SUR LA VALEUR ASYMPTOTIQUE D'UNE CLASSE DES INTÉGRALES DÉFINIES

par

S. ALJANČIĆ, R. BOJANIĆ et M. TOMIĆ (Beograd)

SOMMAIRE — Comportement asymptotique de l'intégrale $\int_a^b f(t)\, L(\lambda t)\, dt$, $\lambda \to \infty$, $L(t)$ étant une fonction à croissance lente.

1. *INTRODUCTION.* Dans la présente note nous allons étudier le comportement asymptotique de la fonction $\Phi(\lambda)$ définie par l'intégrale

$$\Phi(\lambda) = \int_a^b f(t)\, L(\lambda t)\, dt, \quad 0 \leqslant a < b \leqslant \infty, \quad \lambda \to \infty,$$

où $f(t)$ représente une fonction intégrable au sens de Lebesgue, tandis que $L(t)$ est une *fonction à croissance lente*, c-à-d. une fonction définie pour $t > 0$, positive, continue et telle qu'on ait

$$\frac{L(\lambda t)}{L(\lambda)} \to 1, \quad \lambda \to \infty \quad \text{pour chaque} \quad t > 0 \quad \text{fixe}, \tag{1}$$

(voir J. Karamata [1, 2]). Certaines propriétés des fonctions à croissance lente, utilisées plus loin, seront mentionnées au № 3.

Le but de cette note est d'examiner sous quelles conditions a lieu la relation asymptotique

$$\Phi(\lambda) \sim L(\lambda) \int_a^b f(t)\, dt, \quad \lambda \to \infty, \tag{2}$$

en supposant la convergence de l'intégrale au second membre de (2) ou de même en supposant qu'elle n'est que $(C, 1)$ - sommable.

La relation (2) est presque triviale dans l'intervalle $0 < a < b < \infty$, en vertu de la propriété fondamentale (i) (№ 3) des fonctions à croissance lente. Nous considérons séparément deux cas: $a = 0$, $b < \infty$ et $a > 0$, $b = \infty$. Les théorèmes correspondants pour l'intervalle $(0, \infty)$ résultent comme une combinaison de ces deux cas.

2. *RÉSULTATS*[1]

A. L'intervalle $(0, b)$, $b < \infty$.

THÉORÈME 1. *Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente, et soit l'intégrale*

$$\int_{+0}^{b} t^{-\eta} |f(t)| \, dt$$

convergente pour un $\eta > 0$.

Alors,

$$\int_{+0}^{b} f(t) L(\lambda t) \, dt \sim L(\lambda) \int_{+0}^{b} f(t) \, dt, \quad \lambda \to \infty,$$

en supposant l'existence de l'intégrale qui figure au premier membre.

B. L'intervalle (a, ∞), $a > 0$.

THÉORÈME 2. *Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente, et soit l'intégrale*

$$\int_{a}^{\infty} t^{\eta} |f(t)| \, dt$$

convergente pour un $\eta > 0$.

Alors, l'intégrale

$$\int_{a}^{\infty} f(t) L(\lambda t) \, dt$$

existe et on a

$$\int_{a}^{\infty} f(t) L(\lambda t) \, dt \sim L(\lambda) \int_{a}^{\infty} f(t) \, dt, \quad \lambda \to \infty.$$

THÉORÈME 3. *Si $L(t)$ représente une fonction à croissance lente qui décroît d'une façon monotone, de la convergence de l'intégrale*

$$\int_{0}^{\infty} f(t) \, dt$$

résultent les deux assertions du théorème 2.

---

[1]) Si la propriété (1) a lieu pour $\lambda \to +0$, tous les théorèmes donnés au № 2 restent valables (relativement au passage à la limite $\lambda \to +0$), en remplaçant l'intervalle $(0, b)$ par (a, ∞) et réciproquement, en tenant compte aussi du fait que les conditions de monotonie (etc.) de $L(t)$ sont à remplacer d'une façon adequate.

THÉORÈME 4. *Si $L(t)$ représente le produit de deux fonctions monotones, à croissance lente, alors de la convergence de l'intégrale*

$$\int_a^{\infty} t^{\eta} f(t)\,dt$$

pour un $\eta > 0$ *résultent les assertions du théorème 2.*

THÉORÈME 5. *Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente, monotone, convexe et telle qu'on ait*

$$L(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Soit de plus

$$\int_a^{x} f(t)\,dt = O(1), \quad x \to \infty,$$

et

$$\int_a^{x} \left(1 - \frac{t}{x}\right) f(t)\,dt \to A, \quad x \to \infty,$$

alors de l'existence de l'intégrale

$$\int_a^{\infty} f(t)\,L(\lambda t)\,dt,$$

résulte

$$\int_a^{\infty} f(t)\,L(\lambda t)\,dt \sim A\,L(\lambda), \quad \lambda \to \infty,$$

C. L'intervalle $(0, \infty)$.

THÉORÈME 6. *Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente et soit l'intégrale*

$$\int_{+0}^{\infty} t^{\varkappa} \,|\, f(t) \,|\, dt$$

convergente pour $-\alpha < \varkappa < \beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$

Alors on a

$$\frac{1}{\lambda} \int_{+0}^{\infty} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) L(t)\,dt \sim L(\lambda) \int_{+0}^{\infty} f(t)\,dt, \quad \lambda \to \infty.$$

THÉORÈME 7. *Soit $L(t)$ le produit de deux fonctions monotones à croissance lente. Alors on a pour $0 < \alpha < 2$*

$$(3)\qquad \int_0^\infty L(t)\, t^{-\alpha} \sin xt\, dt \sim \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}\, \frac{1}{x^{1-\alpha}}\, L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0.$$ [2]

THÉORÈME 8. *Soit $L(t)$ une fonction à croissance lente, monotone et convexe à partir d'un $t \geqslant t_0$, et telle qu'on ait*

$$L(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Alors on a[3]

$$(4)\qquad \int_0^\infty L(t) \sin xt\, dt \sim \frac{1}{x} L\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +0.$$

Théorème 6 résulte d'une combinaison des théorèmes 1 et 2. Pour les fonctions $f(t)$ d'un type spécial, ce théorème contient les théorèmes de K. Knopp ([3], p. 235 et [4]) relatifs au comportement asymptotique ($\lambda \to \infty$) des C_k, H_k et A-transformations de la fonction $L(t)$[4], c-à-d. des transformations de $L(t)$ définies par

$$\frac{k}{\lambda} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} L(t)\, dt, \quad \frac{1}{\Gamma(k)\lambda} \int_0^s \left(\log \frac{\lambda}{t}\right)^{k-1} L(t)\, dt,$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-t/\lambda} L(t)\, dt.$$

Les théorèmes 7 et 8 sont des conséquences immédiates des théorèmes 1 et 4 respectivement 1 et 5.

---

[2]) Un théorème de ce genre se trouve dans le livre de Titchmarsh ([5], p. 172), où $L(t)$ représente une fonction à variation bornée dans $(0, \infty)$, telle qu'il existe $\lim_{t=\infty} L(t)$.

[3]) Dans ce cas l'existence de l'intégrale qui figure dans (4) résulte de $L(t) \downarrow 0$ et du fait que $f(t) = \sin t$.

[4]) J. Karamata [1, 2] a appelé $p(t)$ une fonction à croissance régulière, lorsque $p(\lambda t)/p(\lambda)$ tend pour $\lambda \to \infty$ vers une limite bien définie $h(t)$ (On constate alors, que cette fonction $h(t)$ est nécessairement égale à t^α, avec α réel, pour chaque $t > 0$ fixe). Les théorèmes de Knopp paraissent plus généraux que les nôtres, étant valables pour C_k, H_k et A-transformations d'une fonction à croissance régulière. Cependant, étant donné que, pour t suffisamment grand, on a $p(t) = t^\alpha L(t)$, de notre théorème 6 résulteront ces théorèmes de Knopp, en remplaçant $f(t)$ par $t^\alpha f(t)$, et en prenant alors $f(t)$ comme le noyau des transformations considérées.

En effet, posons dans l'intégrale qui figure dans (3) $x = 1/\lambda$ et faisons le changement de variable $t/\lambda \mid t$. L'assertion du théorème 7 se réduit alors à

$$\int_0^\infty L(\lambda t)\, t^{-\alpha} \sin t\, dt \sim \Gamma(1-\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} L(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Étant donné que, dans l'intervalle $(0, 1)$, pour $\alpha < 2$, sont remplies les conditions du théorème 1, ainsi que dans $(1, \infty)$, pour $\alpha > 0$, les conditions du théorème 4, on a

$$\int_0^1 L(\lambda t)\, t^{-\alpha} \sin t\, dt = \int_0^1 + \int_1^\infty \sim$$

$$\sim L(\lambda) \int_0^1 t^{-\alpha} \sin t\, dt + L(\lambda) \int_1^\infty t^{-\alpha} \sin dt =$$

$$\sim L(\lambda) \int_0^\infty t^{-\alpha} \sin t\, dt,$$

C. Q. F. D.

De la même manière, l'assertion du théorème 8 se réduit à

$$\int_0^\infty L(\lambda t) \sin t\, dt \sim L(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Dans l'intervalle $(0, 1)$ sont remplies les conditions du théorème 1. Or, de

$$\left| \int_a^\infty \sin t\, dt \right| \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right) \sin t\, dt \to 1, \quad x \to \infty,$$

résultent les conditions du théorème 5, d'où finalement

$$\int_0^\infty L(\lambda t) \sin t\, dt \sim L(\lambda) \int_0^1 \sin t\, dt + L(\lambda)^{(C)}\int_1^\infty \sin t\, dt =$$

$$\sim L(\lambda)^{(C)}\int_0^\infty \sin t\, dt =$$

$$\sim L(\lambda),$$

où ${}^{(c)}\int_a^\infty$ signifie la somme de Cesàro d'ordre 1 de l'intégrale $\int_a^\infty$.

Au № 4 nous donnerons les démonstrations des théorèmes 1—5.

Nous remarquons en outre que nous avons obtenu d'abord les théorèmes 7 et 8. C'est M. Karamata qui nous a suggéré les formes générales de ces théorèmes. Nous lui devons aussi quelques autres perfectionnements dans leurs démonstrations.

3. *PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS À CROISSANCE LENTE.* Nous aurons besoin dans les démonstrations des théorèmes 1—5 de plusieurs propriétés des fonctions à croissance lente. Les propriétés (i - iv) sont connues (v. J. Karamata [1, 2]). Mais il semble que les propriétés(v) et (vi) ne soient connues, aussi donnerons nous leurs démonstrations à la fin de ce paragraphe.

(i) *Le passage à la limite* (1) *qui, en réalité, définit la classe de fonctions à croissance lente, a lieu uniformément par rapport à t dans chaque intervalle* (a, b), $a > 0$, $b < \infty$.

(ii) *Si* $L^*(t) \sim L(t)$, $t \to \infty$, *alors* $L^*(t)$ *est de même une fonction à croissance lente.*

(iii) *Si* $\gamma > 0$, *on a*

$$t^{\gamma} L(t) \to \infty, \quad t^{-\gamma} L(t) \to 0, \quad t \to \infty.$$

(iv) *Soit* $\alpha > 0$, *et posons*

$$L_1(x) = x^{-\alpha} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant x} \{t^{\alpha} L(t)\}, \quad L_2(t) = x^{\alpha} \operatorname*{Max}_{x \leqslant t < \infty} \{t^{-\alpha} L(t)\}.$$

Alors $L_k(t) \sim L(t)$, $t \to \infty$ $(k = 1, 2)$, *et d'après* (ii) $L_k(t)$, $k = 1,2$ *sont aussi des fonctions à croissance lente. Évidemment* $x^{\alpha} L_1(x)$ *croît tandis que* $x^{-\alpha} L_2(t)$ *décroît, les deux d'une façon monotone.*

(v) *Soit* $L(t)$ *le produit de deux fonctions monotones, à croissance lente,* $\overline{L}(t)$ *et* $\underline{L}(t)$. *Alors on a pour* $\eta > 0$,

$$\int_{\Delta}^{\infty} |d\{t^{-\eta} L(\lambda t)\}| < M \Delta^{-\eta} L(\lambda \Delta),$$

où M *ne dépend pas de* λ *et* Δ.

D é m o n s t r a t i o n. Soit, par exemple, $\overline{L}(t)$ une fonction croissante et $\underline{L}(t)$ une fonction décroissante. On a

$$\int_{\Delta}^{\Delta_1} |d\{t^{-\eta} L(\lambda t)\}| \leqslant \eta \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta-1} L(\lambda t)\, dt + \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta} |d L(\lambda t)| =$$

$$\leqslant \eta \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta-1} L(\lambda t)\, dt + \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta} \underline{L}(\lambda t) d\overline{L}(\lambda t) +$$

$$+ \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta} \overline{L}(\lambda t)\, d\{-\underline{L}(\lambda t)\} =$$

$$\leqslant \eta J_1 + J_2 + J_3.$$

Nous allons évaluer ces trois intégrales. On trouve pour J_1, en vertu de la propriété (iv),

$$J_1 \leqslant \int_{\Delta}^{\infty} t^{-\eta-1} L(\lambda t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^{\eta/2} \int_{\Delta}^{\infty} t^{-1-\eta/2} (\lambda t)^{-\eta/2} L(\lambda t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^{\eta/2} \operatorname*{Max}_{\Delta \leqslant t < \infty} \{(\lambda t)^{-\eta/2} L(\lambda t)\} \cdot \int_{\Delta}^{\infty} t^{-\eta/2-1}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\eta} \Delta^{-\eta} L_2(\lambda\Delta),$$

où $L_2(t) \sim L(t)$, $t \to \infty$, et par suite

(5) $$J_1 \leqslant \frac{M_1}{\eta} \Delta^{-\eta} L(\lambda\Delta).$$

Pour l'intégrale J_2 on trouve

$$J_2 \leqslant \underline{L}(\lambda\Delta) \int_{\Delta}^{\Delta_1} t^{-\eta}\, d\overline{L}(\lambda t) \leqslant$$

$$\leqslant \underline{L}(\lambda\Delta) \left\{\Delta_1^{-\eta} \overline{L}(\lambda\Delta_1) + \eta \int_{\Delta}^{\infty} t^{-\eta-1} \overline{L}(\lambda t)\, dt \right\},$$

et d'après (5)

$$J_2 \leqslant \Delta_1^{-\eta}\, \overline{L}(\lambda\Delta_1)\, \underline{L}(\lambda\Delta) + M_2 \Delta^{-\eta}\, \overline{L}(\lambda\Delta)\, \underline{L}(\lambda\Delta).$$

Enfin

$$J_3 \leqslant \lambda^{\eta} \max_{\lambda\Delta \leqslant t \leqslant \lambda\Delta_1} \{t^{-\eta}\, \overline{L}(t)\} \int_{\Delta}^{\Delta_1} d\{-\underline{L}(\lambda t)\} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^{\eta} \max_{\lambda\Delta \leqslant t < \infty} \{t^{-\eta}\overline{L}(t)\}\, \underline{L}(\lambda\Delta) =$$

$$\leqslant \Delta^{-\eta}\overline{L}_2(\lambda\Delta)\, \underline{L}(\lambda\Delta) \leqslant$$

$$\leqslant M_3\, \Delta^{-\eta} L(\lambda\Delta).$$

Dès lors on a

$$\int_{\Delta}^{\Delta_1} |\, d\{t^{-\eta} L(\lambda t)\}\,| \leqslant M\, \Delta^{-\eta} L(\lambda\Delta) + \Delta_1^{-\eta}\overline{L}(\lambda\Delta_1)\, \underline{L}(\lambda\Delta),$$

et, en faisant $\Delta_1 \to \infty$, en vertu de la propriété (iii), résulte l'assertion,

(vi) *Si la fonction à croissance lente $L(t)$ admet une dérivée monotone $L'(t)$, alors*

$$\frac{t\, L'(t)}{L(t)} \to 0, \quad t \to \infty.$$

D é m o n s t r a t i o n. De $L(xt)/L(t) \to 1$, $t \to \infty$, résulte que à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un nombre entier $t_0 = t_0(\varepsilon)$ tel que

$$(6) \qquad |\, L(xt) - L(t)\,| < \varepsilon\, L(t), \quad t > t_0 \quad (x > 1).$$

D'autre part on a

$$(7) \qquad |\, L(xt) - L(t)\,| = t(x-1)\, |\, L'(\xi)\,|, \quad t \leqslant \xi \leqslant xt.$$

$|\, L'(t)\,|$ est de même une fonction monotone et par suite elle atteint dans une des extrémités de l'intervalle (t, xt) sa valeur minimale. Donc, d'après (7), on a

$$|\, L(xt) - L(t)\,| \geqslant t(x-1)\, |\, L'(t)\,|,$$

lorsque $|L'(t)|$ croît, ou bien

$$|L(xt) - L(t)| \geqslant t(x-1)|L'(xt)|,$$

lorsque $|L'(t)|$ décroît. En vertu de l'inégalité (6), nous obtenons alors

$$\left|\frac{tL'(t)}{L(t)}\right| < \frac{\varepsilon}{x-1}, \quad t > t_0,$$

respectivement

$$\left|\frac{x\,tL'(xt)}{L(xt)}\right| < \varepsilon\,\frac{x}{x-1}\,\frac{L(t)}{L(xt)}, \quad t > t_0,$$

C. Q. F. D.

4. *DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES* 1—5.

4.1. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME* 1. De la propriété (iv) des fonctions à croissance lente (№ 3) résulte d'abord

$$\left|\int_0^b f(t)\,L(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \lambda^{-\eta}\int_0^b t^{-\eta}\,|f(t)|\,(\lambda t)^{\eta}\,L(\lambda t)\,dt =$$

$$\leqslant \lambda^{-\eta}\max_{0<t\leqslant\lambda b}\{t^{\eta}L(t)\}\int_0^b t^{-\eta}\,|f(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M\,b^{\eta}L_1(\lambda b), \quad \eta > 0,$$

où M ne dépend pas de λ, et $L_1(t)$ est de même une fonction à croissance lente, telle que $L_1(t) \sim L(t)$, $t \to \infty$.

Pour démontrer la relation asymptotique du théorème 1, nous partons de $(0 < \delta < b)$

$$\left|\frac{1}{L(t)}\int_0^b f(t)\,L(\lambda t)\,dt - \int_0^b f(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_\delta^b f(t)\left\{\frac{L(\lambda t)}{L(\lambda)} - 1\right\}dt\right| + \frac{1}{L(\lambda)}\left|\int_0^\delta f(t)\,L(\lambda t)\,dt\right|.$$

La deuxième intégrale au second membre peut être, d'après (8), majorée par

$$M\,\delta^{\eta}\frac{L_1(\delta\lambda)}{L(\lambda)}, \quad \eta > 0 \quad \text{où} \quad L_1(t) \sim L(t), \quad t \to \infty,$$

et en vertu de la propriété (i) des fonctions à croissance lente, on a

$$\limsup_{\lambda=\infty}\left|\frac{1}{L(\lambda)}\int_0^b f(t)\,L(\lambda t)\,dt-\int_\delta^b f(t)\,dt\right|<M\delta^\eta,\quad \eta>0.$$

Le second membre de cette inégalité peut être choisi aussi petit que l'on veut, avec δ suffisamment petit, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

4.2. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME* 2. La convergence (absolue) de l'intégrale $\int_a^\infty f(t)\,L(\lambda t)\,dt$ résulte, en tenant compte de la propriété (iv), de

$$\int_a^\infty |f(t)|\,L(\lambda t)\,dt\leqslant\lambda^\eta\int_a^\infty t^\eta\,|f(t)|\,(\lambda t)^{-\eta}L(\lambda t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\lambda^\eta\max_{a\lambda\leqslant t<\infty}\{t^{-\eta}L(t)\}\int_a^\infty t^\eta|f(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant M\,a^{-\eta}L_2(a\lambda),\quad \eta>0, \tag{9}$$

où $L_2(t)\sim L(t)$, $t\to\infty$, est une fonction à croissance lente, car d'après (iii) $a^{-\eta}L_2(a\lambda)\to 0$, $a\to\infty$.

Pour démontrer la relation asymptotique du théorème 2, nous partons de $(\Delta>a)$

$$\left|\frac{1}{L(\lambda)}\int_a^\infty f(t)\,L(\lambda t)\,dt-\int_a^\Delta f(t)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_a^\Delta f(t)\left\{\frac{L(\lambda t)}{L(\lambda)}-1\right\}dt\right|+\frac{1}{L(\lambda)}\left|\int_\Delta^\infty f(t)\,L(\lambda t)\,dt\right|.$$

La deuxième intégrale au second membre de cette inégalité est, d'après (9), au plus égale à

$$M\,\Delta^{-\eta}\frac{L_2(\lambda\Delta)}{L(\lambda)},\quad \eta>0,\quad \text{où}\quad L_2(t)\sim L(t),\quad t\to\infty.$$

L'inégalité précédente se réduit, en tenant compte de (i), par un passage à la limite $\lambda\to\infty$, à

$$\limsup_{\lambda=\infty}\left|\frac{1}{L(\lambda)}\int_a^\infty f(t)\,L(\lambda t)\,dt-\int_a^\Delta f(t)\,dt\right|\leqslant M\,\Delta^{-\eta},\quad \eta>0,$$

qui est la relation asymptotique du théorème 2, étant donné que le second membre peut être aussi petit que l'on veut.

4.3. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME* 3. L'existence de l'intégrale $\int_a^\infty f(t)\, L(\lambda t)\, dt$ résulte de

$$\left| \int_\Delta^{\Delta_1} f(t)\, L(\lambda t)\, dt \right| \leqslant L(\lambda\Delta) \max_{\Delta \leqslant x < \Delta_1} \left| \int_\Delta^{x} f(t)\, dt \right|.$$

En utilisant l'inégalité

$$\left| \int_\Delta^{\infty} f(t)\, L(\lambda t)\, dt \right| \leqslant L(\lambda\Delta) \max_{\Delta \leqslant x < \infty} \left| \int_\Delta^{x} f(t)\, dt \right|,$$

qui s'obtient de la précédente par un passage à la limite $\Delta_1 \to \infty$, on trouve

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_a^\infty f(t)\, L(\lambda t)\, dt - \int_a^\Delta f(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_a^\Delta f(t) \left\{ \frac{L(\lambda t)}{L(\lambda)} - 1 \right\} dt \right| + \frac{L(\lambda\Delta)}{L(\lambda)} \max_{\Delta \leqslant x < \infty} \left| \int_\Delta^x f(t)\, dt \right|.$$

Faisant tendre $\lambda \to \infty$ on obtient, grâce à (i),

$$\limsup_{\lambda = \infty} \left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_a^\infty f(t)\, L(\lambda t)\, dt - \int_a^\Delta f(t)\, dt \right| \leqslant \max_{\Delta \leqslant x < \infty} \left| \int_\Delta^\infty f(t)\, dt \right|,$$

qui représente la relation asymptotique donnée dans le théorème 3, en tenant compte du fait que le second membre peut être aussi petit que l'on veut, grâce à l'hypothèse que ladite intégrale est convergente.

4.4. *DEMONSTRATION DU THÉORÈME* 4. Posons

$$F(t) = \int_a^t u^\eta f(u)\, du, \quad \eta > 0.$$

On trouve par une intégration par parties

$$\int^{\Delta_1} f(t)\, L(\lambda t)\, dt = \int_\Delta^{\Delta_1} t^\eta f(t)\, t^{-\eta} L(\lambda t)\, dt =$$

$$= \Delta_1^{-\eta} L(\lambda\Delta_1)\, F(\Delta_1) - \Delta^{-\eta} L(\lambda\Delta)\, F(\Delta) - \int_\Delta^{\Delta_1} F(t)\, d\{t^{-\eta} L(\lambda t)\}.$$

En vertu de la propriété (v) des fonctions à croissance lente, l'existence de l'intégrale $\int_a^\infty t\, f(t)\, L(\lambda t)\, dt$ résulte de

$$(10) \qquad \left| \int_{\Delta}^{\Delta_1} f(t)\, L(\lambda t)\, dt \right| \leqslant M'\, \Delta_1^{-\eta} L(\lambda \Delta_1) + M'\, \Delta^{-\eta}\, L(\lambda \Delta)$$

et tenant compte de (iii) et de l'hyothèse sur la convergence de intégrale $\int_a^\infty t^\eta\, f(t)\, dt$.

Pour en déduire la relation asymptotique du théorème 4, nous utiliserons l'inégalité

$$\left| \int_{\Delta}^{\infty} f(t)\, L(\lambda t)\, dt \right| \leqslant M'\, \Delta^{-\eta}\, L(\lambda \Delta)$$

qui découle de (10) en faisant $\Delta_1 \to \infty$. Cette dernière inégalité entraîne

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_a^\infty f(t)\, L(\lambda t)\, dt - \int_a^\Delta f(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_a^\Delta f(t) \left\{ \frac{L(\lambda t)}{L(\lambda)} - 1 \right\} dt \right| + M'\, \Delta^{-\eta} \frac{L(\Delta \lambda)}{L(\lambda)}$$

d'où, en faisant tendre $\lambda \to \infty$, on obtient

$$\limsup_{\lambda = \infty} \left| \frac{1}{L(\lambda)} \int_a^\infty f(t)\, L(\lambda t)\, dt - \int_a^\Delta f(t)\, dt \right| \leqslant M'\, \Delta^{-\eta}, \quad \eta > 0,$$

ce qui se réduit à l'assertion du théorème 4, en prenant Δ suffisamment grand.

4.5 *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME* 5. Selon la définition des fonctions à croissance lente on a

$$L(t\lambda) - L(\lambda) = o\{L(\lambda)\}, \quad \lambda \to \infty, \quad t > 0,$$

et l'assertion du théorème 5 se réduit alors à

$$R(\lambda) \overset{def}{=} \int_a^\infty f(t)\, L(\lambda t)\, dt - A\, L(\lambda a) = o\{L(\lambda)\}, \quad \lambda \to \infty.$$

En tenant compte de

$$-\frac{\lambda}{L(\lambda a)}\int_a^\infty L'(\lambda t)\,dt = 1,$$

l'hypothèse $\int_a^x f(t)\,dt = O(1),\ x\to\infty$, nous permet d'obtenir, par une intégration par parties,

$$R(\lambda) = \lambda\int_a^\infty \Phi(t)\,L'(\lambda t)\,dt,$$

où nous avons posé

$$\Phi(t) = A - \int_a^t f(u)\,du.$$

La condition

$$\int_a^x \left(1-\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt \to A,\quad x\to\infty$$

du théorème (5) se réduit alors à

$$\Psi(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{x}\int_a^x \Phi(t)\,dt =$$

$$= \left(1-\frac{a}{x}\right)A - \frac{1}{x}\int_a^x dt\int_a^t f(u)\,du =$$

(11) $$= A - \frac{1}{x}\int_a^x\left(1-\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt - \frac{a}{x}A \to 0,\quad x\to\infty.$$

En introduisant la fonction Ψ dans $R(\lambda)$ on trouve, par une nouvelle intégration par parties,

$$R(\lambda) = \lambda\int_a^\infty \{t\,\Psi(t)\}'\,L'(\lambda t)\,dt =$$

$$= -\lambda^2\int_a^\infty t\,\Psi(t)\,L''(\lambda t)\,dt =$$

$$= -\lambda^2\left\{\int_a^\Delta + \int_\Delta^\infty\right\} =$$

(12) $$= J_1 + J_2.$$

Évaluons maintenant J_1 et J_2. On trouve

$$|J_1| \leqslant \lambda^2 |\Psi(\xi_1)| \int_a^\Delta t L''(\lambda t)\, dt = \qquad (a \leqslant \xi_1 \leqslant \Delta)$$

$$\leqslant \lambda |\Psi(\xi_1)| \int_a^\Delta t \{L'(\lambda t)\}'\, dt =$$

$$\leqslant |\Psi(\xi_1)| \{\lambda\Delta L'(\lambda\Delta) - \lambda a L'(\lambda a) - L(\lambda\Delta) + L(\lambda a)\},$$

et de la même manière

$$|J_2| \leqslant \lambda^2 |\Psi(\xi_2)| \int_\Delta^\infty t L''(\lambda t)\, dt = \qquad (\Delta \leqslant \xi_2 < \infty)$$

$$\leqslant |\Psi(\xi_2)| \{-\lambda\Delta L'(\lambda\Delta) + L(\lambda\Delta)\}.$$

Donc, en tenant compte de la définition et de la propriété (vi) des fonctions à croissance lente, le passage à la limite $\lambda \to \infty$ dans l'inégalité (12) nous donne

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \frac{|R(\lambda)|}{L(\lambda)} \leqslant |\Psi(\xi_2)|,$$

ce qui se réduit à l'assertion du théorème 5, étant donné que le second membre peut être rendu, d'après (11), arbitrairement petit, en choisissant Δ, et par suite ξ_2, arbitrairement grand.

(Reçu le 18 fevrier 1953)

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Karamata — Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica* (Cluj) **4** (1930), p. 38—53.

[2] ———— Sur un mode de croissance régulière. *Bull. de Soc. Math. de France* **61** (1933), p. 55—62.

[3] K. Knopp — Über eine Erweiterung des Äquivalenzsatzes der C- und H-Verfahren und eine Klasse regulär wachsender Funktionen. *Math. Zeit.* **49** (1943), p. 219—255.

[4] ———— Zwei Abelsche Sätze *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sci.* **4** (1952), p. 89—94.

[5] E. C. Titchmarsh — Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford 1948.