# SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DE FOURIER DES FONCTIONS CONTINUES

par

J. KARAMATA (Genève) et M. TOMIĆ (Beograd)

SOMMAIRE. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la F-permanence d'un procédé de sommation à matrice rectangulaire (Théorème 1). Les conditions suffisantes pour la F-permanence (Théorème 2).

**1.1.** Soit $\{\lambda_{\nu,n}\}$, $(\nu, n = 0, 1, 2, \ldots)$ une matrice infinie à éléments réels; nous dirons qu'elle engendre un *procédé de sommation à facteurs de convergence* et que la série $\Sigma u_\nu$ est sommable par ce procédé, sommable $-\Lambda$, lorsque toutes les séries

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_{\nu,n} u_\nu, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

convergent et lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe.

Nous dirons d'un procédé $\Lambda$ qu'il est *à matrice triangulaire* lorsque chaque ligne de la matrice $\{\lambda_{\nu,n}\}$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments différents de zéro. Dans le cas contraire, c.-à.-d. lorsque chaque ligne contient une infinité d'éléments différents de zéro, nous dirons qu'il est *à matrice rectangulaire.*

Un procédé de sommation $\Lambda$ est dit permanent (au sens de Toeplitz-Schur) lorsque toute série convergente est sommable $-\Lambda$ et lorsque la somme généralisée est égale à la somme de la série.

D'après le théorème connu de Toeplitz-Schur (voir O. Szász [11], p. 26) les conditions nécessaires et suffisantes pour que le procédé de sommation $\Lambda$ soit permanent sont

$$\lambda_{\nu,n} \to 1, \ n \to \infty \ \text{pour tout} \ \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

et

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\lambda_{\nu,n} - \lambda_{\nu+1,n}| = O(1), \quad n \to \infty, \tag{1.2}$$

**1.2.** Dans cet article nous étudierons les procédés qui somment les séries de Fourier des fonctions continues et nous dirons avec Hille et Tamarkin qu'un procédé de sommation $\Lambda$ est F-*permanent* (permanent au sens de Fejér) lorsqu'il somme les séries de Fourier de toute fonction continue.

Remarquons qu'on peut définir une permanence-F* d'un procédé de sommation $\Lambda$ en exigeant qu'il somme les séries de Fourier de toutes les fonctions qui n'ont que des discontinuités de première espèce, vers la somme généralisée $\{(f(x+0)+f(x-0)\}/2$.

Mais les permanences F et F* sont équivalentes. En effet, l'ensemble des conditions qui définissent la permanence F d'un procédé $\Lambda$ se trouvent énoncées dans le théorème 1 du § 2.1, les conditions (2.1)—(2.5). Il est évident que ces conditions sont nécessaires pour que le procédé $\Lambda$ soit F*-permanent; d'autre part, il est facile à constater qu'une fonction n'ayant que des discontinuités de première espèce est toujours sommable-$\Lambda$ lorsque ce procédé satisfait aux conditions (2.1)—(2.5). Les permanences F et F* étant équivalentes, nous nous bornerons pour plus de simplicité aux fonctions continues et périodiques à période $2\pi$.

Ainsi, soit $\overline{C}$ l'espace des fonctions continues et périodiques à période $2\pi$, $f \in \overline{C}$ et

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

sa série de Fourier, c.-à.-d.

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x \, dx,$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \nu x \, dx.$$

Posons

$$\Lambda_n(f, x) = \frac{1}{2} \lambda_{0,n} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu,n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \tag{1.3}$$

en remarquant que dans ce cas, on a formellement

$$\Lambda_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{f(x+t) + f(x-t)\} K_n(t)\,dt, \tag{1.4}$$

où $K_n(t)$ représente le noyau du procédé de sommation $\Lambda$ qui se trouve donné par

$$K_n(t) \sim \frac{\lambda_{0,n}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu,n} \cos \nu t, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Le procédé $\Lambda$ sera F-permanent lorsque les séries (1.3) convergent et lorsque

$$\Lambda_n(f, x) \to f(x), \qquad n \to \infty$$

pour toute $f(x) \in \overline{C}$.

Un procédé qui est F-permanent n'est pas nécessairement permanent au sens ordinaire; ainsi par exemple le procédé de Lebesgue

$$\lambda_{\nu n} = \frac{\sin \nu h}{\nu h}, \quad (h = 1/n \to 0),$$

n'est pas permanent, la condition (1.2) n'étant évidemment pas satisfaite; mais il est F-permanent, puisque dans ce cas

$$K_n(t) = \frac{h}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu h \cos \nu t}{\nu} = \begin{cases} \pi/2, & |t| < h, \\ \pi/4, & t = \pm h, \\ 0, & h < |t| \leqslant \pi, \end{cases}$$

ce qui donne d'après (1.4)

$$\Lambda_n(f,x) = \frac{1}{2h}\int_0^{h} \{f(x+t) + f(x-t)\}\,dt, \quad h = \frac{1}{n}.$$

Réciproquement tout procédé de sommation permanent n'est pas nécessairement F-permanent. C'est le cas, par exemple, du procédé de Borel

$$\lambda_{\nu,n} = \frac{1}{\nu!}\int_0^{n} e^{-t} t^{\nu}\,dt \quad (n \to \infty),$$

comme l'a montré C. N. Moore [5].

**1.3.** Ces dernières années ont paru un certain nombre de travaux relatifs à la sommation $\Lambda$ des séries de Fourier, dont la plupart se rapportent aux procédés à matrice triangulaire.

Les procédés de sommation à matrice rectangulaire (à l'exception des procédés particuliers tels que ceux de Lebesgue, Riemann, Abel-Poisson etc.) se trouve chez Hardy-Rogosinski ([2], p. 56), R. Salem ([9], et [10] p. 54). Chez Hardy-Rogosinski les facteurs de convergence $\lambda_{\nu,n}$ sont assujettis à la condition trop restrictive

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \,|\lambda_{\nu,n} - \lambda_{\nu+1,n}| < \infty. \tag{1.5}$$

Cette condition implique d'une part la permanence de ces procédés (et par ce fait exclu par exemple les procédés tels que celui de Lebesgue), et d'autre part dans l'expression de $\Lambda_n(f,x)$ (voir (1.3) et (1.4)) il est permis, après une sommation par partie, d'intervertir $\Sigma$ avec $\int$, qui de ce fait assure la convergence absolue de la série

$$\sum (\lambda_{\nu,n} - \lambda_{\nu+1,n})\, D_\nu(t),$$

où $D_\nu(t)$ désigne le noyau de Dirichlet. Aussi, la condition (1.5) est trop restrictive pour qu'on puisse en déduire des conditions nécessaires pour qu'un procédé soit F-permanent. Enfin, le cas traité par R. Salem est contenu dans le cas particulier du théorème 2, où la condition (3.3) est remplacé par la quasi-convexité uniforme de la suite $\{\lambda_{\nu,n}\}$, c'est-à-dire par (3.5). Salem suppose, en effet, la convexité simple de cette suite, et dans ce cas, les hypothèses (3.1) et (3.2) étant remplies, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\,|\Delta^2\lambda_{\nu,n}| = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\,\Delta^2\lambda_{\nu,n} = \lambda_{0,n} \leqslant C_2.$$

Dans ce cas la permanence simple se trouve impliquée.

Le but de cet article est, en premier lieu, de rectifier notre article [4] en donnant, par le théorème 1 du § 2.1, l'énoncés exact du théorème général, c'est-à-dire le théorème qui donne les conditions nécessaires et suffisantes pour la F-permanence du procédé $\Lambda$ à matrice réctangulaire. Dans ce théorème on peut remplacer les conditions (2.3) et (2.5) par la seule condition (2.13); toutefois cette dernière condition n'est que suffisante. En second lieu, dans le paragraphe 3, nous déduirons du théorème 1, le théorème 2 où les conditions (2.3) et (2.5) se trouvent remplacées par les conditions (3.2) et (3.3) qui ne sont plus que des conditions suffisantes mais plus simples par le fait qu'elles portent sur les facteurs $\lambda_{\nu,n}$ directement.

Le théorème 2 représente une extension aux procédés à matrices rectangulaires de certains théorèmes de Nikolsky [7] généralisées par

Nagy [6], mais que leurs auteurs ont établis pour les procédés à matrices triangulaires. Ainsi, la condition de Nagy, qui est de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (n-\nu) \lg \frac{n}{n-\nu} \,|\, \Delta^2 \lambda_{\nu, n} \,| = O(1),$$

est, dans le cas des procédés à matrices triangulaires, équivalente aux conditions (3.2) et (3.3) avec $m = n$, car on a

$$(n-\nu) \lg \frac{n}{n-\nu} < \frac{n+\nu}{n} \,| n-\nu \,| \lg \frac{n+\nu}{| n-\nu |} < 4 (n-\nu) \lg \frac{n}{n-\nu},$$

pour tout $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

**1.4.** Pour établir lesdites théorèmes, nous aurons besoin des deux théorèmes énoncés par le premier des deux auteurs [3], que nous reproduirons ici pour plus de clarté. Le premier de ces théorèmes, qui se trouve à la base de toute cette étude, est l'extension suivante d'un théorème de F. Riesz ([8], p. 119).

THÉORÈME A. 1) *Soit* $A_n(f)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *une suite de fonctionnelles linéaires definies dans l'espace des fonctions continues dans l'intervalle* $(a, b)$ *et* $\{g_m\}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, *une base de cet espace.*

*Pour que*

$$\lim_{n \to \infty} A_n(f)$$

*existe pour tout* $f \in C$, *il faut et il suffit que*

$$\| A_n \| = O(1), \quad n \to \infty \tag{1.6}$$

*et que*

$$\lim_{n \to \infty} A_n(g_m) \tag{1.7}$$

*existe pour tout* $m = 0, 1, 2, \ldots$

2) *Les conditions* (1.6) *et* (1.7) *étant remplies, il existe une fonctionnelle limite* $A$ *telle que*

$$A_n(f) \to A(f) \quad \textit{pour tout} \quad f \in C.$$

3) *Lorsque* $f(t)$ *est continue dans l'intervalle* $(a+\alpha, b+\beta), \alpha < \beta$ *et*

$$f_x(t) = f(x+t),$$

*alors*

$$A_n(f_x) \to A(f_x)$$

*uniformément dans* $(\alpha, \beta)$.

En posant dans ce théorème

$$\overline{f}_x = f(x+t) + f(x-t)$$

$$g_m(x) = \cos mx, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$a = 0, \quad b = \pi,$$

et

$$A_n(\overline{f}_x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \overline{f}_x(t) K_n(t)\, dt,$$

avec

$$K_n(t) \overset{def}{=} \frac{1}{2} \lambda_o + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \cos \nu t, \tag{1.8}$$

on en déduit comme conséquence immédiate le théorème suivant.

THÉORÈME B. *Pour que la suite* $\{\lambda_\nu\}$ *soit une suite de facteurs de convergence uniforme des séries de Fourier de toute fonction continue, il faut et il suffit que*

$$\int_0^\pi |K_n(t)|\, dt = O(1) \tag{1.9}$$

*où* $K_n(t)$ *est défini par la formule* (1.8).

*En outre, du fait que* (1.9) *entraîne l'existence de la limite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi K_n(t)\, dt = \overline{K}(x)$$

*avec* $\overline{K}(x)$ *à variation bornée, la formule de Parseval*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t)\, d\overline{K}(t) = \frac{1}{2} \lambda_0 a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1.10}$$

*aura également lieu et cette dernière série est uniformément covergente.*

**2.1.** Le théorème général qui donne les conditions nécessaires et suffisantes pour la permanence F des procédés Λ peut être formulé de la manière suivante.

THÉORÈME 1. *Pour que le procédé de sommation $\Lambda$ à matrice rectangulaire soit F-permanent, il faut et il suffit que:*

a) $\lambda_{\nu,n} \to 1, n \to \infty$, *pour chaque* $\nu = 0, 1, 2, \ldots$; (2.1)

b) *que la suite de fonctions*

$$K_{m,n}(t) \overset{def}{=\!=} \frac{\lambda_{0,n}}{2} + \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_{\nu,n} \cos \nu t \tag{2.2}$$

*satisfasse aux conditions*

$$\int_0^\pi |K_{m,n}(t)|\, dt \leqslant M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.3}$$

*où $M_n$ est indépendant de $m$;*

c) *qu'en posant*

$$\overline{K}_n(x) \overset{def}{=\!=} \lim_{m \to \infty} \int_0^x K_{m,n}(t)\, dt = \frac{1}{2} \lambda_{0n} t + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu,n}}{\nu} \sin \nu t. \tag{2.4}$$

*La suite $\overline{K}_n(t)$ soit à variation uniformément bornée, c'est-à-dire*

$$\int_0^\pi |d\overline{K}_n(t)| = O(1), \quad n \to \infty. \tag{2.5}$$

*L'existence des fonctions limites $\overline{K}_n(t)$ et le fait qu'elles sont à variation bornée est assuré par la condition* (2.3).

*Ces hypothèses étant supposées remplies, la série de Fourier de toute fonction continue est uniformément sommable — $\Lambda$ vers la somme généralisée $f(x)$.*

D é m o n s t r a t i o n du théorème 1. Remarquons que dans le cas des procédés de sommation à matrice rectangulaire, il faut en premier lieu que toutes les séries (1.3) soient convergentes. En d'autres termes, il faut que pour tout $n$ fixe les suites $\lambda_{\nu,n}$ constituent des suites de facteurs de convergence des séries de Fourier des fonctions continues. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce fait ait lieu sont données par le théorème B. En d'autres termes, pour que les suites $\lambda_{\nu,n}$ constituent, pour tout $n$ fixe, une suite de facteurs de convergence des séries de Fourier de toute fonction continue, il faut et il suffit, d'après la condition (1.9) du théorème B que la condition (1.3) du théorème 1 soit satisfaite. Dans ce cas la relation (2.4) aura lieu, ce qui entraîne la formule de Parseval

$$A_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, d\overline{K}_n(t) = \\ = \frac{1}{2} \lambda_{0,n} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu,n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x). \tag{2.6}$$

Ainsi, cette dernière série s'exprime par la fonctionnelle linéaire

$$A_n\{\Psi_x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi_x(t)\, d\overline{K}_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.7}$$

où

$$\Psi_x(t) = f(x+t) + f(x-t). \tag{2.8}$$

Ceci établi, il nous reste en second lieu à montrer que les conditions (2.1) et (2.5) sont nécessaires et suffisantes pour que cette suite de fonctionnelles linéaires converge vers $f(x)$ lorsque $n \to \infty$. Nous obtiendrons ces conditions par une seconde application du théorème A.

En effet, la norme de la fonctionnelle linéaire $A_n\{\Psi_x\}$ étant donée par

$$\|A_n\| = \int_0^{\pi} |d\overline{K}_n(t)|,$$

la condition (1.6), c'est-à-dire le fait que cette suite soit bornée, se réduit à la condition (2.5) du théorème 1.

En prenant ensuite pour base de l'espace $C$ la suite $g_k(t) = \cos kt$, $k = 0, 1, 2, \dots$, on aura selon les formules (2.4) et (2.7)

$$A_n\{\cos kt\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kt\, d\overline{K}_n(t) = \frac{1}{2} \lambda_{k,n}. \tag{2.9}$$

Par suite, pour que la condition (1.7) soit satisfaite, il faut que les limites

$$\lambda_k \overset{def}{=} \lim_{n \to \infty} \lambda_{k,n} \tag{2.10}$$

existent pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$ Dans ce cas, la fonctionnelle limite sera donné par

$$A(\Psi_x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Psi_x(t)\, d\overline{K}(t), \tag{2.11}$$

où l'on a posé

$$\bar{K}(t) = \frac{1}{2}\lambda_0 t + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\nu} \sin \nu t. \tag{2.12}$$

Ainsi ces conditions, c'est-à-dire les conditions (2.3), (2.5) et (2.10) étant supposées remplies, la série de Fourier de la fonction $f(x)$ sera uniformément sommable-$\Lambda$ avec la somme généralisée, donnée par (2.11) et (2.12).

Or, pour que la somme généralisée $A(\Psi_x)$ soit égale à

$$f(x) = \frac{1}{2}\Psi_x(0)$$

il faut que

$$\bar{K}(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \pi/2, & 0 < t \leqslant \pi, \end{cases}$$

et cela aura lieu d'après (2.12) lorsque

$$\lambda_k = 1 \text{ pour chaque } k.$$

Or, ces dernières conditions, en tenant compte de (2.10) se réduisent aux conditions (2.1).

Enfin, le fait que la sommabilité $\Lambda$ a lieu uniformmément, résulte de la troisième partie du théorème A, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

**2.2.** Remarquons que dans le théorème 1 les deux conditions (2.3) et (2.5) peuvent se réunir en une seule à savoir

$$\int_0^\pi |K_{m,n}(t)|\, dt \leqslant M, \tag{2.13}$$

où $K_{m,n}(t)$ est donné par (2.2) et où $M$ est une constante indépendante de $m$ et $n$.

Toutefois, cette dernière condition n'est que suffisante pour le que procédé $\Lambda$ soit F-permanent. Il existe en effet des procédés de sommation $\Lambda$ qui sont F-permanent, c'est-à-dire satisfont aux conditions (2.1)—(2.5) du théorème 1 mais ne satisfont pas à la condition (2.13). Tel est par exemple le cas du procédé $\Lambda$ donné par

$$\lambda_{\nu,n} = \frac{\lg n}{\lg(\nu+n)}, \quad \left.\begin{matrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots, \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}\right\}. \tag{2.14}$$

Il est évident que ce procédé satisfait aux conditions (2.1). De même, il est facile à montrer que la condition (2.5) se trouve également remplie.

En effet, la suite (2.14) étant convexe par rapport à $v$ dès que $n > e^2$, d'après un théorème de Fejér [1], la série

$$K_n(t) = \lg n \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\cos v t}{\lg(n+v)}$$

converge et représente une fonction positive; en outre, d'après un théorème de Young ([13], [14], p. 109) c'est une série de Fourier, par suite

$$\int_0^{\pi} |K_n(t)|\, dt = \int_0^{\pi} K_n(t)\, dt = \lambda_{0,n} = 1.$$

Pour montrer enfin que la condition (2.3) est satisfaite, désignons par

$$D_n(t) \overset{def}{=} \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2}, \tag{2.15}$$

et

$$F_n(t) \overset{def}{=} \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin\,(n+1)\; t/2}{\sin\; t/2}\right)^2, \tag{2.16}$$

les noyaux de Dirichlet et de Fejér, et remarquons qu'une double sommation par partie donne

$$\begin{aligned} K_{m,n}(t) = \sum_{v=0}^{m-2} (v+1)\, \Delta^2 \lambda_{v,n} F_v(t) + m\, \Delta \lambda_{m-1,n} F_m(t) + \\ + \lambda_{m,n}\, D_{m-1}(t), \end{aligned} \tag{2.17}$$

et que (voir [14], p. 172)

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} |D_m(t)|\, dt \sim \frac{2}{\pi} \lg m, \quad (m \to \infty), \\ &\int_0^{\pi} F_m(t)\, dt = \frac{\pi}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ceci posé, on aura pour $n \geqslant e^2$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |K_{m,n}\;(t)|\, dt &\leqslant \sum_{v=0}^{m-2} (v+1)\, \Delta^2 \lambda_{v,n} + m\, \Delta \lambda_{m-1,n} + C \lambda_{m,n} \lg m = \\ &\leqslant \lambda_{0,n} - \lambda_{m-1,n} - (m-1)\, \Delta \lambda_{m-1,n} + m\, \Delta \lambda_{m-1,n} + C \lambda_{m,n} \lg m = \\ &\leqslant \lambda_{0,n} - \lambda_{m,n} + C \lambda_{m,n} \lg m = \\ &\leqslant 1 + C \lg n \frac{\lg\; m}{\lg\;(n+m)} \leqslant 1 + C \lg n = M_n. \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème 1 se trouvent remplies et le procédé donné par (2.14) est bien F-permanent. Pourtant, il ne satisfait pas à la condition (2.13) puisque

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_{m,n}(t)|\,dt \geqslant C'\lambda_{m,n}\lg m - \sum_{\nu=0}^{m-2}(\nu+1)\Delta^2\lambda_{\nu,n} - m\Delta\lambda_{m-1,n} =$$

$$\geqslant C'\lambda_{m,n}\lg m - \lambda_{0,n} + \lambda_{m,n} =$$

$$\geqslant C'\frac{\lg m \lg n}{\lg(m+n)} - 1,$$

de sorte que l'intégrale (2.13) ne peut être majorée par une constante indépendante de $m$ et de $n$.

**3.** Le théorème précédent a un intérêt plutôt théorique. En réalité, la difficulté d'en déduire la permanence F d'un procédé de sommation $\Lambda$ à matrice rectangulaire réside dans la vérification des conditions (2.3) et (2.5).

Pour cette raison, nous allons établir dans ce paragraphe un théorème qui ne donne que des conditions suffisantes, mais qui sont exprimées sous une forme plus explicite, portant directement sur les coefficients $\lambda_{\nu,n}$ même.

THÉORÈME 2. *Pour que le procédé de sommation $\Lambda$ à matrice rectangulaire soit F-permanent, il suffit que les conditions suivantes aient lieu:*

$$\lambda_{\nu,n} \to 1,\ n\to\infty,\ \textit{pour chaque } \nu, \tag{3.1}$$

$$\lambda_{\nu,n} = O(1/\lg \nu),\ (\nu\to\infty); \tag{3.2}$$

*qu'il existe un nombre $m$ fixe ou tendant vers l'infini avec $n$, tel que*

$$\sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq m}}^{\infty} \frac{m+\nu}{m}|m-\nu| \lg\frac{m+\nu}{|m-\nu|}|\Delta^2\lambda_{\nu,n}| \leqslant C_1 \tag{3.3}$$

*pour tout $n$, où $C_1$ est une constante indépendante de $n$ et où l'on a posé*

$$\Delta^2\lambda_{\nu,n} = \lambda_{\nu,n} - 2\lambda_{\nu+1,n} + \lambda_{\nu+2,n}. \tag{3.4}$$

Remarquons que lorsque dans la condition (3.3), $m$ reste fini, en particulier lorsque $m = 1$, cette condition se réduit *à la quasi-convexité de* *la suite $\lambda_{\nu,n}$ par rapport à $\nu$, et uniforme par rapport à $n$, c'est-à-dire au fait que*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1) \, | \Delta^2 \lambda_{\nu,n} | \leqslant C_2, \tag{3.5}$$

*où $C_2$ est une constante indépendante de $n$.*

Toutefois, cette dernière condition étant supposée remplie, on aura

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta \lambda_{\nu,n}| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1) \, | \Delta^2 \lambda_{\nu,n} | .$$

Par suite elle entraîne la condition (1.2), qui signifie que tout procédé de sommation $\Lambda$ à matrice rectangulaire qui satisfait en outre à la condition (3.1) est nécessairement permanent au sens ordinaire.

Démonstration. En s'appuyant sur le théorème 1, il s'agit de montrer que les conditions (2.1), (2.3) et (2.5) seront satisfaites toutes les fois que les conditions (3.1), (3.2) et (3.3) le sont. A cet effet, les conditions (3.1) et (2.1) étant identiques, il s'agit de montrer que

a) (3.2) et (3.3) $\to$ (2.3)

et que

b) (3.1) pour $\nu = 0$, (3.2) et (3.3) $\to$ (2.5).

Pour démontrer l'affirmation sous a), remarquons d'abord que la convergence de la série (3.3) entraîne la quasi-convexité de la suite $\lambda_{\nu,n}$ par rapport à $\nu$, c'est-à-dire

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1) \, | \Delta^2 \lambda_{\nu,n} | \leqslant C_n, \tag{3.6}$$

pour tout $n$.

En effet, pour $m \geqslant 1$ et $\nu > 3m$, c'est-à-dire pour $\dfrac{m}{\nu - m} < \dfrac{1}{2}$, on aura

$$\frac{m+\nu}{m} (\nu - m) \lg \frac{m+\nu}{\nu - m} = (m+\nu) \frac{\lg\left(1 + 2\dfrac{m}{\nu - m}\right)}{\dfrac{m}{\nu - m}} > \nu + 1,$$

puisque $\lg(1 + 2x) > x$ pour $0 < x < 1/2$.

Ainsi, la suite $\lambda_{\nu, n}$ étant quasi-convexe, d'après un théorème du second des deux auteurs [12], la condition (3.2) est nécessaire et suffisante pour que (2.3) ait lieu, ce qui démontre l'assertion a).

Pour démontrer l'affirmation sous b), remarquons en premier lieu que la condition (3.6) avec

$$\lambda_{\nu, n} = o(1) \quad (\nu \to \infty)$$

impliquent la convergence uniforme de la série

$$K_n(t) \overset{def}{=\!=} \frac{1}{2} \lambda_{0, n} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu, n} \cos \nu t$$

dans $(\varepsilon, \pi)$, l'intégrabilité de $K_n(t)$ dans $(0, \pi)$ ainsi que l'égalité

$$K_n(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + 1) \, (\Delta^2 \lambda_{\nu, n}) \, F_\nu(t), \tag{3.7}$$

où $F_\nu(t)$ représentent les noyaux de Fejér donnés par (2.16), (voir [14], p. 109, ainsi que [4], lemme 1, p. 108—112).

Par suite

$$\int_0^\pi | d\overline{K}_n(t) | = \int_0^\pi | K_n(t) | \, dt, \tag{3.8}$$

et il s'agit de montrer que

$$\int_0^\pi | K_n(t) | \, dt = O(1),$$

où $K_n(t)$ est donné par (3.7); à cet effet démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME. *L'inégalité*

$$\varphi(\xi) \overset{def}{=\!=} \int_0^\infty \left| \sin^2 t - \frac{\sin^2 \xi t}{\xi} \right| \frac{dt}{t^2} \leqslant$$

$$\leqslant 3 \, \frac{\xi + 1}{\xi} \, | \xi - 1 | \lg \frac{\xi + 1}{|\xi - 1|} \overset{def}{=\!=} \Phi(\xi) \tag{3.9}$$

*a lieu pour tout* $\xi > 0$.

Du fait que

$$\varphi(\xi) = \varphi(1/\xi) \quad \text{et} \quad \Phi(\xi) = \Phi(1/\xi),$$

il suffit de démontrer l'inégalité (3.12) pour $0 < \xi < 1$. De

$$\sin^2 t - \sin^2 \xi t = \sin(1-\xi)t \quad \sin(1+\xi)t,$$

et

$$\frac{\sin xt}{t} \leqslant \frac{2x}{1+t}$$

il résulte

$$\varphi(\xi) = \int_0^\infty \left| \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \sin^2 \xi t + \sin(1-\xi)t \sin(1+\xi)t \right| \frac{dt}{t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1-\xi}{\xi} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \xi t}{t^2} dt + 4(1-\xi)(1+\xi) \int_0^\infty \frac{dt}{\{1+(1-\xi t\} \{1+(1+\xi)t\}}.$$

En tenant compte de

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+at)(1+bt)} = \frac{1}{a-b} \lg \frac{a}{b},$$

on a donc

$$\varphi(\xi) \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\xi\right) + 2\,\frac{1+\xi}{\xi}\left(1-\xi\right) \lg \frac{1+\xi}{1-\xi} \leqslant$$

$$\leqslant 3\,\frac{1+\xi}{\xi}\left(1-\xi\right) \lg \frac{1+\xi}{1-\xi},$$

puisque

$$\frac{1+\xi}{\xi} \lg \frac{1+\xi}{1-\xi} > 2 > \frac{\pi}{2}, \text{ pour } 0 > \xi > 1,$$

ce qui démontre le lemme.

Soit à présent $m$ un nombre entier, mais arbitraire. En posant

$$R_{m,n}(t) = K_n(t) - \lambda_{0,n} F_m(t) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, \Delta^2 \lambda_{\nu,n} F(t) - \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, \Delta^2 \lambda_{\nu,n} F_m(t) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \{F_\nu(t) - F_m(t)\}\ (\nu+1)\ \Delta^2 \lambda_{\nu,n},$$

on en déduit, d'une part, que

$$\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt \leqslant \int_0^\pi |R_{m,n}(t)|\,dt + \int_0^\pi |\lambda_{0,n}|\,F_m(t)\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\,|\lambda_{0,n}| + \int_0^\pi |R_{m,n}(t)|\,dt, \tag{3.10}$$

et d'autre part, que

$$\int_0^\pi |R_{m,n}(t)\,dt| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{\nu,m}\,|\Delta^2\lambda_{\nu,n}|, \tag{3.11}$$

où

$$S_{\nu,m} \stackrel{def}{=} \int_0^\pi |F_\nu(t) - F_m(t)|\,(\nu+1)\,dt.$$

Or,

$$S_{\nu,m} = \frac{\pi^2}{2}\int_0^\pi \left|\sin^2(\nu+1)\frac{t}{2} - \frac{\nu+1}{m+1}\sin^2(m+1)\frac{t}{2}\right| \frac{dt}{\sin^2 t/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi^2}{2}\int_0^\pi \left|\sin^2(\nu+1)\frac{t}{2} - \frac{\nu+1}{m+1}\sin^2(m+1)\frac{t}{2}\right| \frac{dt}{t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \pi^2(\nu+1)\int_0^{(\nu+1)\pi/2} \left|\sin^2 t - \frac{\nu+1}{m+1}\sin^2\left(\frac{m+1}{\nu+1}t\right)\right| \frac{dt}{t^2} \leqslant$$

$$\leqslant \pi^2(\nu+1)\int_0^\infty \left|\sin^2 t - \frac{\sin^2 \xi t}{\xi}\right| \frac{dt}{t^2}, \quad \text{avec } \xi = \frac{m+1}{\nu+1}$$

et cette expression est d'après le lemme précédent, c'est-à-dire d'après l'inégalité (3.9), plus petite que

$$\pi^2(\nu+1)\,\Phi(\xi) = C_8\,\frac{m+\nu+2}{m+1}\,|m-\nu|\,\lg\frac{m+\nu+2}{|m-\nu|}.$$

Il s'ensuit que

$$S_{\nu,m} < C_8\,\frac{m+\nu+2}{m+1}\,|m-\nu|\,\lg\frac{m+\nu+2}{|m-\nu|},$$

et lorsqu'on remplace ce résultat dans (3.11), on obtient, en tenant compte de (3.10) et (3.8), finalement que

$$\int_0^\pi |d\overline{K}_n(t)| \leqslant \frac{\pi}{2} |\lambda_{0,n}| +$$

$$+ C_8 \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq m}}^{\infty} \frac{m+\nu+2}{m+1} |m-\nu| \lg \frac{m+\nu+2}{|m-\nu|} |\Delta^2 \lambda_{\nu,n}|,$$

qui équivaut à (2.5) lorsque (3.3) et (3.1) avec $\nu = 0$ sont supposés remplis.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] Fejér L. — Einige Sätze die sich auf das Verhalten einer ganzen rationalen Funktion beziehen, ..., *Monatshefte für Math. u. Phys.* XXXV, Bd. **2**, Heft **3** (1928), 305—344.

[2] Hardy, G. H. and Rogosinski. W. W. — Fourier series. Cambridge, 1950.

[3] Karamata J. — Suite de fonctionnelles linéaires et facteurs de convergence des séries de Fourier. *Journal de Math. Pures et Appliqués.* (1956) (sous presse).

[4] J. Karamata et Tomić, M. — Sur la sommation des séries de Fourier. *Glas. de l'Acad. serbe des Sc. Cl. des Sc. math. et nat.* T. **CCVI** (1953), 86—126 (en serbe).

[5] Moore, C. N. — On the application of Borel's method to the sommation of Fourier series. *Proc. Nat. Ac. Sc.*, **11** (1925), 284—287.

[6] Nagy, Sz. B. — Méthodes de sommation des séries de Fourier I, *Acta Sci. Math.* Szeged, **XII**, pars B. (1950), 204—210.

[7] Nikolsky, S. M. — Sur des méthodes linéaires de sommation des séries de Fourier, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR.* série math., **12** (1948), 259—278 (en russe).

[8] Riesz, F. et Nagy, Sz. B. — Leçons d'Analyse fonctionnelle, Budapest, 1952.

[9] Salem, R. — Une généralisation du procédé de sommation de Poisson. — *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris* **205** (1937), 14 et 311.

[10] ——————— Essai sur les séries trigonométriques. *Actualités scientifiques*, № 862 Hermann et Cie, Paris, 1940.

[11] Szász, O. — Introduction of divergent series, Cincinnati, 1940.

[12] Tomić, M. — Sur les facteurs de convergence des séries de Fourier des fonctions continues. *Publ. Inst. Math. de l'Ac. serbe des Sc.* **8** (1955) p. 23.

[13] Young, W. H. — On the Fourier series of bounded functions. *Proc. London Math. Soc.* **12** (1913), 41—70.

[14] Zygmund, A. — Trigonometrical series, Warszawa-Lwów, 1935.