ÜBER SUMMIERBARKEITSFAKTOREN UND VERWANDTE FRAGEN BEI CESÀROVERFAHREN I.

von

ALEXANDER PEYERIMHOFF (Cincinnati/Ohio)

Wir werden uns in dieser Arbeit mit einigen Sätzen über Summierbarkeitsfaktoren bei Cesàroverfahren beschäftigen und zwar hauptsächlich mit Faktoren der Typen (C_α, C_β), $(|C_\alpha|, |C_\beta|)$ und $(C_\alpha, |C_\beta|)$. Wohl der bekannteste unter diesen Sätzen ist der nach I. Schur benannte Satz für den Typ (C_α, C_β)[1]:

Eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ führt genau dann jede C_α-summierbare Reihe Σa_n $(\alpha \geqq 0)$ über in eine C_β-summierbare Reihe $\Sigma a_n \varepsilon_n$ $(\beta \geqq 0)$, wenn gilt

$$(1) \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} O(n^{\beta-\alpha}) & \text{für } \beta \leqq \alpha \\ O(1) & \text{für } \beta \geqq \alpha \end{cases} \qquad \text{und } \Sigma (n+1)^\alpha \, |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n| < \infty .$$

Wir werden im folgenden zeigen, dass dieser Satz nur eine andere Form des folgenden Satzes ist:

Eine Zahlenfolge $\varepsilon_n = O(1)$ führt genau dann jede Folge $\{\delta_n\}$ mit

$$(2) \qquad \delta_n = o(1), \quad \Sigma (n+1)^\beta \, |\Delta^{\beta+1} \delta_n| < \infty$$

über in eine Folge $\{\delta_n \varepsilon_n\}$ mit

$$(3) \qquad \Sigma (n+1)^\alpha \, |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \delta_n| < \infty ,$$

wenn (1) erfüllt ist.

Entsprechende äquivalente Formulierungen werden für die übrigen Typen von Summierbarkeitsfaktoren abgeleitet.

---

[1]) Der Satz wurde von Schur [15] ohne Beweis angegeben; Beweise gaben Bosanquet [6], [7] (α, β ganz bzw. beliebig) und Knopp [9] (α ganz, β beliebig).

Funktionalanalytisch aufgefasst stehen diese Sätze in enger Beziehung zu der Tatsache, dass der konjugierte Operator eines linearen Operators ebenfalls linear ist[2].

Der hier gegebene Zusammenhang erlaubt es, einen recht einfachen Beweis für den Schurschen Satz anzugeben. Der hinreichende (und schwierigere) Teil dieses Satzes folgt für ganzes $\alpha \geqq 0$ und beliebiges $\beta \geqq 0$ aus (3) fast unmittelbar mit Hilfe der bekannten Formel

$$\Delta^p x_n y_n = \sum_{\lambda=0}^{p} \binom{p}{\lambda} \Delta^\lambda x_n \Delta^{p-\lambda} y_{n+\lambda} \quad (p \geqq 0 \text{ ganz}). \tag{4}$$

Entsprechendes gilt für die übrigen Typen von Summierbarkeitsfaktoren[3]. Für beliebiges $p \geqq 0$ werden wir im Teil II dieser Arbeit Entwicklungen angeben, die (4) entsprechen.

Alle in dieser Arbeit vorkommenden Zahlen dürfen — soweit nicht anderes festgesetzt ist — komplex sein. Die Indizes der betrachteten Cesàroverfahren werden wir der Einfachheit halber als reell voraussetzen[4].

1. *SÄTZE ÜBER MATRIXTRANSFORMATIONEN*

Wir betrachten Matrixtransformationen der Gestalt

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} x_\nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{5}$$

wo x_n, y_n, $a_{n\nu}$ komplexe Zahlen seien. Im folgenden bedeute K stets eine Konstante, deren Wert aber von Fall zu Fall verschieden sein darf.

Die folgenden Hilfssätze 1 und 2 sind wohlbekannt, es handelt sich um die Sätze von Toeplitz und Knopp-Lorentz[5].

---

[2] Vgl. hierzu Banach [4] S. 100 Th. 3. Eine genaue Verfolgung dieses Gedankens stösst auf gewisse Schwierigkeiten die darin begründet sind, dass der Banachraum der beschränkten Folgen nicht separabel ist.

[3] Für ganzes $\alpha \geqq 0$ und $\beta \geqq 0$ wurden alle genannten Typen von Bosanquet [6] untersucht. Für den Fall (C_α, C_β) und beliebiges α und β vgl. die in[1] genannten Arbeiten. Für beliebige $\alpha \geqq 0$ und $\beta \geqq 0$ wurden die $(|C_\alpha|, |C_\beta|)$ Faktoren von Andersen [3], Chow [8] und dem Verfasser [14] untersucht.

[4] Unsere Überlegungen können jedoch auf komplexe Indizes ausgedehnt werden.

[5] Knopp-Lorentz [10] Satz 1. Vgl. auch Mears [11] S. 595 Th. 1.

HILFSSATZ 1. *a) Notwendig und hinreichend dafür, dass* (5) *für alle beschränkten Folgen* $\{x_n\}$ *(oder für alle Nullfolgen* $\{x_n\}$*) existiert und diese in beschränkte Folgen* $\{y_n\}$ *transformiert, ist die Bedingung*

$$(Zn) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \leqq K \quad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ K \text{ unabhängig von } n).$$

b) Notwendig und hinreichend dafür, dass (5) *für alle konvergenten Folgen* $\{x_n\}$ *existiert und diese in konvergente Folgen* $\{y_n\}$ *transformiert, sind die Bedingungen* (*Zn*),

$$(Zs) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = a,$$

und

$$(Sp) \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = a_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

HILFSSATZ 2. *Notwendig und hinreichend dafür, dass* (5) *für alle Folgen* $\{x_n\}$ *mit* $\Sigma |x_n| < \infty$ *existiert und diese in Folgen* $\{y_n\}$ *mit* $\Sigma |y_n| < \infty$ *transformiert, ist die Bedingung*

$$(6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \leqq K \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ K \text{ unabhängig von } \nu).$$

HILFSSATZ 3. *Notwendig und hinreichend dafür, dass* (5) *für alle beschränkten Folgen* $\{x_n\}$ *(oder für alle Nullfolgen* $\{x_n\}$*) existiert und diese in Folgen* $\{y_n\}$ *mit* $\Sigma |y_n| < \infty$ *transformiert, ist die Bedingung*

$$(7) \qquad \Big|\sum_{n \in \mathfrak{N}} \sum_{\nu \in \mathfrak{M}} a_{n\nu}\Big| \leqq K$$

für alle endlichen Untermengen $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{N}$ *der nichtnegativen ganzen Zahlen;* K *unabhängig von* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{N}$.

B e w e i s. Wir stellen zunächst die einfache Tatsache fest, dass eine Reihe Σx_n genau dann absolut konvergiert, wenn es ein K gibt mit $|\Sigma_{n\in\mathfrak{N}} x_n| \leqq K$ für alle $\mathfrak{N}$ der oben beschriebenen Art (es ist dann $\Sigma_{n=0}^{\infty} |x_n| \leqq 4K$). Es folgt, dass die Existenz von (5) und die Beziehung $\Sigma |y_n| < \infty$ für alle $x_n = O(1)$ (oder $x_n = o(1)$) gleichwertig ist mit den Bedingungen

$$(8) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| < \infty \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$(9)\qquad \Big|\sum_{n\in\mathfrak{N}}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\, x_\nu\Big| = \Big|\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu \sum_{n\in\mathfrak{N}} a_{n\nu}\Big| \leqq K$$

für alle $\mathfrak{N}$ der beschriebenen Art. Dabei ist K nur von der Wahl der Folge $\{x_n\}$ abhängig. Alle Mengen $\mathfrak{N}$ können als abzählbare Folge $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2,\ldots$ angeordnet werden und somit folgt aus Hilfssatz 1, dass (8) und (9) gleichwertig sind mit

$$(10)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big|\sum_{n\in\mathfrak{N}} a_{n\nu}\Big| \leqq K$$

und dies ist gleichbedeutend mit (7).

HILFSSATZ 4. *a) Notwendig und hinreichend dafür, dass* (5) *für alle Folgen* $\{x_n\}$ *mit* $\Sigma\,|x_n| < \infty$ *existiert und diese in beschränkte Folgen* $\{y_n\}$ *transformiert, ist die Bedingung*

$$(11)\qquad |a_{n\nu}| \leqq K \quad (n,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots;\ K \text{ unabhängig von } \nu \text{ und } n).$$

b) Notwendig und hinreichend dafür, dass (5) *für alle Folgen* $\{x_n\}$ *mit* $\Sigma\,|x_n| < \infty$ *existiert und diese in konvergente Folgen* $\{y_n\}$ *transformiert, sind die Bedingungen* (11) *und* (Sp).

Für einen Beweis vgl. [13] S. 269, Lemma 6 und Lemma 7 (die dortigen Ergebnisse gelten auch im Komplexen).

Wir bezeichnen die gespiegelte Matrix zu einer Matrix $\mathfrak{A} = (a_{n\nu})$ mit $\mathfrak{A}^* = (a^*_{n\nu})$, $a^*_{n\nu} = a_{\nu n}$. Offensichtlich erfüllt eine Matrix $\mathfrak{A}$ genau dann die Bedingung (Zn), wenn $\mathfrak{A}^*$ die Bedingung (6) erfüllt; ferner wird jede der Bedingungen (7) und (8) genau dann von $\mathfrak{A}$ erfüllt, wenn sie für $\mathfrak{A}^*$ gilt. Betrachten wir also neben (5) noch die Transformation

$$(12)\qquad y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^*_{n\nu}\, x_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu n}\, x_\nu ,$$

so gelten die folgenden Sätze.

SATZ 1. *Notwendig und hinreichend dafür, dass* (5) *für alle beschränkten Folgen* $\{x_n\}$ *(oder für alle Nullfolgen* $\{x_n\}$*) existiert und diese in beschränkte Folgen* $\{y_n\}$ *transformiert ist die Bedingung, dass* (12) *für alle Folgen* $\{x_n\}$ *mit* $\Sigma\,|x_n| < \infty$ *existiert und diese in Folgen* $\{y_n\}$ *mit* $\Sigma\,|y_n| < \infty$ *transformiert.*

SATZ 2. *Notwendig und hinreichend dafür, dass* (5) *für alle beschränkten Folgen* $\{x_n\}$ *(oder für alle Nullfolgen* $\{x_n\}$*) existiert und diese in Folgen* $\{y_n\}$ *mit* $\Sigma\,|y_n| < \infty$ *transformiert ist, dass* (12) *dieselbe Eigenschaft besitzt.*

SATZ 3. *Notwendig und hinreichend dafür, dass* (5) *für alle Folgen* $\{x_n\}$ *mit* $\Sigma \mid x_n \mid < \infty$ *existiert und diese in beschränkte Folgen* $\{y_n\}$ *transformiert ist, dass* (12) *dieselbe Eigenschaft besitzt.*

2. *BEDINGUNGEN FÜR SUMMIERBARKEITSFAKTOREN BEI NORMALEN MATRIZEN*

Es sei $(a_{n\nu})$ eine normale Matrix, d. h. es ist $a_{nn} \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und $a_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$. Die Matrixtransformation

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\, x_\nu \tag{13}$$

besitzt eine inverse Transformation, die wir mit

$$x_n = \sum_{\nu=0}^{n} a'_{n\nu}\, y_\nu \tag{14}$$

bezeichnen wollen.

Es sei $(b_{n\nu})$ eine Dreiecksmatrix[6] und $\{\varepsilon_n\}$ eine Zahlenfolge. Wir betrachten die Transformation

$$z_n = \sum_{\mu=0}^{n} b_{n\mu}\, x_\mu\, \varepsilon_\mu = \sum_{\mu=0}^{n} b_{n\mu}\, \varepsilon_\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} a'_{\mu\nu}\, y_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n\nu}\, y_\nu\,, \tag{15}$$

$$A_{n\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{n} b_{n\mu}\, a'_{\mu\nu}\, \varepsilon_\mu\,.$$

Eine Antwort auf die Frage, wie die Zahlen ε_μ beschaffen sein müssen, damit $z_n = O(1)$ oder $\Sigma \mid z_n \mid < \infty$ ist für alle Folgen $\{x_\mu\}$ mit $y_\mu = O(1)$, $y_\mu = o(1)$ oder $\Sigma \mid y_\mu \mid < \infty$ ergibt sich nun unmittelbar aus den Sätzen 1—3 des vorangehenden Paragraphen.

SATZ 4. *Genau dann wird jede Folge* $\{x_n\}$ *mit* $y_n = O(1)$ *(bzw.* $y_n = o(1)$*) durch* (15) *transformiert in eine beschränkte Folge* $\{z_n\}$, *wenn für alle* $\{\alpha_n\}$ *mit* $\Sigma \mid \alpha_n \mid < \infty$ *die Reihen* $\sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu}\, \alpha_n$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ *existieren und*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Big| \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu}\, \alpha_n \Big| < \infty \tag{16}$$

ist.

---

[6] Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf Dreiecksmatrizen; die folgenden Überlegungen können aber auch auf allgemeine Klassen von Matrizen ausgedehnt werden.

SATZ 5. *Genau dann wird jede Folge* $\{x_n\}$ *mit* $\Sigma|y_n|<\infty$ *durch* (15) *transformiert in eine Folge* $\{z_n\}$ *mit* $\Sigma|z_n|<\infty$, *wenn für alle beschränkten Folgen* $\{b_n\}$ *die Reihen* $\Sigma_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu} b_n$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ *existieren und*

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu} b_n = O(1) \quad (b_n=O(1)) \tag{17}$$

ist für $\nu\to\infty$.

SATZ 6. *Genau dann wird jede Folge* $\{x_n\}$ *mit* $y_n=O(1)$ (*bzw.* $y_n=o(1)$) *durch* (15) *transformiert in eine Folge* $\{z_n\}$ *mit* $\Sigma|z_n|<\infty$, *wenn für alle beschränkten Folgen* $\{b_n\}$ *die Reihen* $\Sigma_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu} b_n$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ *existieren und*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big|\sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu} b_n\Big|<\infty \qquad (b_n=O(1)) \tag{18}$$

ist.

SATZ 7. *Genau dann wird jede Folge* $\{x_n\}$ *mit* $\Sigma|y_n|<\infty$ *durch* (15) *transformiert in eine beschränkte Folge* $\{z_n\}$, *wenn für alle* $\{\alpha_n\}$ *mit* $\Sigma|\alpha_n|<\infty$ *die Reihen* $\Sigma_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu}\alpha_n$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ *existieren und*

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu}\alpha_n O(1) \quad (\Sigma|\alpha_n|<\infty) \tag{19}$$

ist für $\nu\to\infty$.

ZUSATZ 1. Die Sätze 5 und 6 bleiben wörtlich richtig, wenn nur Nullfolgen $\{b_n\}$ zugelassen werden.

ZUSATZ 2. Die Sätze 4 und 6 bleiben wörtlich richtig, wenn nur Folgen $\{x_n\}$ mit konvergentem $\{y_n\}$ zugelassen werden.

ZUSATZ 3. Werden in Satz 4 (Satz 6) nur Matrizen $(A_{n\nu})$ betrachtet, welche die Bedingungen (Zs) und (Sp) ((Sp)) erfüllen, so gibt (16) ((19)) die genauen Bedingungen dafür, dass jede konvergente Folge $\{y_n\}$ $(\Sigma|y_n|<\infty)$ in eine konvergente Folge $\{z_n\}$ übergeführt wird.

Eine Reihe Σx_ν heisst C-summierbar durch ein normales Matrixverfahren C das durch eine normale Matrix $(c_{n\nu})$ dargestellt wird, falls die durch

$$y_n=\sum_{\nu=0}^{n} c_{n\nu}x_\nu \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{20}$$

erklärte Folge $\{y_n\}$ konvergiert. Ist $y_n=O(1)$, so heisst die Reihe C beschränkt und ist $\Sigma|y_n-y_{n-1}|<\infty$, so heisst die Reihe $|C|$-summierbar. Aus (20) ergibt sich sofort die Darstellung

$$(21)\qquad \zeta_n = y_n - y_{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{c}_{n\nu}\, x_\nu \quad (y_{-1} = 0,\ \bar{c}_{00} = c_{00},\ \bar{c}_{n\nu} = c_{n\nu} - c_{n-1,\nu},\ n \geqq 1)$$

und den Bedingungen $\{y_n\}$ konvergiert, $y_n = O(1)$ und $\Sigma\,|y_n - y_{n-1}| < \infty$ entsprechen die Bedingungen $\Sigma_0^\infty \zeta_n$ konvergiert, $\Sigma_0^m \zeta_n = O(1)$, $\Sigma\,|\zeta_n| < \infty$ und umgekehrt. Wir nennen (20) die *RF*-Form (Reihen-Folgen) und (21) die *RR*-Form (Reihen-Reihen) des Matrixverfahrens C[7].

Das Verfahren C heisst konvergenztreu (absolut konvergenztreu), wenn jede konvergente (absolut konvergente) Reihe $\Sigma\, x_\nu$ in eine konvergente Folge $\{y_n\}$ (absolut konvergente Reihe $\Sigma\,\zeta_\nu$) transformiert wird und permanent (absolut permanent) wenn darüber hinaus noch stets $\Sigma x_\nu = \lim y_n$ $(\Sigma\, x_\nu = \Sigma\,\zeta_\nu$ für alle $\Sigma\,|x_\nu| < \infty)$ ist. Ist C permanent (absolut permanent), so gilt für die Matrix $(c_{n\nu})$ der *RF*-Form die Beziehung

$$(22)\qquad \lim_{n\to\infty} c_{nk} = 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

wie man sofort durch Betrachtung der speziellen Reihen $\Sigma\, x_\nu$ mit $x_k = 1$, $x_\nu = 0$ $(\nu \neq k)$ erkennt.

Wir werden im folgenden in den Sätzen 4 – 7 die Matrizen $(a_{n\nu})$ bzw. $(b_{n\nu})$ als Darstellungen von Matrixverfahren A bzw. B auffassen die auf die Reihen $\Sigma\, x_\nu$ bzw. $\Sigma\, x_\nu\, \varepsilon_\nu$ angewandt werden, so dass die Sätze 4 – 7 (bzw. Zusätze) Bedingungen angeben für Transformation von A-summierbaren, A-beschränkten, $|A|$-summierbaren Reihen $\Sigma\, x_\nu$ in Reihen $\Sigma\, x_\nu\, \varepsilon_\nu$, die B-summierbar oder $|B|$-summierbar sind. Somit ist für $(a_{n\nu})$ in den Sätzen 4 und 6 die *RF*-Form und in den Sätzen 5 und 7 die *RR*-Form zu verwenden, während für $(b_{n\nu})$ die *RF*-Form in den Sätzen 4 und 7 und die *RR*-Form in den Sätzen 5 und 6 einzusetzen ist.

HILFSSATZ 5. *Es sei A und B normale Matrixverfahren. Ist B permanent und A absolut konvergenztreu und bewirkt eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ eine der in den Sätzen 4 – 7 genannten Transformationen, so ist $\varepsilon_n = O(1)$ und $\varepsilon_n = O\,(a_{nn}/b_{nn})$*[8].

B e w e i s . Die Annahme über $\{\varepsilon_n\}$ impliziert, dass jede $|A|$-summierbare Reihe $\Sigma\, x_\nu$ übergeführt wird in eine B-beschränkte Reihe $\Sigma\, x_\nu\, \varepsilon_\nu$ (gehen in den Sätzen 4 und 6 alle $y_n = o(1)$ über in $z_n = O(1)$, so auch

[7] Jeder *RF*-Form entspricht genau eine *RR*-Form und umgekehrt.

[8] Die *RF*- und *RR*-Form eines normalen Verfahrens haben dieselben Diagonalelemete.

alle $y_n = O(1)$). Es ist also ($(b_{n\nu})$ in der *RF*- und $(a_{n\nu})$ in der *RR*-Form)

$$\sum_{\mu=0}^{n} b_{n\mu}\, x_\mu\, \varepsilon_\mu = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n\nu}\, y_\nu = O(1) \qquad (n \to \infty)$$

für alle $\Sigma |y_n| < \infty$, und daraus folgt nach Hilfssatz 4, dass $|A_{n\nu}| \leqq K$ ist. Setzen wir $x_k = 1$, $x_\nu = 0$ $(\nu \neq k)$, so ist

$$|b_{nk}\, \varepsilon_k| \leqq K \sum_{\nu=k}^{n} |a_{\nu k}| \; (k \leqq n), \text{ d. h. } |b_{kk}\, \varepsilon_k| \leqq K\, |a_{kk}| \text{ und } |\varepsilon_k| \leqq K \sum_{\nu=k}^{\infty} |a_{\nu k}|$$

(wegen (22)) und daraus ergeben sich (beachte Hilfssatz 2) sofort die Behauptungen[9].

3. SPEZIALISIERUNG AUF CESÀROVERFAHREN

Wir wollen die in den Bedingungen (16)—(19) auftretenden Summen für Cesàroverfahren berechnen. Dabei ist der Unterschied zwischen der *RF*- und *RR*-Form zu beachten.

Das Cesàroverfahren C_α $(\alpha > -1)$ wird in der *RF*-Form dargestellt durch die Transformation

$$\sigma_n = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^\alpha\, a_\nu \quad \left(n = 0, 1, 2, \ldots;\; A_n^\lambda = \binom{n+\lambda}{n}\right), \tag{23}$$

und in der *RR*-Form durch

$$\zeta = a_0, \quad \zeta_n = \frac{1}{nA_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\, \nu\, a_\nu \quad (n \geqq 1). \tag{24}$$

Die inversen Transformationen sind

$$a_n = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha-2}\, A_\nu^\alpha\, \sigma_\nu, \quad a_0 = \zeta_0, \quad a_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{-\alpha-1}\, \nu\, A_\nu^\alpha\, \zeta_\nu \quad (n \geqq 1). \tag{25}$$

Für $\alpha \geqq 0$ ist das Verfahren C_α permanent und absolut permanent.

Zu einer Zahlenfolge $\{\delta_\nu\}$ wird die Differenz $\Delta^\alpha \delta_n$ (α beliebig) erklärt durch

$$\Delta^\alpha \delta_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{-\alpha-1}\, \delta_\nu \tag{26}$$

(falls die Reihe konvergiert). Ist $\delta_n = O(1)$, so existiert $\Delta^\alpha \delta_n$ offenbar für $\alpha \geqq 0$ und alle n. Ist $\delta_n = O(1/n^\gamma)$ $(\gamma \geqq 0)$, so ist $\Delta^\alpha \delta_n = O(1/n^\gamma)$ $(\alpha \geqq 0)$.

[9]) Vgl. hierzu [13] S. 275 (46) und S. 280, Satz 10.

Setzt man in (15) für $(a_{n\nu})$ das C_α-Verfahren in der RF-bzw. RR-Form ein, so ergeben sich aus (25) und (26) die folgenden Beziehungen

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu}\, c_n = A_\nu^\alpha\, \Delta^{\alpha+1}\left(\varepsilon_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} b_{n\nu}\, c_n\right), \quad \nu \geqq 0 \qquad (C_\alpha \text{ in der } RF\text{-Form}) \tag{27}$$

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n\nu}\, c_n = \begin{cases} \nu\, A_\nu^\alpha\, \Delta^\alpha \left(\dfrac{\varepsilon_\nu}{\nu} \sum\limits_{n=\nu}^{\infty} b_{n\nu}\, c_n\right), & \nu \geqq 2 \\ \varepsilon_0 \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{n0}\, c_n\,, & \nu = 0 \end{cases} \qquad (C_\alpha \text{ in der } RR\text{-Form}). \tag{28}$$

Diese Beziehungen sind zunächst rein formal; sie sind sicherlich gültig (einschliesslich der Existenz der links stehenden Summen), falls die rechts stehenden Doppelsummen absolut konvergieren.

4. HILFSSÄTZE ÜBER DIFFERENZEN

HILFSSATZ 6. *a) Es sei $\beta \geqq 0$. Genau dann erfüllt eine Folge $\{\delta_n\}$ die Bedingungen*

$$\delta_n = O(1) \quad \textit{und} \quad \Sigma\,(n+1)^\beta\, |\Delta^{\beta+1}\, \delta_n| < \infty\,, \tag{29}$$

wenn gilt

$$\delta_n = c + \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^\beta \frac{\alpha_\nu}{(\nu+1)^\beta} \quad \textit{mit} \quad \Sigma\,|\alpha_n| < \infty\,. \tag{30}$$

b) Es sei $\beta > 0$. Genau dan erfüllt eine Folge $\{\delta_n\}$ die Bedingungen

$$\delta_n = O(1) \quad \textit{und} \quad \Delta^\beta\, \delta_n = \frac{O(1)}{n^{\beta+1}}\,, \tag{31}$$

wenn gilt

$$\delta_n = c + \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{\beta-1} \frac{b_\nu}{(\nu+1)^{\beta+1}} \quad \textit{mit} \quad b_n = O(1). \tag{32}$$

Dies ist auch für $\beta = 0$ richtig, wenn $c = 0$ gesetzt wird.

c) Genau dann ist (21) *bzw.* (31) *für eine Nullfolge erfüllt, wenn* (30) *bzw.* (32) *mit $c = 0$ gilt.*

B e w e i s[10]. Wir stellen zunächst fest, dass für alle $\Sigma\,|\alpha_n| < \infty$ die Beziehung

---

[10]) Vgl. hierzu [12] S. 40–43 und [14] § 1.

$$\Delta^{-p}\left(\Delta^{-q}\frac{\alpha_n}{(n+1)^\beta}\right)=\Delta^{-(p+q)}\left(\frac{\alpha_n}{(n+1)^\beta}\right) \tag{33}$$

$$(\beta \geqq 0, \quad p \leqq \beta+1, \quad q \leqq \beta+1, \quad p+q \leqq \beta+1)$$

gilt. Dies ergibt sich durch unmittelbare Ausrechnung (alle auftretenden Summen und Doppelsummen sind absolut konvergent). Speziell folgt aus (33) für $b_n = O(1)$ die Beziehung

$$\Delta^{-p}\left(\Delta^{-q}\frac{b_n}{(n+1)^{\beta+1}}\right)=\Delta^{-(p+q)}\left(\frac{b_n}{(n+1)^{\beta+1}}\right) \tag{34}$$

$$(\beta > 0, \quad p < \beta+1, \quad q < \beta+1, \quad p+q < \beta+1).$$

Gemäss der Definition (26) kann man (30) bzw. (32) folgendermassen schreiben:

$$\delta_n = c + \Delta^{-(\beta+1)}\frac{\alpha_n}{(n+1)^\beta} \quad (=c+o(1))$$

bzw.

$$\delta_n = c + \Delta^{-\beta}\frac{b_n}{(n+1)^{\beta+1}} \quad \left(=c+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

(Die eingeklammerten Beziehungen sind unschwer nachzurechnen). Wegen (33) bzw. (34) gilt nun (29) bzw. (31).

Aus (29) folgt die Beziehung $\Delta^{\beta+1}\delta_n = \dfrac{\alpha_n}{(n+1)^\beta}$ $(\Sigma\,|\,\alpha_n\,| < \infty)$. Durch (eventuell mehrfache) Anwendung eines Lemmas von Andersen[11] folgt nach (33), dass $\Delta\,\delta_n = \Delta^{-\beta}\dfrac{\alpha_n}{(n+1)^\beta}$ ist. Daraus folgt wegen (33), dass $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty}\Delta\,\delta_\nu = \Delta^{-1}\left(\Delta^{-\beta}\dfrac{\alpha_n}{(n+1)^\beta}\right) = \Delta^{-(\beta+1)}\dfrac{\alpha_n}{(n+1)^\beta}$ existiert; dies ist aber gerade die Beziehung (30), wenn $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = c$ gesetzt wird. Ganz entsprechend folgt (32) aus (31) (für $\beta > 0$).

HILFSSATZ 7. *Aus* $\delta_n = O(1)$ *und* $\Delta^\beta\dfrac{\delta_n}{(n+1)} = \dfrac{O(1)}{n^{\beta+1}}$ $(\beta \geqq 0)$ *folgt* $\Delta^\beta\,\delta_n = \dfrac{O(1)}{n^\beta}$ $(n\to\infty)$.

---

[11] Andersen [1], [2], Bosanquet [5]. Ist $x_n = O(1)$ $(=o(1))$, so ist $\Delta^\alpha(\Delta^\beta x_n) = \Delta^{\alpha+\beta}x_n$ (und beide Seiten existieren) für $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta > 0$ $(\alpha \geqq -1,\ \beta \geqq 0,\ \alpha+\beta \geqq 0)$.

Dieser Sachverhalt ist bekannt[12].

HILFSSATZ 8. *Erfüllt eine Zahlenfolge* $\{\delta_n\}$ *für* $\beta \geqq 0$ *die Bedingungen* (29), *so ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{\gamma} |\Delta^{\gamma+1} \delta_n| < \infty \quad (-1 < \gamma \leqq \beta), \tag{35}$$
$$\sum_{0}^{\infty} (n+1)^{\beta} |\Delta^{\beta+1+\lambda} \delta_n| < \infty \quad (\lambda \geqq 0)$$

und

$$\Delta^{\gamma} \delta_n = \frac{O(1)}{n^{\gamma}} \quad (0 \leqq \gamma \leqq \beta), \quad \Delta^{\beta+\lambda} \delta_n = \frac{O(1)}{n^{\beta}} \quad (\lambda \geqq 0) \quad (n \to \infty). \tag{36}$$

Dieser Sachverhalt ist bekannt[13]. Die Beziehungen in denen λ auftritt, sind primitive Folgerungen der davorstehenden Beziehungen fur $\gamma = \beta$.

HILFSSATZ 9. *Erfüllt eine Zahlenfolge* $\{\delta_n\}$ *für* $\beta \geqq 0$ *die Bedingungen* (31), *so ist*

$$\delta_n = c + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (c = 0 \textit{ für } \beta = 0),$$
$$\Delta^{\gamma} \delta_n = O\left(\frac{1}{n^{\gamma+1}}\right) \quad (0 < \gamma \leqq \beta), \tag{37}$$
$$\Delta^{\beta+\lambda} \delta_n = O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right) \quad (\lambda \geqq 0).$$

Die erste Beziehung in (37) folgt aus Hilfssatz 6, die dritte ist eine primitive Folgerung aus der zweiten (bzw. für $\beta = 0$) und diese ist bekannt[14].

BEMERKUNG. Die Hilfssätze 8 und 9 können in einfacher Weise bewiesen werden durch Verwendung der Darstellungen (30) bzw. (32) und anschliessende direkte Ausrechnung. Diese Rechnung kann vermieden werden, wenn man die Sätze 4–7 auf die bekannten Beziehungen $O(C_{\gamma}) \subseteq O(C_{\beta})$, $|C_{\gamma}| \subseteq O(C_{\beta})$ und $|C_{\gamma}| \subseteq |C_{\beta}|$ $(-1 < \gamma \leqq \beta)$[15] anwendet. Aus den Sätzen 4, 7 und 5 folgt in diesen Spezialfällen ($\varepsilon_{\mu} = 1$; Formel (27) bzw. (28)[16]), dass die folgenden Beziehungen stets richtig

[12] Vgl. [14], § 1.

[13] Vgl. Andersen [1], [2], Bosanquet [5], Lemma 2.

[14] Vgl. etwa [14], Lemma 1.

[15] $O(C_{\delta})$ bzw. $|C_{\delta}|$ seien die Räume der C_{δ}-beschränkten bzw. $|C_{\delta}|$-summierbaren Reihen.

[16] Die für die Gültigkeit dieser Formeln hinreichende absolute Konvergenz ist in den folgenden Fällen offenbar vorhanden.

sind $(\beta \geqq 0)$:

$$(38)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\gamma \left| \Delta^{\gamma+1} \left(\sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\beta} \frac{\alpha_n}{A_n^\beta} \right) \right| < \infty \quad (-1 < \gamma \leqq \beta;\ \Sigma |\alpha_n| < \infty),$$

$$(39)\qquad \nu A_\nu^\gamma \Delta^\gamma \left(\frac{1}{\nu} \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-a}^{\beta]} \frac{\alpha_n}{A_n^\beta} \right) = O(1),\ \nu \to \infty\ (-1 < \gamma \leqq \beta,\ \Sigma |\alpha_n| < \infty),$$

$$(40)\qquad \nu A_\nu^\gamma \Delta^\gamma \left(\sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\beta-1} \frac{b_n}{(n+1)^{\beta+1}} \right) = O(1),\ \nu \to \infty\ (-1 < \gamma \leqq \beta,\ b_n = O(1)).$$

Beachtet man die Darstellungen (30) bzw. (32) so erkennt man, dass aus (38) die Beziehung (35), aus (39) (nach Anwendung von Hilfssatz 7) (36) und aus (40) die Beziehung (37) folgt.

In ähnlicher Weise kann Hilfssatz 7 bewiesen werden durch Verwendung der Tatsache, dass eine Reihe Σa_ν $|C_\alpha|$-summierbar ist $(\alpha \geqq 0)$, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{A_n^\alpha} \left| \sum_{n=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} a_\nu \right| < \infty$$

ist[17]).

5. *SUMMIERBARKEITSFAKTOREN UND ZUGEHÖRIGE BEZIEHUNGEN ÜBER DIFFERENZEN*

Wir wollen im folgenden die Sätze 4, 5 und 6 für den Spezialfall $A = C_\alpha$, $B = C_\beta$ $(\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0)$ formulieren. Nach Hilfssatz 5 kommen dabei nur Folgen $\varepsilon_n = O(1)$ (und $\varepsilon_n = O(n^{\beta-\alpha})$) in Frage. Daraus folgt, dass die Formeln (27) und (28) erfüllt sind, falls $\{c_n\}$ die durch den jeweils in Rede stehenden Satz geforderten Eigenschaften besitzt und für $(b_{n\nu})$ die zugehörige Form der C e s à r o verfahren eingesetzt wird. Darüber hinaus sind auch noch die im Zusatz 3 zu Satz 4 auftretenden Bedingungen erfüllt[18]).

---

[17]) Ist $\eta_n A_n^\alpha = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} a_\nu$ und ist ζ_n durch (24) erklärt, so ist für $n \geqq 1$

$$\zeta_n = -\frac{\alpha}{n A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu^\alpha \eta_\nu + \eta_n.$$

[18]) Denn ist $(a_{n\nu})$ bzw. $(b_{n\nu})$ die *RF*-Form des C_α- bzw. C_β-Verfahrens $(\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0)$, so ist

$$\lim A_{n\nu} = \lim \frac{A_\nu^\alpha}{A_n^\beta} \sum_{\mu=\nu}^{n} A_{n-\mu}^{\beta} A_{\mu-\nu}^{-\alpha-2} \varepsilon_\mu = A_\nu^\alpha \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\mu$$

(C_β ist permanent) und $\sum_{\nu=0}^{n} A_{n\nu} = \varepsilon_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

SATZ 8. *Eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *führt genau dann jede* C_α *-summierbare* (C_α *-beschränkte) Reihe* Σa_ν $(\alpha \geqq 0)$ *über in eine* C_β *-summierbare* C_β *-beschränkte) Reihe* $\Sigma a_\nu \varepsilon_\nu$ $(\beta \geqq 0)$, *wenn gilt: Es ist* $\varepsilon_n = O(1)$ *und*

$$(41) \qquad \sum_0^\infty (n+1)^\alpha \, | \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \delta_n | < \infty$$

gilt für alle Folgen $\{\delta_n\}$ *mit*

$$(42) \qquad \delta_n = o(1), \quad \sum_0^\infty (n+)^\beta \, | \Delta^{\beta+1} \delta_n | < \infty .$$

SATZ 9. *Eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *führt genau dann jede* $|C_\alpha|$ *- summierbare Reihe* Σa_ν $(\alpha \geqq 0)$ *über in eine* $|C_\beta|$ *- summierbare Reihe* $\Sigma a_\nu \varepsilon_\nu$ $(\beta \geqq 0)$, *wenn gilt: Es ist* $\varepsilon_n = O(1)$ *und*

$$(43) \qquad \Delta^\alpha \varepsilon_n \delta_n = \frac{O(1)}{n^{\alpha+1}} \quad (n \to \infty)$$

für alle Folgen $\{\delta_n\}$ *mit*

$$(44) \qquad \delta_n = o(1), \quad \Delta^\beta \delta_n = \frac{O(1)}{n^{\beta+1}} \quad (n \to \infty)^{19)}.$$

SATZ 10. *Eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *führt genau dann jede* C_α *- summierbare* (C_α *- beschränkte) Reihe* Σa_ν $(\alpha \geqq 0)$ *über in eine* $|C_\beta|$ *- summierbare Reihe* $\Sigma a_\nu \varepsilon_\nu$ $(\beta \geqq 0)$, *wenn gilt: Es ist* $\varepsilon_n = O(1)$ *und*

$$(45) \qquad \sum_0^\infty (n+1)^\alpha \, | \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \delta_n | < \infty$$

für alle Folgen $\{\delta_n\}$ *mit*

$$(46) \qquad \delta_n = O(1), \quad \Delta^\beta \frac{\delta_n}{n} = \frac{O(1)}{n^{\beta+1}} \quad (n \to \infty) .$$

---

[19] Aus (44) folgt (Hilfssatz 9), dass sogar $\delta_n = O(1/n)$ ist.

Beweis der Sätze 8—10. Die Bedingungen (16), (17) und (18) nehmen wegen (27) und (28) im vorliegenden Spezialfall folgende Gestalt an:

$$(47)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu^\alpha \left| \Delta^{\alpha+1}\left(\varepsilon_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^\beta \frac{\alpha_n}{A_n^\beta}\right)\right| < \infty \qquad (\Sigma|\alpha_n|<\infty),$$

$$(48)\qquad \nu^{\alpha+1}\,\Delta^\alpha\left(\varepsilon_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\beta-1} \frac{b_n}{nA_n^\beta}\right) = O(1) \qquad (b_n = O(1)),$$

$$(49)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^\alpha \left| \Delta^{\alpha+1}\left(\varepsilon_\nu\, \nu \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\beta-1} \frac{b_n}{nA_n^\beta}\right)\right| < \infty \qquad (b = O(1)),$$

und dies sind nach Hilfssatz 6 gerade die in den Sätzen 8—10 auftretenden Bedingungen.

BEMERKUNG. Man kann aus dem Zusatz 1 zu den Sätzen 5 und 6 folgern, dass die Sätze 9 bzw. 10 richtig bleiben, wenn in den Bedingungen (44) bzw. (46) das ganz rechts stehende O durch o ersetzt wird.

6. *BEWEIS EINIGER MIT SÄTZEN ÜBER SUMMIERBARKEITSFAKTOREN GLEICHWERTIGER SÄTZE ÜBER DIFFERENZ (GANZZAHLIGE INDIZES)*

Notwendige und hinreichende Bedigungen dafür, dass eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ die Beziehung (41), (43) oder (45) für alle in Frage kommenden δ_n erfüllt, sind über die entsprechenden Sätze für Summierbarkeitsfaktoren bekannt[20]. Im folgenden werden wir uns direkt mit diesen Beziehungen beschäftigen.

SATZ 11. *Es sei $\alpha \geqq 0$ ganzzahlig und $\beta \geqq 0$. Genau dann erfüllt eine Folge $\varepsilon_n = O(1)$ die Bedingung (41) für alle δ_n mit (42), wenn gilt*

$$(50)\qquad \Sigma\,(n+1)^\alpha\,|\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n| < \infty$$

und

$$(51)\qquad \varepsilon_n = O(n^{\beta-\alpha}) \quad \text{für} \quad \beta \leqq \alpha.$$

Beweis. Setzt man die Darstellung (32) für die Folgen (42) ein in (41), so folgt (vgl. den Beweis von Hilfssatz 3), dass gilt

[20]) Vgl. [1]) und [3]).

$$\left| \sum_{n \in \mathfrak{N}} (n+1)^\alpha \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n \delta_n \right| = \left| \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{\alpha_\rho}{A_\rho^\beta} \sum_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n \leqq \rho}} (n+1)^\alpha \sum_{\nu=n}^{\rho} A_{\rho-\nu}^{\beta} A_{\nu-n}^{-\alpha-2} \varepsilon_\nu \right| \leqq K$$

(für $\Sigma \mid \alpha_\nu \mid < \infty$, K unabhängig von $\mathfrak{N}$); nach Hilfssatz 4 ist also

$$\left| \sum_{\substack{n \in \mathfrak{N} \\ n \leqq \rho}} (n+1)^\alpha \sum_{\nu=n}^{\rho} \frac{A_{\rho-\nu}^{\beta}}{A_\rho^\beta} A_{\nu-n}^{-\alpha-2} \varepsilon_\nu \right| \leqq K_1$$

(K_1 unabhängig von $\mathfrak{N}$) und für $\rho \to \infty$ folgt darus (50) (sogar für alle $\alpha \geqq 0$). Aus Hilfssatz 5 folgt (51) für alle $\alpha \geqq 0$ (oder für ganze $\alpha \geqq 0$ aus der Tatsache, dass (41) gelten muss für alle δ_n mit $\Sigma (n+1)^\beta \mid \delta_n \mid < \infty$).

Für jedes p mit $0 \leqq p \leqq \alpha + 1$ folgt aus (42), (50) und (51) nach Hilfssatz 8, dass gilt (q fest)

$$\Sigma (n+1)^\alpha \mid \Delta^{\alpha+1-p} \varepsilon_n \Delta^p \delta_{n+q} \mid = \tag{52}$$

$$= \begin{cases} O(1) \Sigma (n+1)^\beta \mid \Delta^p \delta_n \mid < \infty & \text{falls } \beta \leqq \alpha \text{ und } \beta + 1 \leqq p \leqq \alpha + 1, \\ O(1) \Sigma (n+1)^{p-1} \mid \Delta^p \delta_n \mid < \infty & \text{für } 1 \leqq p \leqq \operatorname{Max}(\alpha+1, \beta+1), \\ O(1) \Sigma (n+1)^{\alpha-p} \mid \Delta^{\alpha+1-p} \varepsilon_n \mid < \infty & \text{für } 0 \leqq p \leqq \beta. \end{cases}$$

Wegen (4) ($q = p = 0, 1, \ldots, \alpha + 1$) sind also (50) und (51) auch hinreichend.

SATZ 12. *Es sei* $\alpha \geqq 0$ *ganzzahlig und* $\beta \geqq 0$. *Genau dann erfüllt eine Folge* $\varepsilon_n = O(1)$ *die Bedingung* (43) *für alle* δ_n *mit* (44), *wenn gilt* (51) *und*

$$\Delta^\alpha \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{O(1)}{n^{\alpha+1}} \quad (n \to \infty)^{21)}. \tag{53}$$

Beweis. Die Notwendigkeit von (53) folgt mit $\delta_n = 1/n$ (sogar für alle $\alpha \geqq 0$) und (51) folgt aus Hilfssatz 5 für alle $\alpha \geqq 0$ (oder für ganzes $\alpha \geqq 0$ aus der Tatsache, dass (43) gelten muss für alle δ_n mit $\delta_n = O(1/n^{\beta+1})$).

---

[21]) Nach [14] § 1 kann (53) auch durch die gleichwertige Bedingung $\Delta^\alpha \varepsilon_n = O(1)/n^\alpha$ ersetzt werden.

Für jedes p mit $0 \leqq p \leqq \alpha$ folgt aus (44), (51) und (53) nach den Hilfssätzen 7 und 9, dass gilt (q fest)

$$(54)\qquad n^{\alpha+1}\,\Delta^{\alpha-p}\,\varepsilon_n\,\Delta^p\,\delta_{n+q} =$$

$$= \begin{cases} n^{\alpha+1}\,\dfrac{O(1)}{n^{\alpha-\beta}}\,\Delta^p\,\delta_{n+q} = O(1) \text{ falls } \beta \leqq \alpha \text{ und } \beta \leqq p \leqq \alpha, \\[2ex] n^{\alpha+1}\,\dfrac{O(1)}{n^{\alpha-p}}\,\Delta^p\,\delta_{n+q} = O(1) \text{ für } 0 \leqq p \leqq \beta. \end{cases}$$

Wegen (4) ($q = p = 0, 1, \ldots, \alpha + 1$) sind also (51) und (53) auch hinreichend.

SATZ 13. *Es sei $\alpha \geqq 0$ ganzzahlig und $\beta \geqq 0$. Genau dann erfüllt eine Folge $\varepsilon_n = O(1)$ die Bedingung (45) für alle δ_n mit (46), wenn gilt (50), und*

$$(55)\qquad \Sigma\,(n+1)^{\alpha-\beta}\,|\,\varepsilon_n\,| < \infty \quad \textit{für} \quad \beta \leqq \alpha + 1,$$

bzw.

$$(56)\qquad \Sigma\left|\frac{\varepsilon_n}{n+1}\right| < \infty \qquad \textit{für} \quad \beta \geqq \alpha + 1.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass (50) und (55) bzw. (56) hinreichend sind. Für jedes p mit $0 \leqq p \leqq \alpha + 1$ ist (q fest)

$$(57)\qquad \Sigma\,(n+1)^{\alpha}\,|\,\Delta^{\alpha+1-p}\,\varepsilon_n\,\Delta^p\,\delta_{n+q}\,| =$$

$$= \begin{cases} O(1)\,\Sigma\,(n+1)^{\alpha-p}\,|\,\Delta^{\alpha+1-p}\,\varepsilon_n\,| < \infty \text{ für } 0 \leqq p \leqq \beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{und } 0 \leqq p < \alpha + 1, \\ O(1)\,\Sigma\,(n+1)^{\alpha-\beta}\,|\,\varepsilon_n\,| < \infty \text{ falls } \beta \leqq \alpha + 1, \quad p \geqq \beta, \\ O(1)\,\Sigma\left|\dfrac{\varepsilon_n}{n+1}\right| < \infty \text{ falls } p = \alpha + 1, \quad \beta \geqq \alpha + 1. \end{cases}$$

Nach (4) ($q = p = 0, 1, \ldots, \alpha + 1$) sind also (50), (55) und (56) hinreichend. Dass (50) notwendig ist, ergibt sich sofort aus $\delta_n = 1$ (sogar für alle $\alpha \geqq 0$) und dass (55) notwendig ist, folgt aus der Tatsache, dass (45) gelten muss für alle $\delta_n = O(1/n^{\beta})$. Ist nun $\beta > \alpha + 1$, so folgt aus (50), dass $\Sigma\,(n+1)^{\alpha}\,|\,\Delta^{\alpha+1-p}\,\varepsilon_n\,\Delta^p\,\delta_{n+p}\,| < \infty$ ist für $0 \leqq p < \alpha + 1$ (dies ist aus der ersten Zeile der rechten Seite von (57) zu ersehen). Die für $p = \alpha + 1$ übrigbleibende Bedingung

$$\Sigma (n+1)^{\alpha} |\varepsilon_n| \, |\Delta^{\alpha+1} \delta_n| < \infty$$

ergibt mit $\delta_n = 1/A_n^{\rho}$, $\rho \neq 0$ und $\Re \rho = 0$ wegen

$$\Delta^{\alpha+1} \delta_n = \frac{\rho}{\rho+\alpha+1} \frac{1}{A_n^{\rho+\alpha+1}}$$ [22])

gerade (56).

Bei einer genauen Durchsicht der Beweise der Sätze 11 – 13 erkennt man, dass mehr bewiesen wurde als im Wortlaut dieser Sätze enthalten ist. Dies geschah deshalb, um die weiteren Überlegungen vorzubereiten, die sich auf nicht ganze α beziehen (Teil II dieser Arbeit). Wenn nur die Frage nach Summierbarkeitsfaktoren der in den Sätzen 8 – 10 aufretenden Typen behandelt werden soll (α ganzzahlig), so werden verschiedene Überlegungen dieser Arbeit gar nicht benötigt. Um etwa den hinreichenden Teil des in der Einleitung genannten Satzes von Schur zu beweisen genügt es nach Satz 4, die Richtigkeit der Beziehung (47) nachzuweisen (man kann dabei noch $\beta \leqq \alpha$ annehmen). Setzt man dort zur Abkürzung

$$\delta_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} A_{\nu-n}^{\beta} \frac{a_\nu}{(\nu+1)^{\beta}},$$

so genügt nach (52) zum Beweis von (48) die Kenntnis der Beziehungen

$$\delta_n = O(1), \quad \Sigma (n+1)^{p-1} |\Delta|^p \delta_n| < \infty \quad (p \text{ ganz und } \leqq \beta + 1)$$

und

$$\Sigma (n+1)^{\beta} |\Delta^{\beta+1+\lambda} \delta_n| < \infty \quad (\lambda \geqq 0)$$

(diese können aus der Darstellung von δ_n mühelos gewonnen werden) und die Tatsache, dass $\Delta^q \varepsilon_n = O(1/n^q)$ (q ganz und $0 \leqq q \leqq \alpha$) aus (50) und $\varepsilon_n = O(1)$ folgt [6] (Bosanquet) Lemma 7). Entsprechendes gilt in den übrigen Fällen.

(Eingegangen am 7. Dezember 1955)

---

[22]) Vgl. hierzu [13], S. 288 Fussnote [40]). Das hier gewählte Gegenbeispiel entspricht genau dem von Tatchell [16] angegebenen.

LITERATUR

[1] Andersen, A. F. — Studier over Cesàro's summabilitetsmetode. Copenhagen 1921.

[2] ——————— Comparison theorems in the theory of Cesàro summability. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **27** (1928), 39–71.

[3] ——————— On summability factors of absolute C-summable series. 12. *Skand. Math. Kongress*, Lund 1953, 1–4.

[4] Banach, S. — Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932.

[5] Bosanquet, L. S. — Note on the Bohr-Hardy theorem. *Journ. Lond. Math. Soc.* **17** (1942), 166–173.

[6] ——————— Note on convergence and summability factors. *Journ. Lond. Math. Soc.* **20** (1945), 39–48.

[7] ——————— Note on convergence and summability factors. III. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **50** (1949), 483–496.

[8] Chow, H. C. — Note on convergence and summability factors. *Journ. Lond. Math. Soc.* **29** (1954), 459–476.

[9] Knopp, K. — Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes. *Journ. für Math.* **187** (1950), 70–74.

[10] Knopp, K. und G. G. Lorentz. — Beiträge zur absoluten Limitierung. *Archiv d. Math.* **2** (1949), 10–16.

[11] Mears. F. M. — Absolute regularity and the Nörlund mean. *Ann. of Math.* **38** (1937), 594–601.

[12] Peyerimhoff, A. — Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. *Math. Zeitschr.* **55** (1951), 23–54.

[13] ——————— Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. *Math. Zeitschr.* **57** (1953), 265–290.

[14] ——————— Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen. *Math. Zeitschr.* **59** (1954), 417–424.

[15] Schur, I. — Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. *Journ. für Math.* **151** (1921), 79–111.

[16] Tatchell, J. B. — A note on a theorem by Bosanquet. *Journ. Lond. Math. Soc.* **29** (1954), 207–211.