SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS ALGEBRIQUES ET LES PRODUITS INFINIS ANALOGUES, DÉFINISSANT DES FONCTIONS ANALYTIQUES MULTIFORMES DANS LEURS DOMAINES D'EXISTENCE QUELCONQUES

par

M. RADOJČIĆ

SOMMAIRE — L'auteur étend les théorèmes de Mittag-Leffler et de Weierstrass, concernant le développement des fonctions uniformes en séries ou en produits infinis, aux surfaces de Riemann ouvertes et démontre en même temps l'existence des fonctions analytiques ayant un domaine d'existence quelconque. Les développements de l'auteur ont comme termes des fonctions algébriques (correspondant aux fonctions rationnelles de la série de Mittag-Leffler) ou bien certaines fonctions transcendantes (correspondant aux facteurs de Weierstrass) dont les surfaces de Riemann sont fermées.

1. En 1909 Koebe [3] démontra l'existence des fonctions analytiques dont le domaine d'existence est une surface de Riemann ouverte quelconque, ces fonctions étant *méromorphes* dans ce domaine.

Ce n'est qu'en 1948 que Mlle. H. Florack [2] démontra, grâce à certains travaux des MM. H. Behnke et K. Stein [1] l'existence des fonctions *régulières* dont le domaine d'existence est une surface de Riemann ouverte quelconque. Ainsi le théorème de Runge, sur l'existence des fonctions uniformes dont le domaine d'existence est un domaine ouvert quelconque du plan, a obtenu sa généralisation naturelle et en quelque sorte définitive.

En même temps Mlle. Florack généralisa les théorèmes bien connus de Mittag-Leffler et de Weierstrass en construisant pour une surface de Riemann ouverte R quelconque:

1° une fonction analytique uniforme et *méromorphe* sur R, ayant ses pôles dans une suite de points, donnée à l'avance et possédant pour ces pôles des parties principales données, et

2° une fonction analytique uniforme et *régulière* sur R, ayant ses zéros dans une suite de points, donnée à l'avance, l'ordre de chaque zéro étant donné.

Les expressions pour ces fonctions sont semblables respectivement à celles de Mittag-Leffler et de Weierstrass. C'est une somme, ou bien un produit, finis ou infinis, de certaines fonctions dont chacune possède un seul pôle ou un seul zéro et dont la surface de Riemann *contient* la surface donnée R.

2. Ici nous allons exposer une autre manière d'aborder ces problèmes. — Dans les théorèmes cités de Runge et de Mittag-Leffler figurent des séries de fonctions rationnelles et dans ceux de Weierstrass figurent des produits de fonctions de la forme

$$\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{\mu_n} e^{g_n(z)},$$

donc chacune possède un seul zéro et un seul point singulier essentiel $z=\infty$. Or, on peut se demander s'il est possible de généraliser ces théorèmes pour les surfaces de Riemann de telle sorte que les fonctions rationnelles soient remplacées par des fonctions *algébriques,* généralement multiformes et les facteurs de Weierstrass par des fonctions analogues *dont les surfaces de Riemann sont algébriques.*

En général nous n'aurons pas alors des suites de fonctions dont les surfaces de Riemann *contiennent* la surface donnée R. Ce qui aura lieu peut illustrer l'exemple suivant, qui représente une formule élémentaire bien connue:

$$\log z = \lim_{n\to\infty} n\,(z^{1/n}-1).$$

D'ailleurs, on peut généraliser facilement cette formule pour qu'elle représente une fonction quelconque, uniforme et régulière dans une région annulaire d'une surface logarithmique (M. Radojčić [5]). On aura toujours une suite de fonctions algébriques dont les surfaces de Riemann sont des surfaces fermées S_n à n feuillets et qui tendent pour ainsi dire vers la surface logarithmique.

3. Nous avons donné ailleurs ([4] et [6]) un certain nombre de propositions générales sur l'approximation des fonctions analytiques multiformes quelconques, dans des domaines quelconques de leurs surfaces de Riemann, par les fonctions algébriques. Pour obtenir ces propositions il fallait partir d'une généralisation de l'intégrale de Cauchy, permettant d'exprimer les valeurs d'une fonction régulière dans un domaine complètement intérieur à une surface de Riemann, par les valeurs qu'elle possède à la frontière de ce domaine.[1]) En outre la définition suivante d'une notion que nous exprimons par „contenir à la limite“ fut nécessaire:

Soit R une surface de Riemann quelconque. Nous dirons qu'une suite $\{S_n\}$ de surfaces de Riemann fermées *contient à la limite* la surface R, si n'importe quel domaine D de R, complètement intérieur à R (en symboles $D \subset\subset R$) est contenu dans toutes les surfaces S_n pour lesquelles n est assez grand.[2])

Lorsque R est une surface de Riemann fermée, on peut prendre $S_n = R$ et cette notion se réduit alors au simple „contenir“.

Maintenant, continuant ces considérations générales, nous allons construire d'abord des suites de foctions algébriques, convergeant uniformément à l'intérieur d'une surface de Riemann ouverte R quelconque et définissant par conséquent une fonction analytique $F(z)$ uniforme et régulière sur R, possédant R comme domaine d'existence. Nous pouvons même demander que la fonction $F(z)$ ait des zéros donnés à l'avance ou bien qu'elle soit méromorphe sur R et qu'elle ait des pôles donnés, avec des parties principales données.

4. Dans ces buts nous partons de la proposition suivante, que nous avons démontrée ailleurs ([6] théorème I'):

„Soit $f(z)$ une fonction analytique, D un domaine ouvert de sa surface de Riemann, où $f(z)$ est holomorphe, sauf aux points de ramification algébriques, situés dans D et où elle est supposée continue; soit D' un domaine ouvert (d'une surface de Riemann) qui contient D; désignons par S_n, $n = 1, 2, \ldots$, des surfaces de Riemann contenant à la limite le domaine D'; soient enfin Δ_n, $n = 1, 2, \ldots$, des domaines fermés contenus dans D, épuisant D et tels que Δ_n puisse-t-être considéré comme domaine de S_n. — Il existe toujours une suite de fonctions algébriques $\varphi_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, dont les surfaces sont S_n, qui convergent uniformément à l'intérieur de D vers $f(z)$, chaque $\varphi_n(z)$ n'ayant comme pôles qu'un pôle unique dans chaque domaine complémentaire au domaine Δ_n.“

---

[1]) Comme nous avons appris plus tard, une telle généralisation, mais limitée au cas où le domaine considéré est simplement connexe (correspondant à un paramètre d'uniformisation locale) fut mentionnée d'abord par R. König et M. Krafft dans l'article „Über Reihenentwicklung analytischer Funktionen“, *Journ. f. reine u. angew. Math.* **154** (1925). Ce n'est que dans leur livre „Elliptische Funktionen“, Berlin et Leipzig 1928, que les mêmes auteurs expriment clairement l'idée de l'extension de l'intégrale de Cauchy aux domaines des surfaces de Riemann. Mais ils n'effectuent pas l'analyse correspondante, se bornant à l'objet de leur livre. Or, indépendamment paru en novembre 1927 notre note [4], contenant cette généralisation.

[2]) On trouve dans [6], p. 21, aussi une définition plus large, valable lorsque, au lieu de R, on a un ensemble fini ou infini dénombrable de surfaces de Riemann.

Notons que les pôles sont placés n'importe où dans ces domaines complémetaires. Les domaines D et D' furent supposés connexes, mais les démonstrations ne sont pas liées, à cette restriction.

Cette proposition ne nous intéresse ici qu'au cas où D' fait partie d'une surface de Riemann fermée, soit S. Supposons en outre que D soit complètement intérieur à D' et que les domaines Δ_n soient siplement connexes relativement à D, et de même D relativement à D'. Alors, les Δ_n étant simplement connexes relativement à D', les pôles des $\varphi_n(z)$ peuvent être déplacés n'importe où dans les continus complémentaires de D', de sorte que les $\varphi_n(z)$ deviennent régulières dans D' et que la proposition précédente prend la forme suivante:

LEMME 1. *Soient D et D' deux domaines ouverts d'une surface de Riemann fermée S, le domaine D étant complètement intérieur à D', celui-ci non identique à S, et D étant simplement connexe relativement à D'.*

Alors toute fonction $f(z)$ uniforme et régulière dans D peut être représentée dans D par une suite de fonctions algébriques $\varphi_n(z)$ dont la surface de Riemann est S, qui convergent uniformément à l'intérieur de D et sont régulières dans le domaine plus large D'.

On peut même demander que chaque fonction $\varphi_n(z)$, ayant pour pôles des points quelconques dans les continus complémentaires de D', n'ait qu'un seul pôle dans chacun de ces continus.[3)]

MM. Behnke et Stein ont démontré au fond la même proposition par le même procédé (c'est celui de Runge). En effet, ils démontrent ([1] p. 439, proposition 5):

Soient B_1 et B_2 des domaines polygonaux sur une surface de Riemann R non fermée et soit $B_1 \subset\subset B_2 \subset\subset R$, chaque point de la frontière de B_1 pouvant être relié avec la frontière de B_2 par des lignes contenues dans B_2 et dont les points sont des points de la frontière de B_1 ou à l'extérieur de ce domaine.

Alors chaque fonction $f(z)$, régulière et uniforme dans B_1 peut être représentée par des fonctions régulières et uniformes dans B_2, qui tendent à l'intérieur de B_1 uniformément vers $f(z)$.

Puisque B_1 et B_2 (chez nous D et D') sont des domaines polygonaux (définition à la p. 433) ils font partie d'une surface de Riemann fermée (chez nous S). La possibilité de relier les points de la frontière de B_1 à celle de B_2 revient à dire que B_1 est simplement connexe relativement à B_2. Quant aux fonctions qui tendent uniformément vers $f(z)$, elles sont

---

3) Notons que la démonstration de notre théorème 2 dans [6] (p. 15) représente déjà une démonstration de la proposition citée, puisque la condition, suivant laquelle la fonction donnée doit être algébrique, peut être supprimée.

d'après la démonstration de cette proposition (pp. 440—442) des fonctions algébriques.

5. Notons encore certains faits dont nous ferons usage.

Étant donnée une surface de Riemann ouverte R, la détermination d'une suite de surfaces fermées, contenant à la limite R, consiste à concevoir: 1° une suite de domaines D_n, $n = 1, 2, \ldots$, faisant partie de R et épuisant R, et 2° une suite de surfaces de Riemann fermées S_n, telles que $D_n \subset S_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Or, la possibilité d'obtenir une telle suite $\{S_n\}$, bien qu'évidente, implique une démonstration et résulte de la proposition suivante, démontrée par MM. Behnke et Stein ([1], p. 435, Einbettungssatz):

Pour chaque domaine D, complètement intérieur à une surface de Riemann ouverte existe une surface de Riemann fermée A, qui contient D de telle sorte qu'un domaine au moins de A soit extérieur à D.

Notons que, dans le cas où D n'est pas connexe, ceci est vrai même lorsque D est complètement intérieur à *plusieurs surfaces de Riemann*, à condition que leur nombre soit fini (p. 436, proposition 2).

Lorsqu'une suite $\{D_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, de domaines qui épuisent un domaine ouvert d'une surface de Riemann a la propriété que pour tous les n chaque point de la frontière de D_n peut être relié à la frontière de D_{n+1} par un chemin contenu dans $D_{n+1} - D_n$ (c. à. d. lorsque D_n est simplement connexe relativement à D_{n+1}) la suite $\{D_n\}$ est dite *normale*.

Ayant introduit cette notion, MM. Behnke et Stein ([1], p. 443) démontrent le fait suivant:

Tout domaine ouvert d'une surface de Riemann est normalement épuisable par des domaines connexes.

6. Pour distinguer les points d'une surface de Riemann de leurs affixes dans le plan, nous acceptons une désignation pratique de Koebe: $\bar{z}$ doit désigner un point de la surface, dont l'affixe est z.

Puisque nous aurons à nous occuper des suites de fonctions algébriques dont les surfaces de Riemann sont données, nos considérations supposent la possibilité de construire certaines fonctions algébriques sur des surfaces de Riemann fermées, données à l'avance. Weierstrass a fait une analyse détaillée d'une telle construction dans ses „Cours sur les Transcendantes d'Abel". Ici nous pouvons nous contenter de certaines conditions générales que ces fonctions algébriques doivent remplir et qui sont contenues dans le théorème dit fondamental de la théorie des fonctions algébriques et dans le théorème connu de Riemann-Roch. Nous reproduisons donc ces faits, en les exprimant en termes suivants:

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Soit S une surface de Riemann fermée, de genre p et soient $\tilde{z}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, n points sur S et r_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, des entiers positifs, tels que $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = m > p$.*

Il existe alors une fonction algébrique dont la surface de Riemann est S et qui possède en chaque point $\tilde{z}_\nu$ un pôle d'ordre r_ν, et aucun pôle de plus.

La fonction algébrique la plus générale dont la surface est S et qui possède ses pôles en ces m pointes, d'ordres au plus égaux aux nombres r_ν correspondants, contient $m - p + t + 1$ constantes arbitraires, où t désigne le nombre de certaines fonctions „adjointes".

Retenons qu'en tout cas le nombre des constantes arbitraires est *supérieur* à $m - p$ et remarquons qu'on peut les déterminer en exigeant que la fonction ait, de plus, autant de zéros simples, choisis à l'avance, et de coefficients dans les parties principales des pôles donnés.

7. Après ces remarques préliminaires nous démontrons d'abord la proposition suivante, qui généralise l'un des théorèmes bien connus de Mittag-Leffler en l'appliquant aux surfaces de Riemann fermées:

PROPOSITION I. *Soit D un domaine ouvert quelconque (connexe ou non) d'une surface de Riemann fermée S, non identique à S, et soit $\{\tilde{a}_n\}$ une suite quelconque de points de D, s'accumulant en chaque point de la frontière de D et là seulement.*

Il existe alors une fonction analytique $F(z)$ uniforme sur S, possédant D comme domaine d'existence et méromorphe dans D, où elle a les points $\tilde{a}_n$ et ces points seulement, comme pôles avec des parties principales données à l'avance.

Cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(z) - \psi_n(z)] \tag{1}$$

où φ_n désigne pour tout n une fonction algébrique de la surface S, régulière dans D, excepté au point $\tilde{a}_n$, qu'elle possède comme pôle avec la partie principale donnée correspondante, et ψ_n désigne une fonction algébrique de S, régulière dans D.

Les fonctions φ_n et ψ_n peuvent être choisies telles que chaque fonction φ_n ait un seul et même pôle à l'extérieur de D et que chaque fonction ψ_n ait à l'extérieur de D, dans chacun des continus complémentaires à D un seul et même pôle.

Démonstration. Soit

$$g_n\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{C_1^{(n)}}{t}+\frac{C_2^{(n)}}{t^2}+\ldots+\frac{C_{m_n}^{(n)}}{t^{m_n}},\quad C_{m_n}^{(n)}\neq 0,$$

la partie principale donnée à l'avance, relative au pôle $\tilde{a}_n \neq \infty$, en désignant par t l'expression $z-a_n$ ou $(z-a_n)^{1/s}$ suivant que $\tilde{a}_n$ est un point ordinaire de S ou bien un point de ramification d'ordre $s-1$. Pour $a_n=\infty$ la partie principale est

$$g_n(t)=C_1^{(n)}t+C_2^{(n)}t^2+\ldots+C_{m_n}^{(n)}t^{m_n},$$

où t désigne z ou $z^{1/s}$ suivant les deux dites possibilités.

D'après le théorème fondamental du n⁰ 6 on peut former pour tout n une fonction algébrique de la surface S, soit $\varphi_n(z)$, qui a deux pôles seulement: le pôle $\tilde{a}_n$ où la partie principale est g_n et un pôle quelconque à l'extérieur de D, soit $\tilde{b}_n$, l'ordre de celui-ci étant un certain nombre r_n. En effet, si nous envisageons la fonction la plus générale qui remplit ces conditions, le nombre des constantes arbitraires est en tout cas supérieur à $m-p$ $(m>p)$ où $m=m_n+r_n$. Donc, m_n étant en même temps le nombre des constantes C dans g_n, qu'il faut déterminer, il suffit qu'on ait $m_n<m_n+$ $+r_n-p$, c. à d. $r_n>p$. Cette condition, qu'on peut préciser, si l'on veut, à $r_n=p+1$, suffit à ce que la fonction φ_n existe sûrement.

Ceci étant, soit $\{D_n\}$, $n=0,1,2,\ldots$, une suite de domaines ouverts de S, qui épuisent normalement le domaine D et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1}-D_n$, $n=1,2,\ldots$ (La démonstration de ce fait évident ne présente aucune difficulté).

D'après le lemme 1 on peut former pour chaque n une fonction algébrique $\psi_n(z)$ de la surface S, régulière dans D et telle qu'on a pour une suite de nombres positifs ε_n décroissant vers zéro:

$$|\varphi_n-\psi_n|<\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}$$

pour tous les $z\in D_{n-1}$, puisque $D_{n-1}\subset\subset D_n$.

La fonction $\varphi_n-\psi_n$ est uniforme et régulière dans D, à l'exception des pôles $\tilde{a}_n$. À l'extérieur de D cette fonction possède comme pôles le point $\tilde{b}_n$ et les pôles de ψ_n. Remarquons qu'on peut placer les pôles des ψ_n dans un ensemble de points, tel que chaque continu complémentaire de D' contienne l'un de ces points seulement. Les points $\tilde{b}_n$ peuvent être placés dans le même ensemble, par ex. en un seul et même point.

[4]) Comparer à la proposition 3 dans [2].

Alors la série (1) remplit les conditions cherchées. En effet, soit Δ n'importe quel domaine complètement intérieur à D. En désignant par ε un nombre positif arbitrairement petit, il existe toujours un n_0 tel qu'on a pour $n \geqslant n_0$ à la fois $\Delta \subseteq D_{n-1}$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$, par conséquent

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r}(\varphi_\nu - \psi_\nu)\right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r}|\varphi_\nu - \psi_\nu| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r+1} < \varepsilon_n$$

et d'autant plus

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r}(\varphi_\nu - \psi_\nu)\right| < \varepsilon$$

pour $z \in \Delta$. Donc la série (1) est uniformément convergente à l'intérieur de D, à l'exception des pôles $\tilde{a}_n$, pour chacun desquels l'une des fonctions ψ_n devient infinie. Par conséquent $F(z)$ est une fonction analytique telle que la proposition I l'exige.

Pour assurer à la surface de $F(z)$ d'être vraiment S et non pas une surface plus simple dont S serait une surface recouvrante, il suffit de supposer que l'un des points $\tilde{a}_\nu$ est le seul dont l'affixe a une certaine valeur a_n.

Comme l'on voit immédiatement, lorsque la surface de Riemann S se réduit au plan, la proposition I se réduit par un choix convenable des fonctions φ_n et ψ_n au théorème général de Mittag-Leffler.

Remarquons enfin que si D n'est pas connexe, la fonction $F(z)$ peut représenter plusieurs fonctions monogènes sur une même surface de Riemann fermée.

8. Démontrons les quatre lemmes suivants, analogues au lemme 1.

LEMME 2. *Soient D et D' deux domaines ouverts d'une surface de Riemann fermée S, le domaine D étant complètement intérieur à D', celui-ci non identique à S, et D étant simplement connexe relativement à D'. Soient $\tilde{b}_\nu, \nu = 1, 2, \dots, k$, des points contenus dans $D' - D$.*

Alors toute fonction $f(z)$ uniforme et régulière dans D peut être représentée dans D par une suite de fonctions algébriques $f_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, dont la surface de Riemann est S, qui convergent uniformément à l'intérieur de D et sont régulières dans D' à l'exception des points $\tilde{b}_\nu$, qui sont tous, pour chaque fonction f_n des pôles avec des parties principales données, ne dépendant que de ν.

Démonstration. Soit $\alpha(z)$ une fonction algébrique de S, ayant les points $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, k$, comme pôles avec les parties principales données à l'avance. En général, d'après le théorème fondamental, $\alpha(z)$ doit avoir encore quelques pôles simples ou, par ex. un pôle multiple, que nous supposons placé à l'extérieur de D'.

Soit $f(z)$ une fonction quelconque uniforme et régulière dans D. La fonction $f-\alpha$ étant régulière dans D, il existe d'après le lemme 1 une suite de fonctions algébriques, soit $\{\varphi_n(z)\}$, dont la surface de Riemann est S, régulières dans D' et convergeant à l'intérieur de D uniformément vers $f-\alpha$, c. à d.

$$|f(z)-\alpha(z)-\varphi_n(z)|<\varepsilon, \quad n>n_0, \quad \tilde{z}\in\Delta\subset\subset D.$$

Par conséquent les fonctions algébriques $f_n=\varphi_n+\alpha$ convergent uniformément à l'intérieur de D vers $f(z)$, c. à d.

$$|f(z)-f_n(z)|<\varepsilon$$

en possédant en même temps les pôles $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,k$.

LEMME 3. *Soient D et D' deux domaines ouverts d'une surface de Riemann fermée S, le domaine D étant complètement intérieur à D', celui-ci non identique à S, et D étant simplement connexe relativement à D'. Soient $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, des points contenus dans D.*

Alors toute fonction $f(z)$ uniforme et méromorphe dans D, où ses pôles sont $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, peut être représentée dans D par une suite de fonctions algébriques $f_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, dont la surface de Riemann est S, qui convergent uniformément à l'intérieur de $D-\{\tilde{a}_\mu\}$ vers $f(z)$ et qui sont régulières dans D' à l'exception des points $\tilde{a}_\mu$, ceux-ci étant pour chaque fonction f_n des pôles dont les parties principales sont les mêmes que pour la fonction $f(z)$.

Démonstration. Soit $\beta(z)$ une fonction algébrique de S, ayant les points $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, comme pôles avec les mêmes parties principales que pour $f(z)$, et régulière dans $D'-D$. Nous supposons de nouveau que les autres pôles de $\beta(z)$, s'il y en a, sont à l'extérieur de D'.

La fonction $f-\beta$ étant régulière dans D, il existe d'après le lemme 1 une suite de fonctions algébriques $\{\varphi_n(z)\}$ dont la surface de Riemann est S, régulières dans D' et convergeant à l'intérieur de D uniformément vers $f-\beta$.

Par conséquent les fonctions algébriques $f_n=\varphi_n+\beta$ convergent uniformément à l'intérieur de $D-\{\tilde{a}_\mu\}$ vers $f(z)$, à savoir

$$|f(z)-f_n(z)|<\varepsilon, \quad n>n_0, \quad \tilde{z}\in\Delta\subset\subset D.$$

LEMME 4. *Soient D et D' deux domaines ouverts d'une surface de Riemann fermée S, le domaine D étant complètement intérieur à D', celui-ci non identique à S, et D étant simplement connexe relativement à D'. Soient $\tilde{a}_\mu$, $\mu=1,2,\ldots,h$, et $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,k$, des points contenus, les premiers dans D et les seconds dans $D'-D$.*

Alors chaque fonction $f(z)$ uniforme et méromorphe dans D, où ses pôles sont a_μ, $\mu=1,2,\ldots,h$, peut être représentée dans D par une suite *de fonctions algébriques* $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, *dont la surface de Riemann est* S, *qui convergent uniformément à l'intérieur de* $D - \{\tilde{a}_\mu\}$ *vers* $f(z)$ *et qui sont régulières dans* D' *à l'exception des points* $\tilde{a}_\mu$ *et* $\tilde{b}_\nu$, *qui sont pour chaque fonction* f_n *des pôles. Les parties principales des pôles* $\tilde{a}_\mu$ *y sont les mêmes que pour la fonction* $f(z)$ *et les parties principales des pôles* $\tilde{b}_\nu$ *sont également données à l'avance et ne dépendent que de* ν.

Démonstration. Soit encore $\beta(z)$ une fonction algébrique aux mêmes propriétés que dans la démonstration précédente. La fonction $f - \beta$ étant régulière dans D, il existe d'après le lemme 2 une suite de fonctions algébriques $\{\varphi_n(z)\}$ dont la surface de Riemann est S, régulières dans D', à l'exception des points $\tilde{b}_\nu$ qu'elles ont comme pôles avec des parties principales données, et convergeant à l'intérieur de D uniformément vers $f - \beta$.

Par conséquent, les fonctions algébriques $f_n = \varphi_n + \beta$ convergent uniformément dans l'intérieur de $D - \{\tilde{a}_\mu\}$ vers $f(z)$, à savoir

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \quad n > n_0, \quad \tilde{z} \in \Delta \subset\subset D$$

en possédant en même temps les pôles $\tilde{b}_\nu$.

LEMME 5. *Soient* D *et* D' *deux domaines ouverts d'une surface de Riemann fermée* S, *le domaine* D *étant complètement intérieur à* D', *celui-ci non identique à* S, *et* D *étant simplement connexe relativement à* D'. *Soient* $\tilde{a}_\mu$, $\mu = 1, \ldots, h$, *et* $\tilde{b}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, *des points de* S, *contenus, les premiers dans* D *et les seconds dans* $D' - D$.

Alors toute fonction $f(z)$ *uniforme et régulière dans* D, *ayant les points* $\tilde{a}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, h$, *pour zéros d'ordres donnés, et non pas d'autres zéros dans* D, *peut être représentée dans* D *par une suite de fonctions algébriques* $f_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, *dont la surface de Riemann est* S, *qui sont régulières dans* D', *convergent uniformément à l'intérieur de* D *vers* $f(z)$ *et qui ont, chacune, les points* $\tilde{a}_\mu$ *et* $\tilde{b}_\nu$ *comme zéros, l'ordre de chaque zéro* $\tilde{a}_\mu$ *étant le même que pour* $f(z)$ *et l'ordre de chaque zéro* $\tilde{b}_\nu$ *étant, lui aussi, donné et ne dépendant que de* ν.

Démonstration. D'après le théorème fondamental du n° 6 on peut former une fonction algébrique de la surface de Riemann S, soit $\alpha(z)$, qui possède: 1° les points $\tilde{a}_\mu$ comme zéros, de mêmes ordres que pour $f(z)$, 2° les points $\tilde{b}_\nu$ comme zéros d'ordres donnés et 3° certains pôles à l'extérieur de D'. En effet, désignons par M le nombre de tous ces zéros, comptés avec leurs degrés de multiplicité, et par m le nombre analogue, relatif aux pôles. Puisque le nombre des constantes arbitraires est supérieur à $m-p$ et que M de ces constantes doivent être déterminées, ceci est toujours possible si $M < m-p$, c. à d. $m > M+p$. Par ex. avec $m=M+p+1$ la fonction $\alpha(z)$ existe sûrement.

Cette fonction a m zéros, donc il est possible que les zéros donnés ne soient pas les seuls dans D'. Soient $\tilde{c}_\lambda$, $\lambda=1,2,\ldots,l$, les zéros de α situés dans D, différents des $\tilde{a}_\mu$ et i_λ leurs ordres. Soient de même c'_λ, $\lambda=1,2,\ldots,l'$, les zéros de α situés dans $D'-D$, différents des $\tilde{b}_\nu$ et i'_λ leurs ordres. La fonction f/α est différente de zéro et régulière dans D, à l'exception des points $\tilde{c}_\lambda$ où elle a des pôles dont les ordres sont i_λ.

D'après le lemme 4 il existe une suite de fonctions algébriques $\varphi_n(z)$, $n=1,2,\ldots$, de la surface S, convergeant vers f/α uniformément à l'intérieur de $D-\{\tilde{c}_\lambda\}$ et régulières dans D', à l'exception des points $\tilde{c}_\lambda$ et $\tilde{c}'_\lambda$, qui sont des pôles pour toutes les fonctions, d'ordres donnés, i_λ et i'_λ.

Alors les fonctions $f_n=\alpha\varphi_n$ sont régulières dans D', différentes de zéro aux points $\tilde{c}_\lambda$ et $\tilde{c}'_\lambda$, mais elles possèdent dans D les mêmes zéros que $f(z)$ et ceux-là seulement, c. à d. les points $\tilde{a}_\mu$, l'ordre de chacun d'eux étant le même que pour $f(z)$. En effet, pour n assez grand les fonctions φ_n, convergeant vers f/α, n'ont pas des zéros dans D; donc il suffit de supprimer dans la suite $\{f_n\}$ ceux des termes où le contraire aurait lieu.

Puisque les φ_n sont régulières dans $D'-D$, on peut dire seulement que les f_n ont les points $\tilde{b}_\nu$ comme zéros d'ordres non inférieurs à ceux de α et qu'il peuvent y avoir encore des zéros (pour tout n assez grand). Or, on peut facilement préciser les ordres des zéros $\tilde{b}_\nu$ en demandant par ex. que ces ordres soient pour α d'une unité plus grands et que les φ_n aient des pôles simples aussi en $\tilde{b}_\nu$, $\nu=1,\ldots,k$, car les f_n auront alors en $\tilde{b}_\nu$ des zéros d'ordres donnés.

Ainsi les fonctions algébriques f_n ont les points $\tilde{a}_\mu$ et $\tilde{b}_\nu$ comme zéros d'ordres donnés à l'avance, l'ordre de chaque zéro $\tilde{a}_\mu$ étant le même que pour $f(z)$. Mais il n'est pas exclu que ces fonctions aient dans $D'-D$ d'autre zéros encore.

9. Passons à l'extension du théorème de Mittag-Leffler aux surfaces de Riemann ouvertes quelconques, et où les fonctions rationnelles dans l'expression de Mittag-Leffler seront remplacées par des fonctions algébriques.

En appliquant le lemme 4 nous démontrons d'abord la proposition suivante:

PROPOSITION II. *Soit R une surface de Riemann ouverte quelconque et $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, une suite de points de R, ne s'accumulant nulle part à l'intérieur de R, mais s'accumulant en chaque point de la frontière de R, en tant que R possède une frontière.*

Il existe alors une suite de fonctions algébriques $\{f_n(z)\}$ dont les surfaces de Riemann contiennent à la limite la surface R, qui convergent à l'intérieur de $R - \{\tilde{a}_\nu\}$ uniformément et qui définissent ainsi une fonction analytique $F(z)$ uniforme et méromorphe sur R, possédant R comme domaine d'existence et les points $\tilde{a}_\nu$, et ceux-ci seulement, comme pôles avec des parties principales données à l'avance. La fonction $f_n(z)$ a les points $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, comme pôles avec les parties principales données correspondantes.

Démonstration. Soit $\{D_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, une suite de domaines ouverts de la surface R, qui l'épuisent normalement et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1} - D_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, telles que $D_{n+1} \subset S_n$ et que, par conséquent, ces surfaces contiennent à la limite la surface donnée R. Désignons par g_n la partie principale donnée, relative au pôle $\tilde{a}_n$ et par $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs décroissant vers zéro.

D'après le théorème fondamental (n° 6) on peut former une fonction algébrique $f_1(x)$ dont la surface de Riemann est S_1, qui a comme pôle dans D_1 le seul point $\tilde{a}_1$, avec la partie principale g_1 et, s'il le faut, un pôle à l'extérieur de D_1, soit $\tilde{b}_1$, l'ordre de celui-ci étant un certain nombre r_1.

D'après le lemme 4 on peut former une fonctions algébrique $f_2(z)$ dont la surface de Riemann est S_2, qui a pour pôles dans D_2 les seuls points $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_2$ avec les parties principales g_1 et g_2, et un pôle quelconque à l'extérieur de D_2, soit $\tilde{b}_2$, l'ordre de celui-ci étant r_2, cette fonction étant en outre telle que

$$|f_2(z) - f_1(z)| < \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \tilde{z} \in D_1 \subset\subset D_2.$$

Généralement, d'après le même lemme, il existe une fonction algébrique $f_n(z)$, $n = 2, 3, \ldots$, dont la surface est S_n, qui a pour pôles dans D_n les points $\tilde{a}_\nu, \nu = 1, \ldots, n$ et ces points seulement, avec les parties principales g_ν correspodantes et un pôle quelconque à l'extérieur de D_n, soit $\tilde{b}_n$, l'ordre de celui-ci étant r_n, cette fonction f_n étant en outre telle que

$$|f_{n+2}(z) - f_n(z)| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \quad \tilde{z} \in D_{n-1} \subset\subset D_n.$$

La suite $\{f_n\}$ obtenue ainsi converge uniformément dans tout domaine Δ complètement intérieur à R, exception faite des pôles $\tilde{a}_\nu$. En effet, ε

étant un nombre positif arbitrairement petit, il existe un nombre naturel n_0 tel qu'on a pour $n > n_0$ à la fois $\Delta \subseteq D_n$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$. Mais alors, pour $\tilde{z} \in \Delta$

$$|f_{n+r} - f_n| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r-1} |f_{\nu+1} - f_\nu| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r} < \varepsilon_n ,$$

donc

$$|f_{n+r} - f_n| < \varepsilon, \quad z \in \Delta.$$

Convergeant ainsi dans R, excepté aux points $\tilde{a}_\nu$, la suite $\{f_n\}$ définit une fonction analytique méromorphe dans son domaine d'existence, qui est la surface de Riemann ouverte R. Bien que l'inégalité précédente est vraie aussi pour $\tilde{a}_\nu \in \Delta$, la convergence n'a lieu que dans $\Delta - (\{\tilde{a}_\nu\} \cap \Delta)$, les f_n devenant infinies dans $\{\tilde{a}_\nu\}$. Comme $\tilde{b}_n$ est à l'extérieur de D_n, les fonctions f_n sont régulières dans D_n, à l'exception des f_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$, au plus.

10. Démontrons aussi la proposition suivante, qui a une forme plus rapprochée de celle du théorème de Mittag-Leffler. On pourrait l'obtenir en transformant dans la proposition II la suite en série, mais nous la démontrons directement, au seul moyen du lemme 1.

PROPOSITION III. *Soit R une surface de Riemann ouverte quelconque et $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, une suite de points de R, ne s'accumulant nulle part à l'intérieur de R, mais s'accumulant en chaque point de la frontière de R, en tant que R possède une frontière. Soit en outre $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, contenant à la limite la surface R.*

Il existe alors une fonction analytique $F(z)$ uniforme et méromorphe sur la surface de Riemann R, possédant R comme domaine d'existence et les points $\tilde{a}_\nu$, et ceux-ci seulement, comme pôles avec des parties principales données à l'avance.

Cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(z, a_n) - \psi_n(z)] \tag{2}$$

où φ_n et ψ_n désignent pour tout n deux fonctions algébriques dont la surface est S_n. Chaque fonction φ_n possède comme pôle l'un des points $\tilde{a}_\nu$, à savoir $\tilde{a}_n$, avec la partie principale donnée correspondante. Outre ces pôles, les fonctions φ_n et ψ_n possèdent d'autres pôles, qui s'annulent mutuehllement deux à deux, dans les termes consécutifs de la série.

D é m o n s t r a t i o n. Désignons par $\{D_n\}$ la même suite qu'au début de la démonstration précédente. Soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, telles que $D_{n+3} \subset S_n$, ces surfaces contenant à la limite la surface R. D'après le théorème fondamental on peut former pour tout n une fonction algébrique de la surface S_n, soit $\varphi_n(z)$, qui a les trois pôles suivants: le point $\tilde{a}_n$, où la partie principale est g_n, et les deux points $\tilde{b}_n$ et $\tilde{b}_{n+1}$ dans $D_{n+3} - D_{n+1}$, l'ordre de ceux-ci étant certains nombres r_n et r_{n+1} qu'on peut, d'après les remarques faites à la page 101, soumettre à la condition $r_n + r_{n+1} > p_n$, où p_n est le genre de S_n.

Nous supposons en outre que, u_{n+1} étant la partie principale de φ_n au pôle $\tilde{b}_{n+1}$, la partie principale de φ_{n+1}, soit au même pôle $-u_{n+1}$, $n=1, 2, \ldots$ La fonction φ_1 doit avoir exceptionnellement un seul pôle, $\tilde{b}_2$. Conformément au théorème fondamental cela est toujours possible.

D'après le lemme 1 on peut former pour tout n une fonction algébrique $\psi_n(z)$ de la surface S_n, régulière dans D_{n+1} et telle qu'on a pour une suite de nombres positifs ε_n, décroissant vers zéro,

$$|\varphi_n(z) - \psi_n(z)| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \quad \tilde{z} \in D_{n-1} \subset\subset D_n.$$

On peut exiger que les fonctions ψ_n aient leurs pôles dans une suite double de points, $\{\tilde{c}_{i,n}\}$, $i=1, \ldots, i_n$, $n=2, 3, \ldots$, telle que les points $\tilde{c}_{i,n}$, $i=1, 2, \ldots, i_n$, soient dans $D_{n+2} - D_{n+1}$, à savoir un seul dans chacun des domaines connexes séparés dont est composé $D_{n+2} - D_{n+1}$. Plus précisément, la fonction ψ_n doit avoir les pôles $\tilde{c}_{i,n}$, $i=1, 2, \ldots, i_n$ et $c_{i,n+1}$, $i = 1, 2, \ldots, i_{n+1}$. La partie principale de ψ_n au pôle $\tilde{c}_{i,n+1}$ étant $v_{i,n+1}$, celle de ψ_{n+1} au même pôle doit être $-v_{i,n+1}$, $i=1, 2, \ldots, i_{n+1}$. Seule la fonction ψ_1 ne doit avoir que les pôles $\tilde{c}_{i,2}$, $i=1, 2, \ldots, i_2$.

La fonction $\varphi_n - \psi_n$ est uniforme et régulière dans D_{n+1}, à l'exception du pôle $\tilde{a}_n$. A l'extérieur de D_{n+1}, à savoir dans $D_{n+3} - D_{n+1}$ cette fonction possède comme pôles $\tilde{b}_n$ et $\tilde{b}_{n+1}$ et les pôles $\tilde{c}_{i,n}$, $i=1, 2, \ldots, i_n$ et $\tilde{c}_{i,n+1}$, $i=1, 2, \ldots, i_{n+1}$, de ψ_n.

Cela étant, la série

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [\varphi_\nu(z) - \psi_\nu(z)]$$

remplit les conditions de la proposition II. En effet, si Δ est un domaine complètement intérieur à R, et ε arbitrairement petit, positif, il existe un n_0 tel qu'on a pour $n > n_0$ à la fois $\Delta \subseteq D_{n-1}$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$, par conséquent

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r} (\varphi_\nu - \psi_\nu)\right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r} |\varphi_\nu - \psi_\nu| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r+1} < \varepsilon_n$$

et d'autant plus

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r}(\varphi_\nu-\psi_\nu)\right|<\varepsilon, \quad \tilde{z}\in\Delta.$$

Donc la série

$$\sum_{\nu=n}^{n+r}(\varphi_\nu-\psi_\nu)$$

est uniformément convergente dans l'intérieur de Δ. Quant à la somme finie

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}(\varphi_\nu-\psi_\nu),$$

les pôles $\tilde{b}_\nu$ des fonctions φ et de même les pôles $\tilde{c}_{i,\nu}$ des ψ_ν s'anéantissent mutuellement deux à deux, puisque par ex. les parties principales de φ_ν et $\varphi_{\nu+1}$ en $\tilde{b}_{\nu+1}$ sont $u_{\nu+1}$ et $-u_{\nu+1}$. Subsistent seulement les pôles $\tilde{a}_\nu$, $\nu=1, 2,\ldots, n-1$ dans D_n et les pôles $\tilde{b}_n$ et $\tilde{c}_{i,n}$, $i=1, 2,\ldots, i_n$ dans $D_{n+2}-D_{n+1}$, donc à l'extérieur de $D_{n+1}\supset\Delta$. Par conséquent la série (2) est uniformément convergente à l'intérieur de Δ, à l'exception des pôles $\tilde{a}_\nu$, pour chacun desquels l'une des fonctions φ_n devient infinie. Par conséquent $F(z)$ est une fonction analytique telle que la proposition III l'exige.

Ajoutons que les remarques faites à la fin de la démonstration de la proposition I peuvent s'appliquer aussi à la proposition III. D'ailleurs, si, d'une part, le domaine ouvert D de la proposition I est connexe et si, d'autre part, R est contenu dans une surface de Riemann fermée[5]), les propositions I et III ne diffèrent que par le nombre des pôles de φ_n et ψ_n, extérieurs à D. Du reste, la proposition III est vraie même si l'on remplace la surface de Riemann R par un nombre quelconque, fini ou infini dénombrable, de surfaces de Riemann ouvertes et sans points communs.[6])

11. Une extension du théorème de Weierstrass à une surface de Riemann ouverte quelconque, dans le sens des considérations précédentes, est bien possible. Les facteurs de la forme

$$\left(1-\frac{z}{a}\right)^{\mu}e^{g(z)}, \tag{3}$$

qui figurent dans les produits de Weierstrass seront remplacés par des fonctions transcendentes dont les surfaces de Riemann seront des surfaces fermées. Or, une fonction dont le domaine d'existence est une surface de

[5]) Voir la remarque à la fin du nº 6.

[6]) Voir à ce propos nos théorèmes généraux dans [6], pp. 21—23.

Riemann ouverte R quelconque et qui, étant régulière dans R, possède des zéros donnés, peut s'obtenir également comme limite d'une suite uniformément convergente de fonctions *algébriques*. Considérons d'abord l'existence d'une telle suite.

PROPOSITION IV. *Soit R une surface de Riemann ouverte quelconque et $\{\tilde{a}_\nu\}$ une suite de points de R ne s'accumulant nulle part à l'intérieur de R, mais s'accumulant en chaque point de la frontière de R, en tant que R possède une frontière.*

Il existe alors une suite de fonctions algébriques $f_n(z)$ dont les surfaces de Riemann contiennent à la limite la surface R et qui convergent uniformément à l'intérieur de R et définissent ainsi une fonction analytique $F(z)$ uniforme et régulière dans R, possédant R comme domaine d'existence et les points $\tilde{a}_\nu$ comme zéros d'ordres donnés à l'avance.

Démonstration. Soit $\{D_n\}$, $n=0, 1, \ldots$, une suite de domaines ouverts de la surface donnée R, qui l'épuisent normalement et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1} - D_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, telle que $D_{n+1} \subset S_n$ et que ces surfaces contiennent donc à la limite la surface donnée R, et soit $\{m_n\}$ une suite quelconque d'entiers positifs.

D'après le théorème fondamental on peut former une fonction algébrique $f_1(z)$ dont la surface de Riemann est S_1, régulière dans D_1, où elle a le point $\tilde{a}_1$ comme zéro d'ordre m_1 et qui n'a à l'extérieur de D_1 qu'un seul pôle en un point quelconque, soit $\tilde{b}_1$.

D'après le lemme 5 on peut former une fonction algébrique $f_2(z)$ dont la surface de Riemann est S_2, régulière dans D_2 où elle a les points $\tilde{a}_1$ et $\tilde{a}_2$ comme zéros d'ordres m_1 et m_2, qui n'a à l'extérieur de D_2 qu'un seul pôle, soit $\tilde{b}_2$, et qui est en outre telle que

$$|f_2(z) - f_1(z)| < \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \tilde{z} \in D_1 \subset\subset D_2.$$

Généralement, d'après le lemme 5, il existe une fonction algébrique $f_n(z)$, $n=2, 3, \ldots$, dont la surface est S_n, régulière dans D_n, où elle a les points $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, comme zéros d'ordres respectifs m_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, qui n'a à l'extérieur de D_n qu'un seul pôle, soit $\tilde{b}_n$ (sur S_n) et qui est en outre telle que

$$|f_{n+1}(z) - f_n(z)| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \quad \tilde{z} \in D_{n-1} \subset\subset D_n.$$

Nous obtenons ainsi une suite $\{f_n\}$ uniformément convergente dans tout domaine Δ complètement intérieur à R. En effet, en désignant par ε un nombre positif arbitrairement petit, il existe un entier positif n_0 tel qu'on a pour $n > n_0$ à la fois $\Delta \subseteq D_n$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$ et par conséquent (comme à la page 107):

$$|f_{n+r} - f_n| < \varepsilon, \quad \tilde{z} \in \Delta.$$

La suite des fonctions algébriques $\{f_n\}$ définit ainsi une fonction $F(z)$ régulière dans tout son domaine d'existence, celui-ci étant identique à la surface de Riemann ouverte R. La fonction $F(z)$ a évidemment chaque point $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, comme zéro d'ordre m_ν. Or, il n'est pas exclu que $F(z)$ ait d'autres zéros encore.

Lorsque R est un domaine ouvert *d'une surface de Riemann fermée S*, c. à d. si $R \subset S$, la proposition IV donne une suite uniformément convergente de fonctions algébriques $F(z)$ de la même surface, régulières dans R et possédant R comme domaine d'existence. La frontière de R est l'ensemble dérivé de $\{\tilde{a}_\nu\}$.

Dans le cas où R se réduit au *plan*, la proposition IV donne une suite uniformément convergente de fonctions *rationnelles*, qui définit dans un domaine ouvert quelconque du plan une fonction régulière dans ce domaine, possédant ce domaine comme domaine d'existence. Cette fonction a des *zéros d'ordres donnés* dans une suite de points *donnés*, qui s'accumulent en tout point de la frontière de ce domaine et là seulement.

12. Avant de passer à l'extension proprement dite du théorème de Weierstrass aux surfaces de Riemann ouvertes, donnons d'abord une démonstration indépendante du lemme suivant, lequel établit l'existence de certaines fonctions qui généralisent les facteurs (3) de Weierstrass.

LEMME 6. *Étant donnés des points quelconques $\tilde{a}_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l$, et $\tilde{c}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, d'une surface de Riemann fermée S, il existe une fonction analytique dont la surface de Riemann est S, qui a pour seuls zéros les points $\tilde{a}_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l$, l'ordre de chacun étant donné à l'avance, et qui est régulière sur toute la surface S, à l'exception des point $\tilde{c}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, ceux-ci étant singuliers essentiels.*

Démonstration. Soient m_λ les entiers positifs donnés à l'avance. Nous construisons une fonction algébrique $\alpha(z)$ dont la surface est S et qui possède aux points $\tilde{a}_\lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l$, et $\tilde{c}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, et de même aux points $z = \infty$ une valeur infinie ou nulle, à savoir:

1° Si $a_\lambda \neq \infty$ et si c'est un point de ramification d'ordre $s - 1$, supposons que ce soit un pôle[7]) dont l'ordre est s, et que le premier

[7]) Au sens élargi du mot, adopté dans la théorie des fonctons algébriques.

coefficient dans sa partie principale soit m_λ/s, c. à d. qu'on ait autour de $\tilde{a}_\lambda$

$$\alpha(z) = \frac{m_\lambda/s}{z-a_\lambda} + \frac{A_{n-1}}{(z-a)^{\frac{s-1}{s}}} + \ldots + \frac{A_1}{(z-a_\lambda)^{\frac{1}{s}}} + P[(a-z_\lambda)^{\frac{1}{s}}],$$

où $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont des coefficients quelconques et $P(t)$ désigne une fonction régulière en $t=0$. Si $\tilde{a}_\lambda$ n'est pas un point de ramification, posons dans ce qui précède $s=1$, c. à d. supposons qu'on ait autour de $\tilde{a}_\lambda$

$$\alpha(z) = \frac{m_\lambda}{z-a_\lambda} + P(z-a_\lambda).$$

Si $a_\lambda = \infty$ et si c'est un point de ramification d'ordre $s-1$, supposons que ce soit un zéro d'ordre s et qu'on ait autour de $\tilde{a}_\lambda$

$$\alpha(z) = -\frac{m_\lambda/s}{z} + \frac{A_{n-1}}{z^{1+\frac{1}{s}}} + \ldots + \frac{A_1}{z^{2-\frac{1}{s}}} + \frac{1}{z^2}P(z^{-\frac{1}{s}}).$$

Si ce n'est pas un point de ramification, posons dans le voisinage de $\tilde{a}_\lambda$

$$\alpha(z) = -\frac{m_\lambda}{z} + \frac{1}{z^2}P(z^{-1}).$$

2° En tout point $z=\infty$ différent des $\tilde{a}_\lambda$ et $\tilde{c}_\mu$ et qui est un point de ramification d'ordre $s-1$, la fonction $\alpha(z)$ doit avoir un zéro d'ordre $2s$. Si ce n'est pas un point da ramification, posons $s=1$, c. à. d. le zéro doit être du second ordre.

3° Si $c_\mu \neq \infty$ supposons que ce soit un pôle dont l'ordre h, variant avec μ, est plus grand que $s\,(s \geqslant 1)$, et en outre suffisamment grand pour que la condition imposée par le genre de la surface S soit remplie. Donc on doit avoir

$$\alpha(z) = \frac{A_h}{(z-c_\mu)^{\frac{h}{s}}} + \frac{A_{h-1}}{(z-c_\mu)^{\frac{h-1}{s}}} + \ldots + \frac{A_1}{(z-c_\mu)^{\frac{1}{s}}} + P(z).$$

Si $c_\mu = \infty$ supposons que $\alpha(z)$ ait en $\tilde{c}_\mu$ un pôle d'ordre h quelconque, suffisamment grand pour qu'une telle fonction existe, et qu'on ait autour de $\tilde{c}_\lambda$

$$\alpha(z) = A_h z^{\frac{h}{s}} + A_{h-1} z^{\frac{h-1}{s}} + \ldots + A_1 z^{\frac{1}{s}} + P(z^{-\frac{1}{s}}).$$

Considérons la fonction

$$J(z) = \int_{z_0}^{z} \alpha(z)\,dz,$$

où $\tilde{z}_0$ est un point différent des $\tilde{a}_\lambda$ et $\tilde{c}_\mu$ et la courbe d'intégration ne passe pas par ces points. Grâce aux zéros de $\alpha(z)$ en $z=\infty$ la fonction $J(z)$ est finie pour tout $\tilde{z} \neq \tilde{a}_\lambda$, $\tilde{c}_\mu$, même si $z=\infty$. Donc elle est régulière sur S, excepté aux points $\tilde{a}_\lambda$ et $\tilde{c}_\mu$, mais elle n'est pas uniforme sur S.

En effet, on a pour $s \geqslant 1$, dans le voisinage de $\tilde{a}_\lambda$, si $a_\lambda \neq \infty$

$$J(z) = \frac{m_\lambda}{s} \log (z - a_\lambda) + Q\left[(z-a_\lambda)^{\frac{1}{s}}\right],$$

et si $a_\lambda = \infty$

$$J(z) = -\frac{m_\lambda}{s} \log z + Q\left(z^{-\frac{1}{s}}\right),$$

où $Q(t)$ désigne une fonction régulière en $t=0$.

Dans le voisinage de c_μ on a, si $c_\mu \neq \infty$

$$J(z) = \frac{A_h}{1-\frac{h}{s}} \cdot \frac{1}{(z-c_\mu)^{\frac{h}{s}-1}} + \frac{A_{h-1}}{1-\frac{h-1}{s}} \cdot \frac{1}{(z-c_\mu)^{\frac{h-1}{s}-1}} + \ldots,$$

et si $c_\mu = \infty$

$$J(z) = \frac{A_h}{1+\frac{h}{s}} z^{\frac{h}{s}+1} + \frac{A_{h-1}}{1+\frac{h-1}{s}} z^{\frac{h-1}{s}+1} + \ldots$$

Considérons la fonction $\varphi(z) = e^{J(z)}$. On a dans le voisinage de $\tilde{a}_\lambda$, si $a_\lambda \neq \infty$

$$\varphi(z) = (z-a_\lambda)^{\frac{m_\lambda}{s}} \cdot e^Q,$$

et si $a_\lambda = \infty$

$$\varphi(z) = z^{-\frac{m_\lambda}{s}} \cdot e^Q$$

où Q est régulière en $\tilde{a}_\lambda$ et où $s=1$ ou $s>1$ suivant que c'est un point simple ou un point de ramification d'ordre $s-1$. Donc la fonction $\varphi(z)$ a le point a_λ comme zéro d'ordre m_λ.

Dans le voisinage de $\tilde{c}_\mu$ on a, si $c_\mu \neq \infty$

$$\varphi(z) = e^{\frac{B}{(z-c_\mu)^\beta}} \times \ldots$$

et si $c_\mu = \infty$

$$\varphi(z) = e^{B' z^{\beta'}} \times \ldots,$$

où $\beta > 0$ et $\beta' > 0$, donc ces deux fonctions exponentielles, qui figurent comme facteurs, ont le point $\tilde{c}_\mu$ comme singularité essentielle et, par conséquent, la fonction $\varphi(z)$ l'a aussi, pour tout μ. À tout point de S, différent des $\tilde{c}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, la fonction φ est régulière et différente de zéro.

En élevant la fonction $J(z)$ à l'exposant, elle cesse d'avoir des points logarithmiques, mais elle reste multiforme, car en entourant les rétrosections de S, paraissent certains modules de périodicité de $J(z)$. Or, en soustrayant de $J(z)$ une intégrale abélienne de la première espèce, soit $K(z)$, qui possède les mêmes modules de périodicité, cette multiformité disparaît. Donc la fonction

$$f(z) = e^{J(z) - K(z)}$$

est uniforme sur S, en restant régulière partout, sauf aux points essentiels $\tilde{c}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, et différente de zéro, à l'exception des points $\tilde{c}_\lambda$, où elle a des zéros d'ordres respectifs m_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, l$.[8])

13. Démontrons maintenant une proposition analogue à la proposition I et qui généralise le théorème envisagé de Weierstrass, en l'appliquant aux surfaces de Riemann fermées:

PROPOSITION V. *Soit D un domaine ouvert quelconque d'une surface de Riemann fermée S, non identique à S, et soit $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, une suite de points quelconques de D, s'accumulant en chaque point de la frontière de D et là seulement.*

Il existe alors une fonction analytique $F(z)$, uniforme sur S, possédant D comme domaine d'existence et régulière dans D, où elle a les points $\tilde{a}_\nu$ et ceux-ci seulement, comme zéros, leurs ordres étant donnés à l'avance.

Cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\, e^{-\psi_n(z)}, \tag{4}$$

où φ_n désigne pour tout n une fonction analytique de la surface S, possédant $\tilde{a}_n$ comme zéro unique d'ordre donné et qui est régulière sur toute la surface S, à l'exception d'un point essentiel, situé à l'extérieur de D; ψ_n désigne une fonction algébrique de S, régulière dans D et possédant dans chacun des continus complémentaires de D un seul pôle.

---

[8]) Dans [2] Mlle. Florack a démontré d'une manière semblable l'existence des fonctions „élémentaires" d'une surface de Riemann ouverte.

Démonstration. D'après le lemme 6 on peut former pour tout n une fonction de la surface S, soit $\varphi_n(z)$, qui possède le point $\tilde{a}_n$ comme zéro unique dont l'ordre est donné et qui est règulière sur toute la surface, à l'exception d'un point quelconque extérieur à D, soit $\tilde{c}_n$, qui est un point essentiel.

Soit $\{D_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de domaines ouverts de S, qui épuisent normalement le domaine D et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1} - D_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Puisque φ_n n'a pas de zéro dans D_n, la fonction $\log \varphi_n$ est, elle aussi, régulière et uniforme dans D_n. Donc, d'après le lemme 1, on peut former pour tout n une fonction algébrique $\psi_n(z)$ de S, régulière dans D_n et telle qu'on ait pour une suite de nombres positifs ε_n décroissant vers zéro:

$$|\log \varphi_n - \psi_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1},$$

pour tous les $\tilde{z} \in D_{n-1} \subset\subset D_n$.

La fonction $\varphi_n\, e^{-\psi_n}$ est également régulière et uniforme sur S, à l'exception du point essentiel $\tilde{c}_n$, et son seul zéro est $\tilde{a}_n$, l'ordre de celui-ci étant donné à l'avance.

Ceci étant, soit Δ n'importe quel domaine complètement intérieur à D. En désignant par ε un nombre positif arbitrairement petit, il existe un n_0 tel qu'on a pour $n > n_0$ à la fois $\Delta \subseteq D_{n-1}$ et $\varepsilon_n < \varepsilon$, par conséquent

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r} (\log \varphi_\nu - \psi_\nu)\right| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r} |\log \varphi_\nu - \psi_\nu| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+r+1}$$

et d'autant plus

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r} (\log \varphi_\nu - \psi_\nu)\right| < \varepsilon.$$

Donc, d'après le critère bien connu de convergence des produits infinis, le produit (4) est uniformément convergent à l'intérieur de D. Par conséquent $F(z)$ est une fonction telle que la proposition V l'exige.

Évidemment, si la surface S était une surface recouvrante, il suffirait de supposer que l'un des points $\tilde{a}_\nu$ soit le seul dont l'affixe a une certaine valeur a_ν.

14. Voici enfin la généralisation correspondante du théorème de Weierstrass pour une surface de Riemann ouverte quelconque.

PROPOSITION VI. *Soit R une surface de Riemann ouverte quelconque et $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, une suite de points de R, ne s'accumulant nulle part à* *l'intérieur de R, mais s'accumulant en chaque point de la frontière de R, en tant que R possède une frontière. Soit en outre $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, contenant à la limite la surface R.*

Il existe alors une fonction analytique $F(z)$, uniforme et régulière sur la surface de Riemann R, possédant R comme domaine d'existence et les points $\tilde{a}_\nu$ et ceux seulement, comme zéros d'ordres donnés à l'avance.

Cette fonction peut s'écrire sous la forme

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\, e^{-\psi_n(z)}, \tag{5}$$

où φ_n et ψ_n désignent pour tout n deux fonctions analytiques de la surface S_n, la fonction φ_n possédant le point $\tilde{a}_n$ comme zéro unique et d'ordre donné et ψ_n étant une fonction algébrique. Les singularités des φ_n, qui sont des points essentiels, s'annulent mutuellement deux à deux dans les termes consécutifs du produit infini, et de même les pôles des ψ_n.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\{D_n\}$ une suite de domaines ouverts, épuisant normalement la surface R et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1} - D_n$, et soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, telles que $D_{n+3} \subset S_n$, ces surfaces contenant à la limite la surface R. D'après le lemme 6 on peut former pour tout n une fonction de la surface S_n, soit $\varphi_n(z)$, possédant $\tilde{a}_n$ comme zéro unique, d'ordre donné, et qui est régulière sur toute cette surface, à l'exception de deux points $\tilde{c}_n$ et $\tilde{c}_{n+1}$, situés dans $D_{n+3} - D_{n+1}$ et qui sont des points essentiels. La fonction φ_1 doit avoir exceptionnellement un seul point essentiel, à savoir $\tilde{c}_2$.

Puisque φ_n n'a pas de zéros dans D_n, la fonction $\log \varphi_n$ est, elle aussi, régulière et uniforme dans D_n. Donc, d'après le lemme 1, on peut former pour tout n une fonction algébrique $\psi_n(z)$ de la surface S_n, régulière dans D_{n+1} et telle qu'on ait pour une suite de nombres positifs ε_n décroissant vers zéro

$$|\log \varphi_n(z) - \psi_n(z)| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \quad \tilde{z} \in D_{n-1} \Subset D_n.$$

Supposons en outre que les fonctions ψ_n ont leur pôles dans une suite double de points $\{\tilde{d}_{i,n}\}, i=1,2,\ldots,i_n,\ n=2,3,\ldots,$ telle que les points $\tilde{d}_{i,n},\ i=1,2,\ldots,i_n$ soient dans $D_{n+2}-D_{n+1}$, un seul dans chacun des domaines connexes séparés dont est composé $D_{n+2}-D_{n+1}$. Plus exactement, la fonction ψ_n doit avoir les pôles $\tilde{d}_{i,n},\ i=1,2,\ldots,i_n$ et $\tilde{d}_{i,n+1},\ i=1,2,\ldots,i_{n+1}$. En désignant la partie principale de ψ_n au pôle $\tilde{d}_{i,n+1}$ par $v_{i,n+1}$, celle de ψ_{n+1} au même pôle doit être $-v_{i,n+1}$, $i=1,2,\ldots,i_{n+1}$. Seule la fonction ψ_1 ne doit avoir que les pôles $\tilde{d}_{i,2},\ i=1,2,\ldots,i_2$.

La fonction $\psi_n e^{-\psi_n}$ est pour tout n régulière et uniforme dans D_{n+1}, son seul zéro étant $\tilde{a}_n$. À l'extérieur de D_{n+1} elle possède les points essentiels $\tilde{c}_n$ et $\tilde{c}_{n+1}$ de φ_n et les points essentiels $\tilde{d}_{i,n}$, $i=1,2,\ldots,i_n$, et $\tilde{d}_{i,n+1}$, $i=1,2,\ldots,i_{n+1}$ de $e^{-\psi_n}$.

Or, en désignant par n_0, Δ et ε toujours les mêmes entités, nous avons

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+r}(\log\varphi_\nu-\psi_\nu)\right|\leqslant\sum_{\nu=n}^{n+r}|\log\varphi_\nu-\psi_\nu|<\varepsilon_n-\varepsilon_{n+r+1},$$

donc

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\nu+r}(\log\varphi_\nu-\psi_\nu)\right|<\varepsilon,\quad z\in\Delta.$$

Donc le produit infini (5) est uniformément convergent à l'intérieur de R, par conséquent il représente une fonction dans R, analytique et qui satisfait aux conditions de la proposition VI.

Pour être sûr que la surface de Riemann de $F(z)$ n'est pas une surface plus simple que R et dont R serait une surface recouvrante, il suffit que l'un des points $\tilde{a}_n$ soit le seul dont l'affixe a une certaine valeur $\tilde{a}_\nu$. Notons que la surface R peut être remplacée par un ensemble fini ou infini dénombrable de surfaces de Riemann ouvertes, sans grandes altérations dans la démonstration.

15. Jusqu'ici nous avons construit sur des surfaces de Riemann ouvertes, des fonctions analytiques qui possèdent une infinité de pôles ou de zéros. Or, on pourrait construire aussi bien des fonctions qui possèderaient un nombre limité de zéros ou des pôles. Si nous désirons qu'en même temps la surface de Riemann envisagée soit tout le domaine d'existence de la fonction construite, il faut supposer que cette surface soit inextensible, entendant par là qu'il n'existe pas de surface de Riemann plus large, dont elle ferait partie. Ceci étant supposé, considérons par ex. la proposition II, en envisageant une surface de Riemann ouverte R et une suite finie de ses points, $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu=1,2,\ldots,N$. Nous démontrons la proposition suivante:

PROPOSITION VII. *Soit R une surface de Riemann ouverte, inextensible et $\{\tilde{a}_\nu\}$, $\nu=1,2,\ldots,N$, une suite finie de points de R.*

Il existe une suite de fonctions algébriques $\{f_n(z)\}$ dont les surfaces de Riemann contiennent à la limite la surface R, qui convergent à l'intérieur de $\{R-\tilde{a}_\nu\}$ uniformément et qui définissent ainsi une fonction analytique $F(z)$ uniforme et méromorphe sur R, possédant R comme domaine d'existence et *les points $\tilde{a}_\nu$, et ceux-ci seulement, comme pôles avec des parties principales données à l'avance. La fonction $f_n(z)$ a pour $n < N$ les points $\tilde{a}_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, n$, et pour $n \geqslant N$ les points $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, comme pôles uniques, avec les parties principales données correspondantes.*

Démonstration. Soit $\{D_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, une suite de domaines ouverts de R, qui l'épuisent normalement et cela de telle sorte que $\tilde{a}_n \in D_{n+1} - D_n, n = 1, 2, \ldots, N$, et soit $\{S_n\}$ une suite de surfaces de Riemann fermées, telles que $D_{n+1} \subset S_n$.

En continuant comme dans la démonstration de la propositon II, formons d'abord les premiers N termes de la suite $\{f_n\}$, c. à d. certaines fonctions algébriques telles que f_n possède la surface S_n, qu'elle ait pour pôles dans D_n les points $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ et ces points seulement, avec les parties principales données, puis un pôle unique à l'extérieur de D_n, soit $\tilde{b}_n$, et qu'on ait:

$$(6) \qquad |f_{n+1} - f_n| < \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \quad z \in D_{n-1} \subset\subset D_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Pour $n \geqslant N$ désignons par f_n une fonction algébrique de S_n qui n'a que les points $\tilde{a}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, pour pôles dans D_n et un pôle unique à l'extérieur de D_n, en $\tilde{b}_n$, les relations (6) restant en vigueur. L'existence de ces fonctions-ci est assurée par le lemme 3.

Par des altérations analogues on obtiendrait les propositions qui correspondraient aux propositions III, IV et VI. Les propositions III et VI, altérées ainsi, contiennent par ex. le cas d'une fonction analytique dont le domaine d'existence est une surface ouverte inextensible quelconque et qui possède un pôle unique, ou bien un zéro unique et aucun pôle.

(Reçu le 12 mai 1954)

RÉFÉRENCES

[1] H. Behnke und K. Stein — Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. *Math. Ann.* **120** (1948).

[2] H. Florack — Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flächen. *Schriftenreihe des Math. Inst.*, Münster (1948).

[3] P. Koebe — Fonctions potentielles et fonctions analytiques ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque (fini ou infini) de feuillets. *C. R. de l'Acad. Paris* (1909).

[4] M. Radojčić — Sur l'approximation des fonctions analytiques multiformes par les fonctions algébriques, *C. R. de l'Acad.*, Paris, t. **185** (1927).

[5] ———— Un mode de représentation analytique des fonctions multiformes *Glas Srp. Akad. Nauka*, t. **130** (1928) (en serbe).

[6] ———— Les fonctions analytiques représentées par les suites convergentes de fonctions algébriques, Thèse, Beograd 1928 (en serbe).