ENTWICKLUNG ANALYTISCHER FUNKTIONEN AUF RIEMANNSCHEN FLÄCHEN NACH ALGEBRAISCHEN ODER GEWISSEN ENDLICH VIELDEUTIGEN TRANSZENDENTEN FUNKTIONEN

von

M. RADOJČIĆ (Beograd)

ZUSAMMENFASSUNG — Es, wird die Entwicklung gegebener analytischer Funktionen auf beliebigen Riemannschen Flächen nach algebraischen Funktionen betrachtet und sodann die Erweiterung der Entwicklungssätze von Mittag-Leffler und Weierstrass auf Riemannsche Flächen, so dass die rationalen Funktionen von Mittag-Leffler durch algebraische und die Faktoren von Weierstrass durch gewisse, auf geschlossenen Riemannschen Flächen transzendente Funktionen ersetzt werden. Nach kurzer Wiedergabe seiner früheren Resultate ergänzt der Verfasser dieselben, insbesondere durch eine entsprechende Übertragung der Entwicklungssätze von Mittag-Leffler und Weierstrass auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen, welche Überlagerungsfolgen von geschlossenen Riemannschen Flächen, die sie grenzweise enthalten, zulassen.

1. *PROBLEMSTELLUNG.* — Auf zwei Wegen kann man die allgemeinen Entwicklungssätze für eindeutige analytische Funktionen, an erster Stelle die von Runge, Mittag-Leffler und Weierstrass, auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen zu übertragen suchen. Welcher Weg eingeschlagen wird hängt davon ab, welche Eigenschaften man bei den approximierenden Funktionen aufrecht zu erhalten wünscht. In den Sätzen von Mittag-Leffler und Runge hat man es nähmlich mit rationalen Funktionen zu tun, die also, einerseits, in der ganzen Ebene existieren, während die Entwicklung nur in einem Teile der Ebene gelten mag, und die, anderseits, zur allgemeinen Klasse der algebraischen Funktionen gehören. Dementsprechend kann man bei der Übertragung dieser Sätze auf Riemannsche Flächen wünschen, entweder dass auch jetzt die approximierenden Funktionen auf einer im Allgemeinen umfassenderen, die gegebene Fläche enthaltenden Riemanchen Fläche definiert seien, oder aber dass die approximierenden Funktionen, statt rational zu sein, mehrdeutige algebraische Funktionen seien.

Auf dem ersten Wege erhält man die bekannte Übertragung von H. Behnke und K. Stein, der Sätze von Runge auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen ([2], Satz 6, erster Approximationssatz genannt). Auch die Sätze von Mittag-Leffler und Weierstrass sind auf diesem Wege durch H. Florack [3] erweitert worden, indem für irgendeine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche R 1) eine analytische Funktion, die eindeutig und meromorph auf R ist und Pole in vorgeschriebenen Punkten mit gegebenen Hauptteilen besitzt und 2) eine analytische Funktion, die eindeutig und regulär auf R ist und Nullstellen gegebener Ordnung in vorgeschriebenen Punkten besitzt, konstruiert wurden.

Was den zweiten Weg anbelangt, so besagt schon die wohlbekannte elementare Formel

$$\log z = \lim_{n\to\infty} n\,(z^{1/n} - 1), \tag{1}$$

die auf der ganzen logarithmischen Fläche gilt, dass auch auf unendlich vielblättrigen Riemannschen Flächen durch algebraische Funktionen approximiert werden kann. Auch in dieser Richtung erhält man Verallgemeinerungen der für eindeutige Funktionen gültigen Entwicklungssätze (M. Radojčić, [6] bis [9]). Dabei treten an Stelle der rationalen Funktionen algebraische auf und an Stelle der Weierstrassschen Faktoren gewisse, auf geschlossenen Riemannschen Flächen eindeutige transzendente Funktionen. Da es sich zum Teil um Resultate handelt, die vor Jahren, in serbischer Sprache erschienen sind und wenig bekannt wurden, sei uns erlaubt dieselben, samt den nötigen Begriffsbestimmungen im Laufe der gegenwärtigen Betrachtungen kurz wiederzugeben.[1])

2. *DARSTELLUNG VON IN GEWISSEN GEBIETEN DER LOGARITHMISCHEN RIEMANNSCHEN FLÄCHE EINDEUTIGEN UND REGULÄREN FUNKTIONEN DURCH FOLGEN ALGEBRAISCHER FUNKTIONEN.* — Sehr einfache Betrachtungen führen zunächst zu einer Verallgemeinerung der Formel (1). Sei D ein (nicht kompaktes) offenes Gebiet einer logarithmischen Fläche, begrenzt durch zwei Linien C und C', die im einen und anderen Umlaufssinn unendlich vielmal den Windungspunkt $z=0$ umgeben. Sei ferner $f(z)$ eine Funktion, die eindeutig und regulär in $D \cup C \cup C'$ ist. Wir bilden D durch die Funktion

$$\zeta = \frac{\log z + 1}{\log z - 1} \tag{2}$$

[1] Hauptsächlich in §§ 2, 4.

schlicht ab und es sei Δ das entsprechende Gebiet der ζ-Ebene, das durch zwei entsprechende Linien Γ und Γ', die durch den Punkt $\zeta = 1$ gehen, begrenzt ist. Wir setzen noch voraus, dass jeder zusammenhängende und kompakte Teil von Γ und Γ' rektifizierbar und dass $f(z) \cdot \log z$ in G beschränkt ist. Dann bleibt $f[z(\zeta)]/(\zeta - 1)$ endlich in $\Delta \cup \Gamma \cup \Gamma'$ und wir haben auf Grunde des Cauchyschen Integrals, mittels konformer Abbildung durch (2) die Integraldarstellung in G:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(t)}{\log t/z} \cdot \frac{dt}{t} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'} \frac{f(t)}{\log t/z} \cdot \frac{dt}{t}$$

und hieraus durch Anwendung von (1) und Vertauschung der Grenzprozesse

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n\pi i} \left[\int\limits_C \frac{f(t)}{(t/z)^{1/n} - 1} \cdot \frac{dt}{t} - \int\limits_{C'} \frac{f(t)}{(t/z)^{1/n} - 1} \cdot \frac{dt}{t} \right],$$

woraus durch Anwendung der geometrischen Reihe und nochmaliges Vertauschen der Grenzen

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n\pi i} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu/n} \int\limits_C \frac{f(t)\, dt}{t^{\nu/n + 1}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{-\nu/n} \int\limits_{C'} \frac{f(t)\, dt}{t^{-\nu/n + 1}} \right]$$

folgt. Also, wenn mit m_n und M_n geeignete ganze Zahlen bezeichnet werden und

$$\varkappa\left(\frac{\nu}{n}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^*} \frac{f(t)\, dt}{t^{\nu/n + 1}}, \qquad \begin{array}{l} \nu = m_n,\ m_n + 1, \ldots, M_n, \\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{array}$$

gesetzt wird, wobei C^* in D verläuft, so hat man

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu = m_n}^{M_n} \varkappa\left(\frac{\nu}{n}\right) z^{\nu/n}. \tag{3}$$

Die Folge algebraischer Funktionen in (3) konvergiert für $\rho' < |z| < \rho$, wobei

$$\rho' = \limsup_{\lambda \to -\infty} |\varkappa(\lambda)|^{-1/\lambda} \quad \text{und} \quad \rho = \liminf_{\lambda \to \infty} |\varkappa(\lambda)|^{-1/\lambda}$$

ist. Die Konvergenz ist in jedem Gebiete, das ganz im Inneren des letztgenannten liegt, gleichmässig ([6], S. 13 bis 23).

3. *DAS GRENZWEISE ENTHALTEN.* — Zur allgemeinen Betrachtung übergehend, bedienen wir uns einer einfachen Bezeichnungsweise von Koebe,

um die Punkte einer Riemannschen Fläche von den entsprechenden Punkten der komplexen Ebene zu unterscheiden: $\tilde{z}$ bedeute irgendeinen Punkt der Riemannschen Fläche, dessen Spurpunkt in der Zahlenebene z ist.

Da zu den algebraischen Funktionen geschlossene Riemmansche Flächen gehören und wir analytische Funktionen in beliebigen Gebieten (geschlossener sowie nichtgeschlossener) Riemmannscher Flächen durch algebraische Funktionen zu approximieren suchen, müssen sich im Allgemeinen in der approximierenden Funktionenfolge die Flächen allmählich komplizieren, um sich gleichsam der gegebenen Fläche immer mehr anzunäheren. Das traf schon in der vorangehenden Betrachtung zu, da die Flächen der Funktionen $z^{1/n}$ mit wachsendem n die logarithmische Fläche sozusagen immer vollständiger enthalten. Also ist uns der folgende Begriff des „grenzweisen Enthaltens" nötig (M. Radojčić, [6]; auch [8], S. 3):

ERKLÄRUNG 1. — Ist R irgendeine Riemannsche Fläche und $\{A_n\}$ eine unendliche Folge geschlossener Riemannscher Flächen derart, dass jedes ganz in R enthaltene Gebiet auch in allen Flächen A_n, für die n genügend gross, enthalten ist, so werden wir sagen, dass die Riemannschen Flächen A_n (oder deren Folge) die Riemannsche Fläche R grenzweise enthalten[2]).

Kann insbesondere R als Gebiet einer geschlossenen Riemannschen Fläche A angesehen werden, so darf man $A_n = A$ setzen und das grenzweise Enthalten geht in das gewöhnliche Enthalten über.

Wir heben den folgenden Satz hervor:

Für jede Riemannsche Fläche gibt es Folgen von geschlossenen Riemannschen Flächen, die die gegebene Fläche grenzweise enthalten.

Beweis: Es genügt, offenbar, den Fall einer nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche R zu betrachten. Für jede Fläche R besteht eine unendliche Folge $\{G_n\}$ von Gebieten, die R (von Innen) ausschöpfen. Nach dem „Einbettungssatze" von Behnke und Stein ([2], S. 435) besteht für jedes ganz im Inneren der Fläche R enthaltenes Gebiet eine geschlossene Riemannsche Fläche, die das Gebiet enthält und dabei wenigstens ein Gebiet von R frei lässt. Ist also A_n eine geschlossene Riemannsche Fläche,

---

[2] Wir fassen den Begriff der Riemannschen Fläche, wie üblich, so auf, dass auch jedes offene Gebiet einer solchen als Riemannsche Fläche angesehen werden kann. Demgemäss unterscheiden wir erweiterbare und unerweiterbare Riemannsche Flächen. (Die Fläche R ist erweiterbar, falls eine andere, R_0 besteht, so dass $R \subset R_0$ ist.)

die G_n enthält, so ist, offenbar, jedes ganz in R enthaltenes Gebiet für n genügend gross in jeder Fläche A_n enthalten, d. h. die Folge $\{A_n\}$ enthält R grenzweise.

Im grenzweisen Enthalten findet eine Art gegenseitiger Zuordnung Riemannscher Flächen statt. Seien, allgemein betrachtet, R_1, R_2 zwei Flächen und G_1, G_2 zwei Gebiete derselben, $G_1 \subseteq R_1$ und $G_2 \subseteq R_2$; wir betrachten eine ein-eindeutige, punktweise und gebietstreue Abbildung der Gebiete G_1 und G_2 aufeinander. Sind nun R_1 und R_2 zwei Riemannsche Flächen, die über derselben Zahlenebene liegen, welche mit E bezeichnet werde, so soll diese Abbildung diejenige sein, in der die einander entsprechenden Punkte denselben Spurpunkt haben. Dann ist die Abbildung von G_1 auf G_2, da sie ein-eindeutig ist, eine (im Sinne der Riemannschen Flächen gemeinte) Kongruenz, und man kann insbesondere auch $G_1 \equiv G_2$ setzen. Jedem Wege in E, der von einem Punkte p ausgeht und die darüber gelegenen Windungspunkte von R_1 und R_2 meidet, entspricht dabei je ein bestimmter Weg auf R_1 und R_2, der aus einen Punkte $\tilde{p}_1$ in G_1, bzw. $\tilde{p}_2$ in G_2 ausgeht und zu einem Punkte $\tilde{q}_1$ auf R_1, bzw. $\tilde{q}_2$ auf R_2 gelangt. Die Zuordnung zwischen $\tilde{q}_1$ und $\tilde{q}_2$ ist aber nur solange ein-eindeutig, als $\tilde{q}_1$ in G_1 (und $\tilde{q}_2$ in G_2) enthalten ist. Ausserhalb G_1 (und G_2) werden aber im Allgemeinen einem Punkte $\tilde{q}_1$ von R_1 mehrere übereinander liegende Punkte $\tilde{q}_2$ von R_2 entsprechen, und umgekehrt.

Bei einer Folge von Flächen $\{A_n\}$, die eine Riemannsche Fläche R grenzweise enthalten, besteht nun eine solche, nur teilweise ein-eindeutige Zuordnung zwischen R und jeder einzelnen Fläche A_n. In jedem Gebiete G_n, das zugleich in A_n und in R enthalten ist, ist diese Zuordnung ein-eindeutig und kann auch als eine Identität angesehen werden. Dabei werden Gebiete G_n gewählt, die R ausschöpfen.

Der Begriff des grenzweisen Enthaltens kann auch allgemeiner gefasst werden, so dass auch die simultane Konvergenz algebraischer Funktionen gegen mehrere vieldeutige analytische Funktionen in Betracht genommen werden. Dazu dient der folgende Begriff ([8], S. 21):

ERKLÄRUNG 2. — Seien m (bzw. abzählbar unendlich viele) nichtgeschlossene Riemannsche Flächen über der Zahlenebene ausgebreitet, die untereinander punktfremd sind: $R^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$ (bzw. $\mu = 1, 2, \ldots$). Sei $G^{(\mu)}$ irgendein Gebiet, ganz in $R^{(\mu)}$ enthalten. Ist dann $\{A_n\}$ eine unendliche Folge geschlossener Riemannscher Flächen, derart dass die Gebiete $G^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$ (bzw. $\mu = 1, 2, \ldots, m_n$; $m_n \to \infty$) auch in allen Flächen A_n, wenn nur n genügend gross ist, enthalten sind, so werden wir sagen dass die Riemannschen Flächen A_n die Riemannschen Flächen $R^{(\mu)}$ insgesamt grenzweise enthalten.

4. *ENTWICKLUNG VIELDEUTIGER ANALYTISCHER FUNKTIONEN NACH ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN (VERALLGEMEINERUNG DES RUNGESCHEN SATZES).* — Es besteht der folgende, den Rungeschen umfassende Satz (M. Radojčić, [6], sowie [8], S. 11):

SATZ I. — *Sei $f(z)$ irgendeine analytische Funktion, R ihre Riemannsche Fläche, G ein offenes Gebiet von R, worin $f(z)$ regulär ist. Sei G' ein Gebiet von R, das G enthält ($G \subseteq G'$).*

Wie auch immer eine Folge von geschlossenen Riemannschen Flächen A_n, $n = 1, 2, \ldots$, die G' grenzweise enthalten, gegeben sei, es besteht eine Folge algebraischer Funktionen $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, deren Flächen A_n sind und die im Inneren von G gleichmässig gegen die Funktion $f(z)$ konvergieren.

Der Beweis ist dem von Runge ähnlich und beruht auf der Übertragung der Cauchyschen Integralformel auf Riemannsche Flächen[8]). Sei $\{G_n\}$ eine Folge ganz in G enthaltener, G ausschöpfender Gebiete, so dass $G_n \subset A_n$ ist. Der Rand von G_n sei C_n. Er sei aus endlich vielen rektifizierbaren Kurven gebildet. Durch Anwendung der erweiterten Cauchyschen Integralformel erhält man

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} f(t) \cdot \alpha_n(t, z)\, dt, \quad \bar{z} \in G_n, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

wo α_n eine Elementarfunktion der Fläche A_n ist, die im Punkte $\bar{z}$ von G_n einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum 1 besitzt und nur noch ausserhalb von G und dessen Rand Pole besitzen mag. Gibt es Punkte von G_n, wo $z = \infty$, so sei jeder solche Punkt eine Nullstelle zweiter Ordnung der Funktion α_n.

Durch Umwandlung der Integrale (4) in Summen erhalten wir hieraus eine im Inneren von G gleichmässig gegen $f(z)$ konvergierende Folge algebraischer Funktionen $f_n(z)$.

---

[8] Sie befindet sich bei M. Radojčić [6] und [8], S. 8 bis 10. Kurze Zeit nach diesen Aufsätzen erschien das Buch „Elliptische Funktionen" [5] von R. König und M. Krafft, worin die Idee der Erweiterung des Cauchyschen Integrals in ihrer Allgemeinheit ausgesprochen war, aber die Autoren enthielten sich darin von der Begründung derselben, da dies nicht in den Rahmen des Buches fiel. Im Aufsatz [4] derselben Autoren befindet sich schon eine Erweiterung des Causchyschen Integrals, jedoch auf den Fall einfach zusammenhängender Gebiete beschränkt. H. Behnke und K. Stein gaben einen unabhängigen Beweis in [2], S. 436 bis 439.

Die gegebene Riemannsche Fläche R kann auch eine geschlossene sein, nur darf dann nicht $G \equiv R$ gesetzt werden.

Da jede Funktion $f_n(z)$ Pole auf C_n aufweist, die um so häufiger sind, als n grösser ist, verlegen wir sie in Punkte, die, falls möglich, ausserhalb von G und dessen Rand fallen (Rungesche Polverlagerung). Dabei ist uns der folgende Hilfssatz nötig, dessen Beweis dem entsprechenden von Runge nachgebildet wurde[4]):

HILFSSATZ. — *Sei G ein offenes (und echtes) Teilgebiet einer geschlossenen Riemannschen Fläche A, das von endlich hohem Zusammenhang ist. Sei ferner $\{\tilde{c}_k\}$, $k = 1, 2, \dots, q$, eine Punktmenge von A, derart dass auf jedem Kontinuum der Komplementärmenge $A - G$ genau ein Punkt $\tilde{c}_k$ liegt. Dann lässt sich jede algebraische Funktion, die eindeutig und regulär in G ist, durch algebraische Funktionen der Fläche A im Inneren von H gleichmässig approximieren, die eindeutig und regulär in G sind und ausser der Punkte $\tilde{c}_k$, $k = 1, 2, \dots, q$, keine weiteren Pole besitzen.*

Nun beweist man leicht den folgenden Satz ([8], S. 18):

SATZ II. — *Sei $f(z)$ irgendeine analytische Funktion, R ihre Riemannsche Fläche, G ein offenes Gebiet von R, worin $f(z)$ regulär ist, und sei G' ein Gebiet von R (oder sogar von einer anderen Riemannschen Fläche) welches G enthält.*

Seien ausserdem G_n, $n = 1, 2, \dots$, Gebiete von G, die G ausschöpfen und A_n, $n = 1, 2, \dots$, geschlossene Riemannsche Flächen, die G' grenzweise enthalten, so dass G_n auch als Gebiet von A_n angesehen werden kann.

Dann besteht eine Folge algebraischer Funktionen $\varphi_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, deren Flächen der Reihe nach A_n sind, die im Inneren von G gleichmässig gegen $f(z)$ konvergieren und so beschaffen sind, dass für ein jedes n die Funktion $\varphi_n(z)$ als einzige Pole vorausgegebene Punkte ausserhalb von G_n (auf A_n) besitzt, und zwar (zum Beispiel) in jedem Komplementär-Kontinuum von G_n höchstens einen Pol.

Vereinfachungen des Satzes II entstehen z. B. wenn $G \equiv G'$ oder $G' \equiv R$ gesetzt wird. Man kann auch voraussetzen, dass G dass ganze Existenzgebiet von $f(z)$ ist, oder auch dass R eine geschlossene Riemannsche Fläche ist; dann kann $A_n \equiv R$ gewählt werden ([8], Satz V', S. 19). Ist insbe-

---

[4] M. Radojčić, [8], S. 15. Bei Behnke und Stein, [2], findet man den nahe verwandten, allgemeineren Satz 5, S. 439.

sondere R die schlichte Ebene, so wird der Satz II zum Satz von Runge. Nimmt man an, dass G den Punkt $z=\infty$ nicht enthält und einfach zusammenhängend ist, so kann mann für φ_n sogenannte ganze algebraische Funktionen wählen ([8], Satz VII). Ist dann R die schlichte Ebene, so erhält man den Satz von Weierstrass über die Entwicklung nach Polynomen.

Alle Sätze können ausserdem, wie leicht einzusehen, für die simultane Konvergenz in nichtzusammenhängenden Bereichen, auf endlich oder abzählbar unendlich vielen nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen $R^{(\mu)}$ gegen irgendwelche monogene analytische Funktionen $F_\mu(z)$, $\mu=1,2,\ldots,m$ (bzw. $\mu=1,2,\ldots$) erweitert werden. Im Beweise geht man von den Ausdrücken

$$\sum_\mu \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n^{(\mu)}} F_\mu(t)\cdot\alpha_n(t,z)\,dt,\quad n=1,2,\ldots,$$

aus, worin für jedes μ $C_n^{(\mu)}$, $n=1,2,\ldots,$ die Ränder von Gebieten sind, die $R^{(\mu)}$ ausschöpfen ([8], Satz VIII).

5. *ÜBER DEN FUNDAMENTALSATZ DER RIEMANNSCHEN THEORIE DER ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN.* — In den folgenden, sowie in den vorangehenden Betrachtungen kommt eine grundlegende Bedeutung dem Fundamentalsatz der Riemannschen Theorie der algebraischen Funktionen zu, demzufolge für jede geschlossene Riemannsche Fläche A eine ihr gehörende algebraische Funktion besteht, deren Pole gegebene Punkte von A sind und gegebene Ordnungszahlen besitzen, vorausgesetzt, dass die Gesamtordnung s dieser Pole grösser als das Geschlecht p von A ist. Aus dem Riemann-Rochschen Satze folgt dann, dass die allgemeinste derartige algebraische Funktion mehr als $s-p$ willkürliche Konstanten hat. Diese können so gewählt werden, dass man gewisse Nullstellen und Koeffizienten in den Hauptteilen der Pole vorschreibt. (Siehe etwa [1], § 173).

Seien $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, die vorgeschriebenen Nullstellen und $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,k$, die Unendlichkeitsstellen; sei r_μ die Ordnung der Nullstelle $\tilde{a}_\mu$, s_ν die der Unendlichkeitsstelle $\tilde{b}_\nu$ und σ_ν $(0\leqslant\sigma_\nu\leqslant s_\nu)$ die Anzahl der im Hauptteile von $\tilde{b}_\nu$ vorgeschriebenen Koeffizienten. Wir schreiben

$$r_1+r_2+\ldots+r_h=r,\qquad s_1+s_2+\ldots+s_k=s,$$
$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k=\sigma.$$

Da $r+\sigma$ Grössen vorgeschrieben sind und bei der Gesamtordnung s der Pole wenigstens $s-p+1$ willkürliche Konstanten zur Verfügung stehen, ist $r+\sigma \leqslant s-p+1$, d. h. $s-\sigma-r \geqslant p-1$. Wir sprechen das in der Form des folgenden Existenzsatzes aus:

SATZ 1. — *Sei A eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlech. p, seien $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, und $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,k$, Punkte derselben una seien r_μ, $\mu=1,2,\ldots,h$, und s_ν, σ_ν $(0 \leqslant \sigma_\nu \leqslant s_\nu)$, $\nu=1,2,\ldots,k$, natürliche Zahlen, so dass*

$$r_1+r_2+\ldots+r_h=r, \qquad s_1+s_2+\ldots+s_k=s,$$

$$\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_k=\sigma$$

und

$$s-\sigma-r \geqslant p-1 \tag{5}$$

ist. Dann besteht eine algebraische Funktion mit der Riemannschen Fläche A, die die Punkte $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,k$, als einzige Pole besitzt und zwar so, dass r_μ die Ordnung der Nullstelle $\tilde{a}_\mu$ und s_ν die des Poles $\tilde{b}_\nu$ ist und dass σ_ν Koeffizienten im Hauptteil des Poles b_ν vorgeschrieben sind.

Man kann auch $r=0$ setzen und keine Nullstellen vorschreiben.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer solchen algebraischen Funktion ist also die, dass der Unterschied zwischen der Anzahl $s-\sigma$ der nicht vorgeschriebenen Koeffizienten in den Hauptteilen der Pole und der Anzahl r der vorgeschriebenen Nullstellen nicht kleiner als $p-1$ ist.

Wird $k+1$ statt k gesetzt und angenommen, dass die ganzen Hauptteile in den Polen $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,k$, vorgeschrieben sind, so ist $s-\sigma = s_{k+1}$ und aus (5) folgt $s_{k+1} \geqslant p+r-1$.

Man kann also die Nullstellen $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, (oder gar keine) und alle Pole $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,k$, mit den Hauptteilen vorschreiben, *wenn in noch einem Punkte $\tilde{b}_{k+1}$ ein Pol genügend hoher Ordnung $s_{k+1} \geqslant p+r-1$ angenommen wird.*

6. *EIN SATZ ÜBER FUNKTIONEN MIT WESENTLICH SINGULÄREN STELLEN, DIE AUF GESCHLOSSENEN RIEMANNSCHEN FLÄCHEN EINDEUTIG SIND.* — Mit Hilfe des Satzes 1 beweisen wir den folgenden Satz:

SATZ 2. — *Sind $\tilde{a}_\lambda$, $\lambda=1,2,\ldots,h$, $\tilde{b}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,k$, $\tilde{c}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,l$, Punkte einer geschlossenen Riemannschen Fläche A, so besteht eine eindeutige analytische Funktion mit der Fläche A, die die Punkte $\tilde{a}_\lambda$ als einzige Nullstellen, mit vorgeschriebenen Ordnungszahlen, die Punkte $\tilde{b}_\mu$ als* *einzige Pole, mit vorgeschriebenen Ordnungszahlen, die Punkte $\tilde{c}_\nu$ als wesentlich singuläre Punkte besitzt und die ausser $\tilde{b}_\mu$ und $\tilde{c}_\nu$ überall auf R regulär ist. — Es können aber auch keine Nullstellen oder keine Pole vorkommen.*[5])

Beweis. — Sollte unter den Punkten a_λ, b_μ, c_ν der z-Ebene der unendlich ferne Punkt vorkommen, so sei $z = \delta$ irgendein endlicher, von allen a_λ, b_μ, c_ν verschiedener Wert und man betrachte, statt der z-Ebene, eine neue, durch $z' = 1/(z-\delta)$ definierte z'-Ebene und die über derselben verbreitete, der Riemannschen Fläche A entsprechende Fläche A'. Wir wollen aber die Bezeichnungen vereinfachen und statt z' und A' wieder z und A schreiben.

Sei also r_λ die Ordnung der Nullstelle $\tilde{a}_\lambda$ und s_μ die des Poles $\tilde{b}_\mu$. Wir konstruieren zunächst eine algebraische Funktion $\alpha(z)$, deren Riemannsche Fläche A ist und die die Punkte $\tilde{a}_\lambda$, $\tilde{b}_\mu$, $\tilde{c}_\nu$ und $z = \infty$ als Null- oder Unendlichkeitsstellen besitzt und zwar:

1) Ist $\tilde{a}_\lambda$ ein Windungspunkt von der Ordnung $\varkappa_\lambda - 1$, so sei er ein Pol von der Ordnung $\varkappa_\lambda$ und der erste Koeffizient im Hauptteile dieses Poles sei $r_\lambda/\varkappa_\lambda$, d. h. es sei in der Umgebung von $\tilde{a}_\lambda$

$$\alpha(z) = \frac{r_\lambda/\varkappa_\lambda}{z - a_\lambda} + \frac{A^{(\lambda)}_{\varkappa_\lambda - 1}}{(z-a_\lambda)^{\frac{\varkappa_\lambda - 1}{\varkappa_\lambda}}} + \ldots + \frac{A^{(\lambda)}_1}{(z-a_\lambda)^{\frac{1}{\varkappa_\lambda}}} + P\left[(z-a_\lambda)^{\frac{1}{\varkappa_\lambda}}\right],$$

wobei $P(t)$ eine in $t = 0$ reguläre Funktion ist. Ist $\tilde{a}_\lambda$ kein Windungspunkt, so setzen wir $\varkappa_\lambda = 1$, d. h. dann sei

$$\alpha(z) = \frac{r_\lambda}{z - a_\lambda} + P(z - a_\lambda).$$

2) Ist $\tilde{b}_\mu$ ein Windungspunkt von der Ordnung $\varkappa'_\mu - 1$, so sei er ein Pol von der Ordnung $\varkappa'_\mu$ und der erste Koeffizient im Hauptteile sei $- s_\mu/\varkappa'_\mu$, d. h. es sei

$$\alpha(z) = -\frac{s_\mu/\varkappa'_\mu}{z - b_\mu} + \frac{B^{(\mu)}_{\varkappa_\mu - 1}}{(z-b_\mu)^{\frac{\varkappa'_\mu - 1}{\varkappa'_\mu}}} + \ldots + \frac{B^{(\mu)}_1}{(z-b_\mu)^{\frac{1}{\varkappa'_\mu}}} + P\left[(z-b_\mu)^{\frac{1}{\varkappa'_\mu}}\right].$$

Ist $\tilde{b}_\mu$ kein Windungspunkt, so setzen wir $\varkappa'_\mu = 1$, d. h.

$$\alpha(z) = -\frac{s_\mu}{z - b_\mu} + P(z - b_\mu).$$

[5] In [9], Lemma 6, wurde der Fall, dass keine Pole vorkommen, betrachtet.

3) Ist $\bar{c}_\nu$ ein Windungspunkt von der Ordnung $\varkappa''_\nu - 1$, so sei er ein Pol, dessen Ordnung eine von $\varkappa''_\nu$ grössere Zahl ρ_ν ist und der $(\rho_\nu - \varkappa''_\nu)$-te Koeffizient im Hauptteile sei $u_\nu/\varkappa''_\nu$, wobei u_ν eine ganze Zahl ist. Es sei also in der Umgebung von $\bar{c}_\nu$

$$\alpha(z) = \frac{C^{(\nu)}_{\rho_\nu}}{(z-c_\nu)^{\frac{\rho_\nu}{\varkappa''_\nu}}} + \frac{C^{(\nu)}_{\rho_\nu - 1}}{(z-c_\nu)^{\frac{\rho_\nu - 1}{\varkappa''_\nu}}} + \ldots + \frac{u_\nu/\varkappa''_\nu}{z-c_\nu} + \ldots + \frac{C^{(\nu)}_1}{(z-c_\nu)^{\frac{1}{\varkappa''_\nu}}} +$$

$$+ P\left[(z-c_\nu)^{\frac{1}{\varkappa''_\nu}}\right],$$

$$\alpha(z) = \frac{C^{(\nu)}_{\rho_\nu}}{(z-c_\nu)^{\rho_\nu}} + \frac{C^{(\nu)}_{\rho_\nu - 1}}{(z-c_\nu)^{\rho_\nu - 1}} + \ldots + \frac{u_\nu}{z-c_\nu} + P(z-c_\nu).$$

4) In jedem Punkte $z = \infty$, der ein Windungspunkt von der Ordnung $\varkappa - 1$ ist, soll $\alpha(z)$ eine Nullstelle von der Ordnung $2\varkappa$ haben. Ist es kein Windungspunkt, so setze man $\varkappa = 1$, also soll es eine Nullstelle zweiter Ordnung sein. Ist A (und A') n-blättrig, so ist die Gesamtordnung aller dieser Nullstellen $2n$.

Die mit $A^{(\lambda)}$, $B^{(\mu)}$, $C^{(\nu)}$ bezeichneten Koeffizienten können beliebig gewählt werden.

Sollte die gesuchte Funktion auf A keine Nullstellen oder keine Pole haben, so lasse man die Bedingung 1 bzw. 2 aus und handle dementsprechend auch im Folgenden.

Die Gesamtordnung der Pole von $\alpha(z)$ ist

$$\sum_{\lambda=1}^{h} \varkappa_\lambda + \sum_{\mu=1}^{k} \varkappa'_\mu + \sum_{\nu=1}^{l} \rho_\nu$$

und die Anzahl der vorgeschriebenen (bzw. durch die Bedingung der Ganzzahligkeit eingeschränkten) Koeffizienten in den Hauptteilen der Pole ist $h + k + l$. Nach (5) soll

$$\sum_{\lambda=1}^{h} (\varkappa_\lambda - 1) + \sum_{\mu=1}^{k} (\varkappa'_\mu - 1) + \sum_{\nu=1}^{l} (\rho_\nu - 1) - 2n \geqslant p - 1 \tag{6}$$

sein. Die Zahlen $\varkappa_\lambda$, $\varkappa'_\mu$, n und p sind zwar mit der Riemannschen Fläche A gegeben, aber die Zahlen ρ_ν können immer gross genug gewählt werden, damit (6) gelte. Also existiert nach dem Satze 1 immer eine Funktion $\alpha(z)$ mit den genannten Eigenschaften.

Wir betrachten nun die Funktion

$$J(z) = \int_{z_0}^{z} \alpha(z)\, dz,$$

wo $\tilde{z}_0 \neq \tilde{a}_\lambda, \tilde{b}_\mu, \tilde{c}_\nu$ und der Integrationsweg nicht durch diese Punkte geht. Da $\alpha(z)$ für $z = \infty$ eine Null genügend hoher Ordnung hat, bleibt $J(z)$ für $\tilde{z} \neq \tilde{a}_\lambda, \tilde{b}_\mu, \tilde{c}_\nu$ endlich auch wenn $z = \infty$. Also ist $J(z)$ ausserhalb $\tilde{a}_\lambda, \tilde{b}_\mu, \tilde{c}_\nu$ regulär, aber nicht eindeutig auf A

Tatsächlich, in der Umgebung von $\tilde{a}_\lambda$ ist, mit $\varkappa_\lambda \geqslant 1$,

$$J(z) = \frac{r_\lambda}{\varkappa_\lambda} \log(z - a_\lambda) + Q\left[(z - a_\lambda)^{\frac{1}{\varkappa_\lambda}}\right],$$

wobei $Q(t)$ eine in $t = 0$ reguläre Funktion bezeichnet. In der Umgebung von $\tilde{b}_\mu$ ist, mit $\varkappa'_\mu \geqslant 1$,

$$J(z) = -\frac{s_\mu}{\varkappa'_\mu} \log(z - b_\mu) + Q\left[(z - b_\mu)^{\frac{1}{\varkappa'_\mu}}\right]$$

und in der Umgebung von $\tilde{c}_\nu$ hat man, mit $\varkappa''_\nu \geqslant 1$,

$$J(z) = -\frac{C^{(\nu)}_{\rho_\nu}}{\frac{\rho_\nu}{\varkappa''_\nu} - 1} \cdot \frac{1}{(z - c_\nu)^{\frac{\rho_\nu}{\varkappa''_\nu} - 1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{u_\nu}{\varkappa''_\nu} \log(z - c_\nu) + Q\left[(z - c_\nu)^{\frac{1}{\varkappa''_\nu}}\right].$$

Wir betrachten nun die Funktion $\varphi(z) = e^{J(z)}$. In der Umgebung von $\tilde{a}_\lambda$ ist

$$\varphi(z) = (z - a_\lambda)^{\frac{r_\lambda}{\varkappa_\lambda}} \cdot e^{Q},$$

also hat $\varphi(z)$ den Punkt $\tilde{a}_\lambda$ als Nullstelle von der Ordnung r_λ. In der Umgebung von $\tilde{b}_\mu$ ist

$$\varphi(z) = (z - b_\mu)^{-\frac{s_\mu}{\varkappa''_\lambda}} \cdot e^{Q},$$

also hat $\varphi(z)$ den Punkt $\tilde{b}_\mu$ als Pol von der Ordung s_μ. In der Umgebung von $\tilde{c}_\nu$ hat $\varphi(z)$ die Gestalt

$$\varphi(z) = e^{\frac{D_\nu}{(z-c_\nu)^{\beta_\nu}}} \ldots (z - c_\nu)^{\frac{u_\nu}{\varkappa''_\nu}} \cdot e^Q,$$

wobei $\beta_\nu = \frac{\rho_\nu}{\varkappa''_\nu} - 1 > 0$, also hat $\varphi(z)$ den Punkt $\tilde{c}_\nu$ als wesentliche Singularität; da u_ν eine ganze Zahl ist, ist $\varphi(z)$ in der Umgebung von $\tilde{c}_\nu$ eindeutig auf A. In allen übrigen Punkten ist $\varphi(z)$ regulär und von Null verschieden.

Als $J(z)$ in den Exponent erhoben wurde, verschwanden die logarithmischen Singularitäten, aber die zyklischnen Periodizitätsmodulen von $J(z)$ blieben und machen $\varphi(z)$ noch immer mehrdeutig auf A. Deshalb ziehen wir von $J(z)$ ein Abelsches Integral erster Gattung, $K(z)$, mit denselben Periodizitätsmodulen wie $J(z)$ ab. Dann ist

$$f(z) = e^{J(z) - K(z)}$$

eine auf A eindeutige Funktion mit den gesuchten Eigenschaften. Um im Falle, dass die Transformation $z' = 1/(z - \delta)$ vollzogen wurde, zur ursprünglichen Bezeichnung zurückzukehren, müssen wir noch z durch z' ersetzen, so dass erst $f\left(\frac{1}{z-\delta}\right)$ die gesuchte Funktion darstellt.

7. FUNKTIONEN, DIE AUF RIEMANNSCHEN FLÄCHEN REGULÄR ODER MEROMORPH SIND UND VORGESCHRIEBENE NULL- BZW. UNENDLICHKEITS-STELLEN BESITZEN. — Um zu den allgemeinen Entwicklungen auf Riemannschen Flächen zu gelangen, mussten gewisse Hilfssätze bewiesen werden (R a d o j č i ć, [9], S. 98, 102—104), die wir nun in den folgenden Satz zusammenfassen:

SATZ 3. — *Seien B und B' offene Bereiche einer geschlossenen Riemannschen Fläche A, so dass $B \subset\subset B' \subset A$ und dass B einfach zusammenhängend relativ zu B' ist. Seien ferner $\tilde{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, h$, Punkte in B und $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, Punkte in $B' - B$.*

Jede in B eindeutige und entweder reguläre oder aber meromorphe Funktion $f(z)$, deren Pole in B die Punkte $\tilde{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, h$, sind, kann in B durch eine Folge a l g e b r a i s c h e r Funktionen $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, approximiert werden, deren Riemannsche Fläche A ist, die im Inneren von B, bzw. von $B - \{\tilde{a}_\mu\}$ gleichmässig gegen $f(z)$ konvergieren und in B regulär, bzw. meromorph sind, wobei jede Funktion $f_n(z)$ die Punkte $\tilde{a}_\mu$ als Pole mit denselben Hauptteilen wie $f(z)$ besitzt.

Die Funktionen $f_n(z)$ können ausserdem in beiden Fällen so gewählt werden, dass sie in $B'-B$ entweder regulär oder meromorph sind und dabei die Punkte $\tilde{b}_\nu$ und nur diese als Pole, mit vorgeschriebenen, von n unabhängigen Hauptteilen besitzen. Im Allgemeinen müssen dann die Funktionen $f_n(z)$ auch ausserhalb B' Pole aufweisen und wir können fordern, dass sich für jede Funktion $f_n(z)$ je ein Pol in jedem zu B' komplementären Kontinuum, und zwar in einem dort beliebig gewählten Punkte befindet.[6])

Ist B nicht zusammenhängend, so kann $f(z)$, selbstverständlich, in jedem zusammenhängenden Stücke von B eine andere monogene analytische Funktion darstellen.

Durch Anwendung der Sätze 1 und 3 können die folgenden zwei allgemeinen Sätze bewiesen werden. Die Beweise sind auch erbracht worden, durch Anwendung der erwähnten, in den Sätzen 1 und 3 enthaltenen Tatsachen ([9], Sätze II und IV, S. 106 und 110. Wir bringen sie hier wegen Vollständigkeit wieder).

SATZ III. — *Sei R irgendeine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche und $\{\tilde{b}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, eine Punktfolge auf R, die keinen Punkt von R als Häufungspunkt, aber, falls R eigentlicheR andpunkte aufweist, einen jeden solchen*[7]) *als Häufungspunkt besitzt.*

Es besteht dann eine Folge a l g e b r a i s c h e r Funktionen

$$f_n(z;\ b_1,\ b_2, \ldots, b_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

deren Riemannsche Flächen die Fläche R grenzweise enthalten und die im Inneren von $R - \{\tilde{b}_\nu\}$ gleichmässig konvergieren und somit eine analytische Funktion $F(z)$ mit dem Existenzgebiet R definieren, welche meromorph auf R ist und die Punkte $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, und nur diese, als Pole, mit vorgeschriebenen Hauptteilen besitzt. Dabei hat f_n die Punkte $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, als (im Allgemeinen nicht einzige) Pole und zwar mit den gehörigen, gegebenen Hauptteilen.

---

[6] Der letzte Teil des Satzes 3 wurde in [9] nur für den dortigen Hilfssatz 1 ausgesprochen, er gilt aber, offensichtlich, auch für die übrigen dortigen Hilfssätze (2 bis 5).

[7] Besteht eine Riemannsche Fläche R_0, so dass $R \subset R_0$ und ist $\tilde{p}$ ein Punkt von R_0, der Häufungspunkt von Punkten von R ist, aber nicht selber zu R gehört, so ist $\tilde{p}$ ein e i g e n t l i c h e r R a n d p u n k t von R.

SATZ IV. — *Sei R irgendeine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche und $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, eine Punktfolge auf R, die keinen Punkt von R als Häufungspunkt, aber, falls R eigentliche Randpunkte aufweist, einen jeden solchen als Häufungspunkt besitzt.*

Es besteht dann eine Folge a l g e b r a i s c h e r Funktionen

$$g_n(z;\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

deren Riemannsche Flächen die Fläche R grenzweise enthalten und die im Inneren von R gleichmässig konvergieren und somit eine analytische Funktion $F(z)$ mit dem Existenzgebiet R definieren, welche regulär auf R ist und die Punkte $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, als (im Allgemeinen nicht einzige) Nullstellen, vorgeschriebener Ordnung besitzt. Dabei hat g_n die Punkte $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, als Nullstellen und zwar mit der gegebenen Ordnung.

Ist die betrachtete nichtgeschlossene Riemannsche Fläche in einer geschlossenen Fläche A enhalten, so können die algebraischen Funktionen f_n bzw. g_n auf der Riemannschen Fläche A gewählt werden, wodurch das grenzweise Enthalten in die Identität übergeht. Aber durch Anwendung der Sätze 1 und 3, bzw. 2 und 3 können dann leicht auch die folgenden zwei Sätze, die Erweiterungen der Entwicklungssätze von Mittag-Leffler und von Weierstrass darstellen, bewiesen werden ([9], die Sätze I und V, S. 100 und 114. Hier werden sie in etwas geänderter Gestalt ausgesprochen, um die Rolle von α_n und φ_n besser hervorzuheben.)

SATZ V. — *Sei G ein offenes Gebiet einer geschlossenen Riemannschen Fläche A, welches nicht mit A identisch ist, und sei $\{\tilde{b}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Punktfolge in G, die jeden Randpunkt von G und nur einen solchen als Häufungspunkt besitzt. Sei ferner, dem Punkte $\{\tilde{b}_n\}$ entsprechend, $\alpha_n(z, b_n)$ irgendeine algebraische Funktion, deren Riemannsche Fläche A ist und die $\tilde{b}_n$ als einzigen Pol in G, mit einem vorgeschriebenen Hauptteile besitzt.*

Es besteht dann eine analytische Funktion $F(z)$ mit dem Existenzgebiete G, meromorph in G, worin sie die Punkte $\tilde{b}_n$ und nur diese als Pole, und zwar mit den vorgeschriebenen Hauptteilen besitzt. Diese Funktion kann in der Gestalt

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(z, b_n) - \beta_n(z)] \tag{7}$$

geschrieben werden, wobei β_n eine geeignete algebraische Funktion bezeichnet, deren Riemannsche Fläche A ist und die in G regulär ist.

Die Funktionen α_n *und* β_n *können ausserdem so gewählt werden, dass* α_n *ausser* $\tilde{a}_n$ *nur noch einen und zwar für alle n denselben, ausserhalb G liegenden Punkt als Pol aufweist und dass* β_n *als einzige Pole, in jedem zu G komplementären Kontinuum einen von n unabhängigen Pol besitzt.*

SATZ VI. — *Sei G ein offenes Gebiet einer geschlossenen Riemanschen Fläche A, welches nicht mit A identisch ist und sei* $\{\tilde{a}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ *eine Punktfolge in G, die jeden Randpunkt von G und nur einen solchen als Häufungspunkt besitzt. Sei ferner, dem Punkte* $\tilde{a}_n$ *entsprechend,* $\varphi_n(z, a_n)$ *irgendeine analytische Funktion, deren Riemannsche Fläche A ist und die* $\tilde{a}_n$ *als einzige Nullstelle, vorgeschriebener Ordnung besitzt und regulär auf A ist, mit Ausnahme eines einzigen wesentlich singulären Punktes ausserhalb G.*

Es besteht dann eine analytische Funktion $F(z)$ *mit dem Existenzgebiet G, regulär in G, worin sie die Punkte* $\tilde{a}_n$ *und nur diese als Nullstellen, mit den vorgeschriebenen Ordnungszahlen besitzt. Diese Funktion kann in der Gestalt*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z, a_n) \cdot e^{-\psi_n(z)} \tag{8}$$

geschrieben werden, wobei ψ_n *eine in G reguläre algebraische Funktion bezeichnet, deren Riemannsche Fläche ebenfalls A ist.*

Die Funktionen φ_n *und* ψ_n *können ausserdem so gewählt werden, dass der wesentlich singuläre Punkt von* φ_n *in einem von n unabhängigen Punkte liegt und dass* ψ_n*, als einzige Pole, in jedem zu G komplementären Kontinuum einen von n unabhängigen Pol besitzt.*

Jede Funktion, welche die im Satze V oder VI genannten Eigenschaften besitzt, kann offenbar in der Gestalt

$$\Phi(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(z, b_n) - \beta_n(z)],$$

bzw.

$$\Psi(z) = \gamma(z) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z, a_n) \cdot e^{-\psi_n(z)}$$

geschrieben werden, wobei $g(z)$ eine in G eindeutige und reguläre Funktion und $\gamma(z)$ eine in G eindeutige, reguläre und von Null verschiedene Funktion darstellen.

Die Sätze V und VI gelten auch dann, wenn statt eines (zusammenhängenden) Gebietes G irgendein offener Bereich der geschlossenen Riemannschen Fläche A betrachtet wird. Ebenso kann man in den Sätzen III und IV statt einer nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche R eine endliche oder abzählbar unendliche Menge nichtgeschlossener Riemannscher Flächen betrachten. Dann tritt jedoch an Stelle des einfachen grenzweisen Enthaltens das grenzweise Enthalten mehrerer Riemannscher Flächen (Erklärung 2) auf.

8. *EIN TOPOLOGISCHER SATZ.* — Im Beweise der Sätze III und IV wurde der folgende, übrigens einleuchtende topologische Satz stillschweigend angewendet, dessen Beweis nun angegeben werde.

SATZ 4. — *Sei* $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *eine Punktfolge auf einer nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche* R, *die falls* R *eigentliche Randpunkte aufweist, jeden solchen und nur einen solchen als Häufungspunkt, sonst aber keine Häufungspunkte besitzt. Dann besteht auf* R *eine, sie normal*[8]) *ausschöpfende Folge* $\{G_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *von Gebieten, so dass* $\tilde{a}_n \in G_{n+1} - G_n$ *ist.*

Beweis. — Sei L_1 ein Jordanscher Kurvenbogen, der $\tilde{a}_1$ mit $\tilde{a}_2$ auf R verbindet (aus lauter inneren Punkten von R bestehend), L_2 ein zweiter, ebensolcher, der $\tilde{a}_2$ mit $\tilde{a}_3$ verbindet und ausser $\tilde{a}_2$ keinen gemeinsamen Punkt mit L_1 hat, usw. Allgemein, sei L_ν ein Jordanscher Kurvenbogen auf L, der $\tilde{a}_\nu$ mit $\tilde{a}_{\nu+1}$ verbindet und ausser $\tilde{a}_\nu$ keinen gemeinsamen Punkt mit $L_1, \ldots, L_{\nu-1}$ hat. Die aus allen L_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, bestehende Kurve sei mit L bezeichnet. Da eine Einteilung von R in Elementardreiecke (Triangulierung) definitonsgemäss vorliegt, sei noch dafür besorgt, dass jedes L_ν die Seiten der Elementardreiecke in höchstens endlich vielen Punkten trifft.

Nun verfeinere man, falls nötig, die Einteilung in Elementardreiecke, so dass der ins Innere oder auf den Rand eines jeden Dreieckes fallende Teil von L aus höchstens einem zusammenhängenden Stücke besteht und höchstens einen Punkt $\tilde{a}_\nu$ enthält, und dass L auch die Seiten der neuen Elementardreiecke in höchstens endlich vielen Punkten trifft.

Sei F_1 jenes Elementardreieck, welches $\tilde{a}_1$ im Inneren enthält oder, falls $\tilde{a}_1$ auf den Rand eines Dreieckes fällt, sei F_1 das Gebiet, welches aus allen Dreiecken besteht, die $\tilde{a}_1$ am Rande haben. Man erweitere das Gebiet F_1 durch alle längs Seiten angrenzende Elementardreiecke, die keine weiteren Punkte von L im Inneren oder am Rande enthalten und wiederhole dies solange, bis alle solche Dreiecke umfasst sind. Sei G_1 das so gewon-

[8] Behnke und Stein, [2] S. 442–443.

nene Gebiet. Es enthält einen und nur einen von $\tilde{a}_1$ ausgehenden Bogen λ_1 von L und weist keine Randkontinua auf, die innerhalb $R - G_1$ beranden. In der Tat, das von einem solchen Randkontinuum in $R - G_1$ berandete Gebiet würde aus Elementardreiecken bestehen, welche keine Punkte von L enthalten, diese sind aber dem Gebiete G_1 schon einverleibt.

Nun konstruiere man G_2 in folgender Weise. Man füge dem Gebiete G_1 alle weiteren Elementardreiecke hinzu, die den Endpunkt von λ_1 auf ihrem Rande enthalten. Eines dieser Dreiecke (falls deren mehrere sind) enthält offenbar einen weiteren, an λ_1 sich anschliessenden Bogen λ_2 von L. Dem so entstandenen Gebiete füge man alle diejenigen Elementardreiecke hinzu, die auf ihrem Rande den Endpunkt von $\lambda_1 \cup \lambda_2$ enthalten, wodurch ein weiterer Bogen λ_3 umfasst wird, usw. Das wiederhole man so lange, bis ein gewisser Bogen λ_{ν_2} von L umfasst wird, der den Punkt $\tilde{a}_2$, und zwar nicht als Endpunkt, enthält. Das so gewonnene Gebiet erweitere man durch alle längs Seiten angrenzende Elementardreiecke, die keinen weiteren Punkte von L im Inneren oder am Rand enthalten und wiederhole das so lange, als solche Dreiecke noch vorhanden sind. Dadurch ist ein Gebiet F_2 entstanden, welches G_1 enthält. Falls gewisse Randpunkte von G_1 nicht ins Innere von F_2 fallen, füge man nach Verfeinerung der betreffenden, an G_1 angrenzenden Elementardreiecke, weitere Dreiecke hinzu, bis ein Gebiet mit denselben Eigenschaften wie F_2 entsteht, welches aber G_1 ganz im Inneren enthält. Das gewonnene Gebiet sei G_2. Es enthält $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ und weist keine Randkontinua auf, die innerhalb $R - G_2$ beranden, was in derselben Weise wie für G_1 bewiesen wird.

Durch Fortsetzung des beschriebenen Verfahrens entsteht, offensichtlich, eine Folge $\{G_n\}$ von der gesuchten Art, denn G_n besitzt keine Randkontinua, die in $R - G_n$ beranden, also schöpft $\{G_n\}$ die Riemannsche Fläche R normal aus und es ist zugleich $\tilde{a}_n \in G_{n+1} - G_n$.

9. *ÜBERLAGERUNGSFOLGEN RIEMANNSCHER FLÄCHEN.* — Die durch die Sätze V und VI geforderte Konstruktion der Funktionen α_n, β_n, φ_n und ψ_n kann auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen, die keinen Beschränkungen unterliegen, nicht ohne weiteres übertragen werden, weil es sich um unendliche Summen oder Produkte handeln müsste, deren Glieder auf der gegebenen nichtgeschlossenen Fläche R eindeutige Funktionen sein sollten. Die Sätze III und VI in [9], die wir leider glaubten bewiesen zu haben, sind also unmöglich. Die Sätze V und VI (in der gegenwärtigen Arbeit) können dennoch wesentlich erweitert werden, was

im Folgenden geschehen soll. Dem müssen aber Betrachtungen über Riemannsche Flächen vorangehen.

Besteht zwischen zwei, über einer Ebene gelegenen Riemannschen Flächen F und $\tilde{F}$ eine gebietstreue punktweise Zuordnung, derart dass jedem Punkte von $\tilde{F}$ ein einziger Punkt auf F entspricht, der in der Ebene denselben Spurpunkt hat, so nennt man bekanntlich F eine Grundfläche von $\tilde{F}$ und $\tilde{F}$ eine Überlagerungsfläche von F. Ist dann $\tilde{W}$ ein Weg auf $\tilde{F}$, der zu seinem Ausgangspunkte zurückläuft und W der entsprechende Weg auf F, so läuft auch W zu seinem Ausgangspunkte zurück. Es gilt, offenbar, auch das Folgende: Sind F uud $\tilde{F}$ zwei Riemannsche Flächen und entspricht jedem geschlossenen Wege $\tilde{W}$ von $\tilde{F}$ ein geschlossener Weg W auf F, so ist $\tilde{F}$ eine Überlagerungsfläche von F. — Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise führen wir noch die folgenden Begriffe ein:

ERKLÄRUNG 3. — Ist F eine Grundfläche von $\tilde{F}$ und p ein Punkt auf F, so wollen wir jeden Punkt $\tilde{p}$ von $\tilde{F}$, der in der zugrunde gelegenen Ebene dieselbe Spur wie p hat, einen Überlagerungspunkt von p nennen und p den Grundpunkt von $\tilde{p}$. (Ist F die Ebene, so wird der Grundpunkt zum Spurpunkt im gewöhnlichen Sinne).

ERKLÄRUNG 4. — Ist in einer Folge Riemannscher Flächen jede Fläche eine Grundfläche der ihr folgenden, so wollen wir diese Folge eine Überlagerungsfolge nennen.

Wir heben diesbezüglich zwei Sätze hervor.

i. *Ist F_1 eine Grundfläche von F_2 und F_2 eine Grundfläche von F_3, so ist auch F_1 eine Grundfläche von F_3.*

ii. *Ist $\{A_n\}$ eine unendliche Überlagerungsfolge geschlossener Riemann scher Flächen, die eine Riemannsche Fläche R grenzweise enthalten, so ist R eine Überlagerungsfläche jeder Fläche A_n.*

Der erste Satz ist einleuchtend; der zweite soll nun bewiesen werden.

Beweis. — Sei W irgendein geschlossener Weg auf R. Er ist in endlich vielen Elementardreiecken einer Triangulierung von R enthalten. Diese Dreiecke bilden ein ganz in R enthaltenes Gebiet und dieses ist nach der Erklärung 1 , da $\{A_n\}$ die Fläche R grenzweise enthaltet, in allen Flächen A_n, $n \geqslant n_0$, enthalten, wo n_0 eine genügend grosse natürliche Zahl bezeichnet. Also ist W, auch als Weg auf einer jeden solchen Fläche A_n betrachtet, ein geschlossener Weg, und folglich ist R eine Überlagerungsfläche jeder Fläche A_n, $n \geqslant n_0$. Da aber $\{A_n\}$ eine Überlagerungsfolge ist, ist nach dem Satze i A_{n_0} eine Überlagerungsfläche aller Flächen A_n, $n < n_0$, also ist der auf A_{n_0} geschlossene Weg W auch auf allen diesen Flächen $(n < n_0)$ geschlossen, d. h. R ist Überlagerungsfläche auch für jede Fläche A_n, $n < n_0$; sie ist es also für alle n, womit der Satz ii bewiesen ist.

Als Beispiel einer Überlagerungsfolge sei die Folge derjenigen geschlossenen Riemannschen Flächen angeführt, die den Funktionen $z^{1/2}$, $z^{1/4}, \ldots, z^{1/2^n}, \ldots$, zugeordnet sind. Jede dieser Funktionen ist nähmlich nicht nur auf ihrer Fläche, sondern auch auf der Fläche jeder weiteren Funktion derselben Folge eindeutig.

10. *EINE ERWEITERUNG DES MITTAG-LEFFLERSCHEN ENTWICKLUNGSSATZES FÜR RIEMANNSCHE FLÄCHEN, WELCHE EINE SIE GRENZWEISE ENTHALTENDE ÜBERLAGERUNGSFOLGE GESCHLOSSENER RIEMANNSCHER FLÄCHEN ZULASSEN.* — Wir beweisen nun den folgenden Satz:

SATZ VII. — *Sei R eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche, die eine sie grenzweise enthaltende Überlagerungsfolge $\{A_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, geschlossener Riemannscher Flächen zulässt und sei $\{\tilde{b}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Punktfolge auf R, die, falls R eigentliche Randpunkte aufweist, jeden solchen und nur einen solchen als Häufungspunkt, sonst aber keine Häufungspunkte besitzt. Sei ferner, dem Punkte $\tilde{b}_n$ entsprechend, $\alpha_n(z, b_n)$ irgendeine algebraische Funktion, deren Riemannsche Fläche A_{m_n} ist, unter $\{m_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine geeignete monoton nichtabnehmende Folge natürlicher Zahlen verstanden, und die $\tilde{b}_n$ als Pol mit einem vorgeschriebenen Hauptteile besitzt.*

Es besteht dann eine analytische Funktion $F(z)$ mit dem Existenzgebiete R, m e r o m o r p h auf R, wo sie die Punkte $\tilde{b}_n$ und nur diese als Pole, und zwar mit den vorgeschriebenen Hauptteilen besitzt und die in der Gestalt

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n(z, b_n) - \beta_n(z)] \tag{9}$$

geschrieben werden kann, wobei β_n eine geeignete algebraische Funktion bezeichnet, deren Riemannsche Fläche A_{m_n} ist und die in $\tilde{b}_n$ regulär ist. Die übrigen Pole von α_n und die Pole von β_n heben sich in den aufeinanderfolgenden Gliedern der Reihe (9) gegenseitig auf.

Beweis. — Sei $\{G_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Folge offener Gebiete der Fläche R, die dieselbe normal ausschöpfen, und zwar so dass $\tilde{b}_n \in G_{n+1} - G_n$ ist (Satz 4). Wir bilden die Zahlenfolge $\{m_n\}$, so dass $A_{m_n} \supset G_{n+1}$. Sei A_{m_1} die erste Fläche in der Folge $A_1, A_2, \ldots$, welche G_2 mit $\tilde{b}_1$ enthält, A_{m_2} die erste Fläche in $A_{m_1}, A_{m_1+1}, \ldots$, welche G_3 mit $\tilde{b}_2$ enthält. Allgemein, sei A_{m_n} die erste Fläche in $A_{m_{n-1}}, A_{m_{n-1}+1}, \ldots$, welche G_{n+1} mit $\tilde{b}_n$ enthält. Da $\{A_m\}$ die Fläche R grenzweise enthält, so ist G_{n+1} für jedes n in allen A_m bei genügend grossem m enthalten; also besteht A_{m_n} für jedes n.

Die so gewonnene Folge $\{m_n\}$ ist monoton nichtabnehmend, denn $A_{m_{n-1}}$ ist identisch entweder mit A_{m_n} oder mit A_{m_n+1}, oder mit A_{m_n+k}, $k > 1$; also ist A_{m_n+1} Überlagerungsfläche von A_{m_n}, d. h. auch $\{A_{m_n}\}$ is eine Überlagerungsfolge. Besteht $\{A_m\}$ aus unendlich vielen verschiedenen Flächen, kann also R nicht als Teil einer geschlossenen Riemannschen Fläche angesehen werden, so gilt dasselbe auch von $\{A_{m_n}\}$.

Sei nun $\{\varepsilon_n\}$ eine gegen Null monoton abnehmende Folge positiver Zahlen und es seien noch die folgenden Bezeichnungen allgemein benutzt: $H(f, \tilde{z})$ bezeichne den Hauptteil einer Funktion f im Pole $\tilde{z}$. Ist $\tilde{F}$ Überlagerungsfläche von F und $\tilde{z}$ ein Punkt auf F, so bezeichne $\tilde{\tilde{z}}$ irgendeinen seiner Überlagerungspunkte auf $\tilde{F}$. Da wir Überlagerungsfolgen mit gemeinsamen Gebieten (nähmlich den G_n) betrachten, ist stets einer und nur einer der Punkte $\tilde{\tilde{z}}$ mit $\tilde{z}$ identisch.

Nun werde die Folge der algebraischen Funktionen α_n und β_n gebildet. — Sei $\alpha_n(z, b_n)$ für jedes n eine algebraische Funktion mit der Riemannschen Fläche A_{m_n}, die in $G_{n+1} - G_n$ den Punkt $\tilde{b}_n$ als Pol mit dem vorgeschriebenen Hauptteile, der mit $H(\alpha_n, \tilde{b}_n)$ bezeichnet werde, besitzt, und falls nötig noch einen einzigen Pol $\tilde{c}_n$ genügend hoher Ordnung, ausserhalb G_{n+1} aufweist. Nach Satz 1 können solche Funktionen immer gebildet werden.

Die Funktionenfolge $\{\beta_n\}$ bilden wir folgenderweise: Erstens sei z. B. $\beta_1 \equiv 0$, dann β_2 eine algebraische Funktion mit der Fläche A_{m_2} und welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) Es sei für $\tilde{z} \in G_1 \; (\subset\subset G_2)$

$$|\alpha_2 - \beta_2| < \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

2) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{b}}_1$ auf A_{m_2}, dessen Grudpunkt $\tilde{b}_1$ (auf A_{m_1}) ist, mit Ausnahme des Punktes $\tilde{b}_1$ selbst, sei Pol von β_2 mit dem Hauptteile $H(\beta_2, \tilde{\tilde{b}}_1) = H(\alpha_1, \tilde{b}_1)$.

3) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{c}}_1$, dessen Grundpunkt $\tilde{c}_1$ ist, sei Pol mit dem Hauptteile $H(\beta_2, \tilde{\tilde{c}}_1) = H(\alpha_1, \tilde{c}_1)$.

4) Da β_2 (nach Satz 3) im Allgemeinen noch weitere Pole aufweisen muss, seien dieselben ausserhalb G_3 gewählt und mit $\tilde{d}_{2,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_2$, bezeichnet; in jedem Komplementär-Kontinuum von G_3 mag sich e i n Pol befinden. — Nach dem Satze 3 besteht β_2 immer.

Allgemein, β_n sei eine algebraische Funktion mit der Fläche A_{m_n}, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) Es sei für $\tilde{z} \in G_{n-1}\,(\subset\subset G_n)$

$$|\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}. \tag{10}$$

2) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{b}}_\nu$ auf A_{m_n}, dessen Grundpunkt $\tilde{b}_\nu$ auf $A_{m_{n-1}}$ ist $(\tilde{b}_\nu \in G_n \subset A_{m_{n-1}})$, ausser $\tilde{b}_\nu$ selbst, jetzt als Punkt von A_{m_n} betrachtet, sei für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ Pol von β_n mit dem Hauptteile $H(\beta_n, \tilde{\tilde{b}}_\nu) = H(\alpha_\nu, \tilde{b}_\nu)$.

3) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$ sei Pol mit dem Hauptteile $H(\beta_n, \tilde{\tilde{c}}_{n-1}) = H(\alpha_{n-1}, \tilde{c}_{n-1})$.

4) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{d}}_{n-1,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_{n-1}$, sei Pol mit dem Hauptteile $H(\beta_n, \tilde{\tilde{d}}_{n-1,\lambda}) = -H(\beta_{n-1}, \tilde{d}_{n-1,\lambda})$.

5) Die übrigen Pole von β_n seien ausserhalb G_{n+1} gewählt und mit $d_{n,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_n$, bezeichnet. — Nach dem Satze 3 besteht β_n immer.

Die Funktion $\alpha_1 - \beta_1$ ist eindeutig auf A_{m_1} und hat die Pole $\tilde{b}_1$ und c_1. Da A_{m_2}, Überlagerungsfläche von A_{m_1} ist, so ist $\alpha_1 - \beta_1$ eindeutig auch auf A_{m_2}, also ist auch die algebraische Funktion

$$(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \tag{11}$$

eindeutig auf A_{m_2}. Da die Funktion $\alpha_1 - \beta_1$ die Pole $\tilde{b}_1$ und $\tilde{c}_1$ auf A_{m_1} hat, so hat sie, auf A_{m_2} betrachtet, Pole mit denselben Hauptteilen in allen Punkten $\tilde{\tilde{b}}_1$ und $\tilde{\tilde{c}}_1$, also hat (11), da sich die Hauptteile in allen diesen Punkten, ausser in b_1 aufheben, nur die Pole $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$, $\tilde{c}_2$ und $\tilde{d}_{2,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_2$.

Unter der Voraussetzung, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} (\alpha_\nu - \beta_\nu) \tag{12}$$

auf der Fläche $A_{m_{n-1}}$ eindeutig ist und die Pole $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, sowie $\tilde{c}_{n-1}$ und $\tilde{d}_{n-1,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_{n-1}$, besitzt, wollen wir das entsprechende auch für

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu - \beta_\nu) \tag{13}$$

beweisen. — In der Tat, (12) hat, als Funktion auf A_{m_n} betrachtet, Pole in den Punkten $\tilde{\tilde{b}}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$ und $\tilde{\tilde{d}}_{n-1,\lambda}$. Also hat (13), da sich die Hauptteile von (12) und von $\alpha_n - \beta_n$ in allen diesen Punkten, ausser in den Punkten $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, selber, (die wir jetzt auf A_{m_n} betrachten und die mit den ebenso bezeichneten Punkten von $A_{m_{n-1}}$ identisch sind) aufheben, nur die Pole $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\tilde{c}_n$ und $\tilde{d}_{n,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_n$, die letzteren ausserhalb G_{n+1}.

Das bewiesene gilt aber, wie gesehen, tatsächlich für $n = 1, 2$, also gilt es für jedes n.

Sei nun Δ irgendein ganz in R enthaltenes Gebiet. Ist ε eine beliebig kleine positive Zahl, so besteht ein n_0, so dass für $n > n_0$ zugleich $\Delta \subseteq G_{n-1}$ und $\varepsilon_n < \varepsilon$ ist. Also ist für $\tilde{z} \in \Delta$, infolge der vorangehenden Bedingung 4, $\alpha_n - \beta_n$ eine in Δ eindeutige und reguläre Funktion und es ist

$$|\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1},$$

folglich, für $n > n_0$, $r > 0$ und $\tilde{z} \in \Delta$

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+r} (\alpha_\nu - \beta_\nu) \right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r} |\alpha_\nu - \beta_\nu| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r+1} < \varepsilon_n$$

und um so eher

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+r} (\alpha_\nu - \beta_\nu) \right| < \varepsilon,$$

wobei die Summe eine in Δ eindeutige und reguläre Funktion darstellt. Also ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} (\alpha_\nu - \beta_\nu)$$

in Δ gleichmässig konvergent und definiert daselbst eine eindeutige und reguläre Funktion.

Anderseits, da die algebraische Funktion (13) auf A_{m_n} eindeutig ist und R nach Satz ii Überlagerungsfläche von A_{m_n} ist, so ist (12) auch auf R eindeutig und besitzt in Δ eine endliche Anzahl von Polen, und zwar höchstens $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, n-2$, da $\tilde{b}_{n-1}$, $\tilde{c}_{n-1}$ und $\tilde{d}_{n-1,\lambda}$ ausserhalb G_{n-1} fallen. Folglich ist

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu - \beta_\nu)$$

eine in Δ eindeutige analytische Funktion, welche daselbst genau diejenigen Pole $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$, aufweist, die innerhalb Δ liegen, und welche in denselben die gegebenen Hauptteile besitzt. In allen übrigen Punkten von Δ ist $F(z)$ regulär. Da Δ ein beliebiges, ganz in R enthaltenes Gebiet ist, ist damit der Satz VII bewiesen.

11. *EINE ERWEITERUNG DER WEIERSTRASSSCHEN PRODUKTENTWICKLUNG FÜR RIEMANNSCHE FLÄCHEN, WELCHE EINE SIE GRENZWEISE ENTHALTENDE ÜBERLAGERUNGSFOLGE GESCHLOSSENER RIEMANNSCHER FLÄCHEN ZULASSEN.* — Bei der Übertragung der Weierstrassschen Produktentwicklung auf nichtgeschlossene Riemannsche Flächen, wobei die einzelnen Faktoren Funktionen auf geschlossenen Riemannschen Flächen darstellen sollen, entstehen Schwierigkeiten, die teilweise davon herrühren, dass auf nichtschlichtartigen Flächen keine algebraischen Funktionen mit nur einer einfachen Nullstelle bestehen können (so wie $(1 - z/a_n)$ in der Ebene). Wenn aber auch mehrere Nullstellen zugelassen werden, so kann man doch, wie es der Satz 1 zeigt, falls die Fläche keine schlichtartige ist, nicht alle Null- und Unendlichkeitsstellen einer algebraischen Funktion in vorgegebene Punkte setzen, was zur Bildung des unendlichen Produktes nötig wäre. Deswegen griffen wir schon im Satze VI zur Anwendung des Satzes 2 und tun es wiederum, indem wir an Stelle von $(1 - z/a_n)$ transzendente Funktionen setzen. Bei diesen können nähmlich alle Nullstellen und Singularitäten in vorgeschriebene Punkte gesetzt werden. Obwohl sich dadurch die Produktentwicklung erheblich kompliziert, beweisen wir dennoch den folgenden Satz, der dem Satze VII zur Seite gestellt werden kann:

SATZ VIII. — *Sei R eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche, die eine, sie grenzweise enthaltende Uberlagerungsfolge $\{A_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, geschlos-*

sener Riemannscher Flächen zulässt und sei $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *eine Punktfolge auf* R, *die, falls* R *eigentliche Randpunkte aufweist, jeden solchen und nur einen solchen als Häufungspunkt, sonst aber keine Häufungspunkte besitzt. Sei ferner, dem Punkte* $\tilde{a}_n$ *entsprechend,* $\varphi_n(z, a_n)$ *irgendeine analytische Funktion, deren Riemannsche Fläche* A_{m_n} *ist, unter* m_n, $n = 1, 2, \ldots$, *eine geeignete monoton nichtabnehmende Folge natürlicher Zahlen verstanden, und die* $\tilde{a}_n$ *als einzige Nullstelle, vorgeschriebener Ordnung besitzt und ausser einer wesentlich singulären Stelle, auf* A_{m_n} *regulär ist.*

Es besteht dann eine analytische Funktion $F(z)$ *mit dem Existenzgebiete* R, *r e g u l ä r auf* R, *wo sie die Punkte* $\tilde{a}_n$ *und nur diese als Nullstellen, una zwar mit den vorgeschriebenen Ordnungszahlen besitzt, und die in der Gestalt*

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z, a_n) \cdot \chi_n(z) \cdot e^{-\psi_n(z)} \tag{14}$$

geschrieben werden kann, wobei χ_n *und* ψ_n *analytische Funktionen, deren Fläche* A_{m_n} *ist, bezeichnen, die erstere mit Polen und wesentlich singulären Stellen, aber keinen Nullstellen, die letztere, eine algebraische Funktion. Die wesentlichen Singularitäten von* φ_n *und* χ_n, *sowie die Pole von* χ_n *und* ψ_n *heben sich in den aufeinanderfolgenden Gliedern des Produktes* (14) *gegenseitig auf.*

B e w e i s. — Wiederum sei $\{G_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine durch den Satz 4 begründete Folge offener Gebiete von R, die R normal so ausschöpfen, dass $\tilde{a}_n \in G_{n+1} - G_n$ ist, und sei $\{A_{m_n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $m_n \leqslant m_{n+1}$, aus $\{A_m\}$ so gebildet, dass $G_{n+1} \subset A_{m_n}$. Wir bilden gemäss dem Satze 2 die Funktionen φ_n und ψ_n mit folgenden Eigenschaften:

φ_n sei für jedes n eine auf A_{m_n} eindeutige Funktion, die $\tilde{a}_n$ als einzige Nullstelle, mit der gegebenen Ordnungszahl, und nur eine wesentlich singuläre Stelle $\tilde{c}_n$ besitzt, und zwar in jenem Komplementärgebiet von G_{n+1} (falls es deren mehrere gibt) welches $\tilde{a}_n$ enthält. Dann ist in G_n nicht nur φ_n regulär und von Null verschieden, sondern auch $\log \varphi_n$ ist eindeutig und regulär in G_n.

Ferner sei $\chi_1 \equiv 1$ und sei χ_2 eine auf A_{m_2} eindeutige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1) Jeder Überlagerungspunkt $\tilde{\tilde{a}}_1$ auf A_{m_2}, des auf A_{m_1} gelegenen Punktes $\tilde{a}_1$, mit Ausnahme des auf A_{m_2} betrachteten Punktes $\tilde{a}_1$ selbst, sei Pol von χ_2, dessen Ordnungszahl gleich derjenigen ist, die der Nullstelle $\tilde{a}_1$ von φ_1 zukommt.

2) Jeder Überlagerungspunkt $\tilde{\tilde{c}}_1$ (auf A_{m_2}) des auf A_{m_1} gelegenen Punktes $\tilde{c}_1$ sei wesentlich singuläre Stelle von χ_2, und zwar so dass $\varphi_1 \chi_2$ auf A_{m_2} regulär in allen Punkten $\tilde{\tilde{c}}_1$ ist. Die Möglichkeit dieser Forderung sei weiter unten begründet.

3) χ_2 habe zusätzliche Pole $\tilde{h}_{2,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_2$, und zwar in jedem zu G_2 komplementären Kontinuum höchstens einen Pol. Diese Pole sollen, falls die Pole $\tilde{\tilde{a}}_1$ nicht genügen, χ_2 ermöglichen und, da die Singularitäten von χ_2 ausserhalb G_2 fallen, die Eindeutigkeit von $\log \chi_2$ in G_2, wie für χ_n gezeigt werden soll, herstellen.

Allgemein, für $n = 3, 4, \ldots$ sei χ_n eine auf A_{m_n} eindeutige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1) Jeder Überlagerungspunkt $\tilde{\tilde{a}}_\nu$ auf A_{m_n}, der als Punkte von $A_{m_{n-1}}$ betrachteten Punkte $\tilde{\tilde{a}}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, $(\tilde{a}_\nu \in G_{n-1} \subset A_{m_{n-1}})$ mit Ausnahme der als Punkte von A_{m_n} betrachteten Punkte $\tilde{a}_\nu$ selbst, sei Pol von χ_n, dessen Ordnungszahl gleich derjenigen ist, die der Nullstelle $\tilde{a}_\nu$ von φ_ν zukommt. Da $A_{m_{n-1}}$ und A_{m_n} das Gebiet G_n gemeinsam haben, befinden sich alle diese Pole $\tilde{\tilde{a}}_\nu$ auf A_{m_n} ausserhalb G_n.

2) Jeder Überlagerungspunkt $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$ des auf $A_{m_{n-1}}$ gelegenen Punktes $\tilde{c}_{n-1}$ sei eine wesentlich singuläre Stelle von χ_n und zwar so dass $\varphi_{n-1}\chi_n$ auf A_{m_n} regulär in allen $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$ ist.

Dass dies immer erreicht werden kann, folgt aus dem Beweise des Satzes 2, wo die jetzt mit φ_n und ψ_n bezeichnete Funktion φ in der Gestalt

$$\varphi = e^{J+K}$$

gewonnen worden ist und dabei

$$J = \int_{z_0}^{z} \alpha \, dz$$

ist. Setzt man nähmlich

$$\varphi_n = e^{J_n + K_n}, \quad \chi_n = e^{\overline{J}_n + \overline{K}_n}$$

und

$$J_n = \int_{z_0}^{z} \alpha_n \, dz, \quad \overline{J}_n = \int_{z_0}^{z} \overline{\alpha}_n \, dz,$$

wobei α_n, $\overline{\alpha}_n$ algebraische Funktionen und K_n, $\overline{K}_n$ Abelsche Integrale erster Gattung bedeuten, so ist

$$\varphi_{n-1} \, \chi_n = e^{\int (\alpha_{n-1} + \overline{\alpha}_n) \, dz + K_{n-1} + \overline{K}_n}$$

als eine auf A_{m_n} betrachtete und dort eindeutige Funktion, regulär in allen Punkten $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$, unter der Bedingung, dass sich daselbst die Pole von α_{n-1} und $\overline{\alpha}_n$ gegenseitig aufheben, d.h. dass

$$H(\overline{\alpha}_n,\ \tilde{\tilde{c}}_{n-1}) = -H(\alpha_{n-1},\ \tilde{c}_{n-1})$$

ist. Da die Hauptteile von $\overline{\alpha}_n$ in ihren Polen frei gewählt werden können, kann die betrachtete Eigenschaft von χ_n immer gefordert werden.

3) χ_n habe zusätzliche Pole $\tilde{h}_{n,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_n$, und zwar in jedem zu G_{n+1} komplementären Kontinuum höchstens einen Pol. Diese Pole sollen, wie gezeigt werde, χ_n ermöglichen und die Eindeutigkeit von $\log \chi_n$ in G_n herstellen.

4) χ_n habe die Punkte $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l_{n-1}$, als Nullstellen, deren Ordnungszahlen gleich denjenigen sind, die den Polen $\tilde{h}_{n-1,\lambda}$ zukommt. Durch diese Nullstellen sollen die Pole $\tilde{h}_{n-1,\lambda}$ von χ_{n-1} im Produkt $\chi_{n-1}\, \chi_n$ aufgehoben werden, was durch das Vorschreiben der Hauptteile von $\overline{\alpha}_n$, so dass

$$H(\overline{\alpha}_n,\ \tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}) = -H(\overline{\alpha}_{n-1}, \tilde{h}_{n-1,\lambda})$$

sei, immer erreicht werden kann.

Da die Hauptteile in den Polen $\tilde{\tilde{a}}_\nu$, $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$, $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$ von $\overline{\alpha}_n$ vorgegeben sind, sind im Allgemeinen die Pole $\tilde{h}_{n,\nu}$ notwendig, aber auch hinreichend um $\overline{\alpha}_n$ und damit χ_n zu ermöglichen. Da die Punkte $\tilde{a}_\nu$, $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$, $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$ und $\tilde{h}_{n,\lambda}$ auf A_{m_n} ausserhalb G_n liegen, ist $\log \chi_n$ regulär in G_n. Damit

$$\log \chi_n = \int_{z_0}^{z} \overline{\alpha}_n\, dz + \overline{K}_n$$

in G_n auch eindeutig sei, soll die Summe der Residuen von $\overline{\alpha}_n$ in jedem auf A_{m_n} zu G_n komplementären Kontinuum $C_{n,\varkappa}$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, k_n$, verschwinden, wobei die Singularitäten $\tilde{a}_\nu$ ($\neq \tilde{\tilde{a}}_\nu$), $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$, $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$ und $\tilde{h}_{n,\lambda}$ von $\overline{\alpha}_n$, die in $C_{n,\varkappa}$ fallen, in Betracht kommen. Dies ist aber immer möglich, da zu diesem Zwecke in jeder zu bestimmenden Funktion $\overline{\alpha}_n$ bloss eine genügend grosse Anzahl von willkürlichen Konstanten zur Verfügung stehen soll und gemäss dem Satze 1 die Ordnungszahlen der Pole $\tilde{h}_{n,\lambda}$ immer hoch genug gewählt werden können, damit die nötige Anzahl vorliege.

Nun bilden wir die Funktionen ψ_n. Erstens sei $\psi_1 \equiv 0$, dann ψ_2 eine algebraische Funktion mit der Riemannschen Fläche A_m und die die folgenden Eigenschaften hat:

1) Es sei für $\tilde{z} \in G_1$

$$|\log(\varphi_2 \chi_2) - \psi_2| < \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Dies ist gemäss dem Satze 3 immer möglich, da $\log \varphi_2$ und $\log \chi_2$ in G_1 regulär und eindeutig sind.

2) Die nötigen Pole von ψ_2 seien $\tilde{d}_{2,\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m_2$, ausserhalb G_2, in jedem komplementären Kontinuum von G_2 höchstens ein Pol.

Allgemein, für $n = 3, 4, \ldots$, sei ψ_n eine algebraische Funktion mit der Riemannschen Fläche A_{m_n} und die die folgenden Eigenschaften hat:

1) Es sei für $\tilde{z} \in G_{n-1}$

$$|\log(\varphi_n \chi_n) - \psi_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1},$$

was gemäss dem Satze 3 immer möglich ist, da $\log \varphi_n$ und $\log \chi_n$ in G_{n-1} regulär und eindeutig sind.

2) Jeder Punkt $\tilde{\tilde{d}}_{n-1,\mu}$ sei Pol mit dem Hauptteile

$$H(\psi_n, \tilde{\tilde{d}}_{n-1,\mu}) = -H(\psi_{n-1}, \tilde{d}_{n-1,\mu}).$$

3) Die übrigen Pole von ψ_n seien ausserhalb G_n (sagen wir, in $G_{n+1} - G_n$) gewählt und mit $\tilde{d}_{n,\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m_n$, bezeichnet. Nach dem Satze 3 besteht ψ_n immer.

Die Funktion $\varphi_1 \chi_1 e^{-\psi_1}$ ist eindeutig auf A_{m_1}, hat die Nullstelle $\tilde{a}_1$ und die wesentlich singuläre Stelle $\tilde{c}_1$.

Da A_{m_2} Überlagerungsfläche von A_{m_1} ist, so ist $\varphi_1 \chi_1 e^{-\psi_1}$ eindeutig auch auf A_{m_2}, also ist auch

$$\varphi_1 \chi_1 e^{-\psi_1} \cdot \varphi_2 \chi_2 e^{-\psi_2} \tag{15}$$

eindeutig auf A_{m_2}. Da sich nach den Bedingungen 1 und 2, die χ_2 betreffen, alle von $\tilde{a}_1$ verschiedenen Nullstellen $\tilde{\tilde{a}}_1$ und alle singulären Stellen $\tilde{\tilde{c}}_1$ im Produkte $\varphi_1 \chi_2$ aufheben, hat die Funktion (15) bloss die Nullstellen $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$, vorgeschriebener Ordnung und die Singularitäten $\tilde{c}_2$, $\tilde{h}_{2,\lambda}$ und $\tilde{d}_{2,\mu}$, die sich ausserhalb G_2 befinden.

Unter der Voraussetzung, dass

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \varphi_\nu \chi_\nu e^{-\psi_\nu} \tag{16}$$

auf der Riemannschen Fläche $A_{m_{n-1}}$ eindeutig ist und nur die Nullstellen $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, und die singulären Stellen $\tilde{c}_{n-1}$, $\tilde{h}_{n-1,\lambda}$, $\tilde{d}_{n-1,\mu}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, l_{n-1}$; $\mu = 1, 2, \ldots, m_{n-1}$) besitzt, beweisen wir das entsprechende auch für

$$\prod_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu \chi_\nu e^{-\psi_\nu}. \tag{17}$$

Tatsächlich, (16) hat, als Funktion auf A_{m_n} betrachtet, Nullstellen in den Punkten $\tilde{\tilde{a}}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, und ist singulär in den Punkten $\tilde{\tilde{c}}_{n-1}$, $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$ $\tilde{\tilde{d}}_{n-1,\mu}$ also, da nach der Bedingung 1, die χ_n betrifft, alle Nullstellen, ausser $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, selbst, aufgehoben werden und nach den Bedingungen 2 und 3 für χ_n, und 2 für ψ_n, auch alle die genannten Singularitäten verschwinden, hat die Funktion (17) nur die wesentlich singulären Punkte $\tilde{c}_n$, $\tilde{d}_{n,\mu}$ und die Pole $\tilde{h}_{n,\lambda}$, alle ausserhalb G_n.

Da nun dasselbe, wie gesehen, tatsächlich für $n = 1, 2$, gilt, so gilt es für jedes n.

Sei nun Δ irgendein ganz in R enthaltenes Gebiet und ε eine beliebig kleine positive Zahl. Es besteht eine natürliche Zahl n_0, so dass für $n > n_0$ zugleich $\Delta \subseteq G_{n-1}$ und $\varepsilon_n < \varepsilon$ ist. Also ist $\varphi_n \chi_n e^{-\psi_n}$ für $n > n_0$ und $\tilde{z} \in \Delta$, da ihre Nullstellen und Singularitäten $\tilde{\tilde{a}}_\nu, \tilde{a}_n, \tilde{\tilde{c}}_{n-1}, \tilde{c}_n$, $\tilde{\tilde{d}}_{n-1,\mu}$, $\tilde{d}_{n,\mu}$, $\tilde{\tilde{h}}_{n-1,\lambda}$, $\tilde{h}_{n,\lambda}$ ausserhalb G_{n-1} fallen und $G_{n-1} \subset A_{m_n}$, eine in Δ eindeutige und reguläre Funktion, und es ist in Δ

$$|\log(\varphi_n \chi_n) - \psi_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}.$$

Also, für $n > n_0$, $r > 0$ und $\tilde{z} \in \Delta$ ist

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+r} \left[\log(\varphi_\nu \chi_\nu) - \psi_\nu \right] \right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r} \left| \log(\varphi_\nu \chi_\nu) - \psi_\nu \right| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r+1} < \varepsilon_n$$

und um so eher

$$\left| \sum_{\nu=n}^{n+r} [\log(\varphi_\nu \chi_\nu) - \psi_\nu] \right| < \varepsilon,$$

wobei die Summe eine in Δ eindeutige und reguläre Funktion darstellt. Also ist das unendliche Produkt

$$\prod_{\nu=n}^{\infty} \varphi_\nu \chi_\nu e^{-\psi_\nu}$$

in Δ gleichmässig konvergent und definiert daselbst eine eindeutige und reguläre Funktion. Da auch die Funktion (17) auf A_{m_n} eindeutig und regulär in Δ ist, so gilt dasselbe auch von

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu \chi_\nu e^{-\psi_\nu}.$$

Da nun Δ ein beliebiges, ganz in R enthaltenes Gebiet ist, ist damit der Satz VIII bewiesen.

Die Sätze VII und VIII können, ebenso wie III und IV, auch auf eine endliche oder abzählbar unendliche Menge nichtgeschlossener Riemannscher Flächen erweitert werden. Auch liesse sich eine jede Funktion, welche die im Satze VII oder VIII genannten Eigenschaften besitzt, mittels einer Funktion derselben Art (wie bezüglich der Sätze V und VI bemerkt wurde) darstellen.

Schliesslich sei bemerkt, dass in allen unseren Sätzen (etwa mit Ausnahme von VIII) die behandelten Probleme mit in gewisser Hinsicht einfachsten Mitteln, mit Hilfe von verhältnismässig einfachen Funktionen, wie es die algebraischen sind, gelöst wurden.

(Eingegangen am 26. Oktober 1955)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. Appell et E. Goursat — Théorie des Fonctions algébriques et de leurs Intégrales. Paris 1929.

[2] H. Behnke und K. Stein — Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. *Math Ann.*, **120** (1948).

[3] H. Florack — Reguläre und meromorphe Funktionen auf nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen. *Schriftenreihe des Math. Inst. Münster* (1948).

[4] R. König und M. Krafft — Über Reihenentwicklung analytischer Funktionen. *Journ. für reine u. angew. Math.*, **154** (1925).

[5] ———— Elliptische Funktionen, 1928.

[6] M. Radojčić — Sur l'approximation des fonctions analytiques multiformes par les fonctions algébriques. *C. R. de l'Acad. Paris* (1927).

[7] ———— Un mode de représentation analytique des fonctions multiformes. *Glas Srp. Kr. Akad. Nauka*, **130**, Belgrade (1928) (serbisch mit französichem Auszug).

[8] ———— Les fonctions analytiques représentées par les suites convergentes de fonctions algébriques, Thèse, Belgrade 1928 (serbisch mit französischem Auszug).

[9] ———— Sur les séries de fonctions algébriques et les produits infinis analogues définissant des fonctions analytiques multiformes dans leurs domaines d'existence quelconques. *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci.* **VII** (1954).