u) \quad (a \leqslant u \leqslant b)$$

de sorte que $F_1(u) = F(u)$ $(a \leqslant u \leqslant b)$.

Enfin, le fait que $F_y(x) \in [a, b]$ $(x, y) \in D$, résulte en tenant compte de la continuité et de la monotonie stricte de $F_y(x)$, de ce que

1° $F_y(x) = \psi\{\psi_{-1}(x) + y\} \to \beta \mp 0 \quad (x \to \beta \mp 0,\ y \to +\infty)$

avec le signe $-$ ou $+$ suivant que l'on a (1a) ou (1b);

2° pour chaque $y < 0$, on a

$$F_y\{F_{-y}(\alpha)\} = \psi\{y + \psi_{-1}[\psi\{\psi_{-1}(\alpha) - y\}]\} =$$
$$= \psi\{y + \psi_{-1}[\psi(d - y)]\} = \psi\{y + (d - y)\} = \psi(d) = \alpha.$$

Donc on a démontré que $F_y(x)$ satisfait à (i).

d étant $\leqslant 0$, $\psi(x)$ admet pour $x = 0$ une valeur déterminée c et l'on a

$$\psi(0) = c \quad \psi_{-1}(c) = 0.$$

En posant dans (3) $x = c$, on obtient

$$F_x(c) = \psi(x) \quad (x \geqslant d). \tag{15}$$

Désignons par y_1, y_2 deux nombres quelconques et considérons l'expression

$$F_{y_1}\{F_{y_2}(x)\} = \psi\{y_1 + \psi_{-1}[\psi\{y_2 + \psi_{-1}(x)\}]\}.$$

Soit, maintenant, $\rho \leqslant 0$ un nombre tel que $y_1, y_2, y_3 \geqslant \rho$, $y_3 = y_1 + y_2$ et x un nombre tel que

$$x \in \begin{cases} [a, b] & \text{pour } \rho = 0, \\ [F_{-\rho}(a), F_{-\rho}(b)] & \text{pour } \rho < 0. \end{cases}$$

Alors, pour $\rho < 0$ et $y_i \leqslant 0$ $(i = 1, 2, 3)$, on a aussi

$$x \in [F_{-y_i}(a), F_{-y_i}(b)] \quad (i = 1, 2, 3;\ \rho < 0;\ y_i \leqslant 0).$$

Par conséquent, en posant

$$\psi_{-1}(x) = u \quad (u \in [d - \rho, +\infty])$$

et, tenant compte de ce que

$$F_{-\rho}(\alpha) = \psi\{\psi_{-1}(\alpha) - \rho\} = \psi(d - \rho),$$

on a

$$\psi\{y_1 + \psi_{-1}[\psi\{y_2 + \psi_{-1}(x)\}]\} = \psi\{y_1 + \psi_{-1}[\psi(y_2 + u)]\} =$$
$$= \psi\{y_1 + y_2 + u\} = \psi\{y_1 + y_2 + \psi_{-1}(x)\} = F_{y_1+y_2}(x),$$

étant donné que $y_2 + u \geqslant y_2 + d - \rho \geqslant d$.

Ainsi on a démontré que (ii) est rempli aussi.

Enfin, en tenant compte de l'hypothèse faite sur la continuité et la monotonie de $\psi(x)$, la propriété (iii) résulte immédiatement de (15).

Ainsi le théorème I et sa conséquence a) sont entièrement démontrés.

Pour $x \in [a, b]$, $y \geqslant 0$, on a

$$y + \psi_{-1}(x) \geqslant y + d \geqslant d,$$

de sorte que

$$\psi_{-1}\{\psi[y + \psi_{-1}(x)]\} = y + \psi_{-1}(x)$$

et, eu égard à (3),

$$F_{-y}\{F_y(x)\} = \psi\{-y + \psi_{-1}[\psi\{y + \psi_{-1}(x)\}]\} =$$
$$= \psi\{-y + [y + \psi_{-1}(x)]\} = \psi\{\psi_{-1}(x)\} = x.$$

Pour $F_{-y}(a) \leqslant x \leqslant F_{-y}(b)$, $y < 0$, c'est-à-dire pour $y < 0$ et pour x se trouvant sur le segment dont les bornes sont $\psi(d - y)$ et β, on a aussi

$$y + \psi_{-1}(x) \in [d, +\infty].$$

Le reste du raisonnement étant identique à celui employé ci-dessus, la conséquence b) est démontrée.

2.2. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II.* D'après (13), il est évident que l'on a, pour $x \geqslant 0$,

$$\psi(x) = \psi\{(x - [x]) + [x]\} = F_{[x]}\{\psi(x - [x])\}, \; x \geqslant 0. \tag{4'}$$

Soit, maintenant, pour $d < 0$:

1° $[d] = -N < 0$;

2° x_k le nombre pour lequel on a:

$$-k \leqslant x_k < -(k-1) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1),$$
$$-N \leqslant d \leqslant x_N < -(N-1),$$

et tel que à tout x_k $(k = 1, \ldots, N)$ correspond un nombre x_{k-1} défini par l'équation

$$x_k + 1 = x_{k-1} \quad (k = 1, \ldots, N).$$

Alors on a

$$[x_k] = -k, \; x_k = x_0 - k \quad (k = 0, 1, \ldots, N),$$

et, d'après (2),

$$\psi(x_{k-1}) = F\{\psi(x_k)\} \quad (k = 1, \ldots, N),$$

d'où d'abord

$$\psi(x_0) = F_k\{\psi(x_k)\} \quad (k = 1, \ldots, N),$$

puis

$$\psi(x_k) = F_{-k}\{\psi(x_0)\} \quad (k = 1, \ldots, N),$$

ensuite

$$\psi(x_k) = F_{[x_k]}\{\psi(x_k - [x_k])\} \quad (k = 1, \ldots, N)$$

et, enfin,

$$\psi(x) = F_{[x]}\{\varphi(x - [x])\} \; (d \leqslant x < 0). \tag{4''}$$

Si l'on pose $\psi(x) \equiv \varphi(x)$ $(0 \leqslant x < 1)$, (4') et (4'') donnent (4).

Pour démontrer l'inverse il faut, d'abord, démontrer l'existence du nombre d pour le nombre donné c. A cet effet désignons par N le nombre entier positif défini par

$$\left.\begin{array}{ll} F_{N-1}(a) \leqslant c < F_N(a) & \text{pour (1a)} \\ F_N(b) < c \leqslant F_{N-1}(b) & \text{pour (1b)} \end{array}\right\} \; (N > 0).$$

$\varphi(\lambda)$ étant continue et strictement monotone, il existe une valeur $\lambda_0 \in [0, 1)$ telle que

$$\varphi(\lambda_0) = F_N(\alpha).$$

Désignons par d le nombre défini par

$$[d] = -N, \quad \lambda_0 = d - [d].$$

À tout $\lambda \in [\lambda_0, 1)$ correspond un $x = \lambda + [d] \in [d, [d]+1)$. Maintenant, il est évident que, pour le nombre d ainsi choisi, il existe la fonction $\psi(x)$ définie par

$$\psi(x) = F_{[x]}\{\varphi(x-[x])\} \quad (x \geqslant d), \quad \psi(d) = \alpha.$$

De cette équation, l'équation (2) résulte immédiatement. En effet, pour $x \geqslant d$, on a

$$\psi(x+1) = F_{[x+1]}\{\varphi(x+1-[x+1])\} = F_{[x]+1}\{\varphi(x-[x]) = \\ = F\{F_{[x]}(\varphi(x-[x]))\} = F\{\psi(x)\},$$

puisque, dans ces transformations, on ne s'est servi que des itérées ordinaires de $F(x)$ et de leurs fonctions inverses pour les valeurs des arguments se trouvant dans le domaine d'existence de ces fonctions.

Ainsi le théorème II est démontré.

2.3 *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III.* La fonction limite $\xi(z)$, ([4], (12a) et (13) pour $\nu \to \infty$), satisfait aux équations

(16) $$\xi(z) = F\{\xi(pz)\} \quad (0 \leqslant z \leqslant G_0 p^{-1}),$$

(17) $$\varepsilon(0)\,\xi(z) = \varepsilon_0\,\xi(z-d_0) \quad (0 \leqslant z \leqslant G_0).$$

Tenant compte des hypothèses faites sur la fonction $\xi(z)$, il résulte de (16) que $F(x)$ $(x \in [a, b])$ est une fonction continue, strictement croissante et satisfaisant aux conditions (1). Il est facile de démontrer que la fonction (6) satisfait aux conditions du théorème I avec $\psi(x)$ définie par (7). Ainsi, eu égard aux théorèmes I et II, la première partie du théorème III est démontrée.

Pour démontrer l'inverse de ce théorème il faut remarquer que, pour chaque solution de (2) ayant la forme (4) et satisfaisant à la condition (8), l'équation (9) définit univoquement une fonction continue, strictement monotone $\xi(z)$ $(a \leqslant \xi(z) \leqslant b)$ sur le segment I. Pour que cette fonction soit la fonction limite de (5), il faut, d'après ([4], (12a) et (13) pour $\nu \to \infty$), et il suffit, d'après ([4], Théorème VI), que les relations (16) et (17) soient remplies. Mais, il est facile de démontrer qu'il en est en effet ainsi car, si l'on écrit

$$\psi(x) = \psi\{-\xi_{-1}(c)\log p^{-x}/(\xi_{-1}(c)\log p)\} = \xi\{p^{-x}\,\xi_{-1}(c)\} \quad (x \geqslant d),$$

l'équation (2) prend la forme

$$\xi\{p^{-(x+1)}\,\xi_{-1}(c)\} = F\{\xi[p^{-x}\,\xi_{-1}(c)]\} \quad (x \geqslant d).$$

En y posant

$$\xi_{-1}(c)\,p^{-(x+1)} = z,$$

on obtient précisément (16).

Si l'on met, dans (8),

$$\psi(y) = \xi\{p^{-y}\xi_{-1}(c)\} \quad (y \geqslant d),$$

on obtient

$$\varepsilon_0\,\xi\{p^{-y}\xi_{-1}(c) - d_0\} = \varepsilon(0)\,\xi\{p^{-y}\xi_{-1}(c)\} \quad (y \geqslant d),$$

d'où, pour $p^{-y}\xi_{-1}(c) = z$, il résulte (17).

Ainsi le théorème III est démontrée.

(Reçu le 26 mai 1954)

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Picard — Leçons sur quelques équations fonctionnelles. Paris, 1928.

[2] N. H. Abel — Oeuvres complètes II, 1881, 36—39.

[3] M. Ward and F. B. Fuller — The continuous iteration of real functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42** (1936), 393—396.

[4] M. Bajraktarević — Sur une généralisation de certaines suites itérées. (À paraître.)

[5] M. Bajraktarević — Sur certaines suites itérées. Thèse. *Soc. Sci. de la R. P. de Bosnie et Herzégovine*, Sarajevo, 1954.