SUR DEUX QUESTIONS POSÉES PAR M. KARAMATA

par

HUBERT DELANGE (Clermont-Ferrand)

Nous nous proposons ici de répondre à deux questions qui nous ont été posées oralement par M. Karamata:

Considérons une fonction réelle ou complexe $f(x)$ définie pour x supérieur ou égal à un certain x_0.

1) Si l'on suppose que, pour chaque t positif, la différence $f(x+t) - f(x)$ est bornée pour $x \geqslant x_0$, peut-on en conclure que, quel que soit h positif, cette différence est bornée uniformément par rapport à t pour $0 \leqslant t \leqslant h$?

2) La fonction f étant réelle, si l'on suppose que, pour chaque t positif, la différence $f(x+t) - f(x)$ est bornée *supérieurement* pour $x \geqslant x_0$, peut-on en conclure que, quel que soit h positif, ceci a lieu uniformément par rapport à t pour $0 \leqslant t \leqslant h$?

Nous verrons que la réponse à la première question est affirmative si la fonction f est supposée continue pour $x \geqslant x_0$, et même avec une hypothèse un peu plus générale.

Par contre, même en supposant f continue, la réponse à la deuxième question est négative.

Nous obtiendrons néanmoins un résultat avec l'hypothèse relative à cette question.

1. Nous établirons d'abord le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit $f(x)$ une fonction réelle ou complexe définie pour x supérieur ou égal à un certain x_0 et continue pour $x \geqslant x_0$.*

Supposons que, pour tout t positif, on ait

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \, |f(x+t) - f(x)| < +\infty.$$

Alors, à tout h positif correspond un nombre positif $M(h)$ tel que, pour $x \geqslant x_0$ et $0 \leqslant t \leqslant h$,

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant M(h).$$

Nous définirons une fonction $W(t)$ pour $t \geqslant 0$ par

$$W(t) = \operatorname*{Sup}_{x \geqslant x_0} |f(x+t) - f(x)|.$$

Il est clair que $W(0) = 0$. De plus, la continuité de f impliquant que f soit bornée sur tout intervalle fini d'origine x_0, pour chaque t positif, l'hypothèse que

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} |f(x+t) - f(x)| < +\infty$$

entraîne $W(t) < +\infty$.

1.1. Comme enveloppe supérieure de fonctions continues, la fonction $W(t)$ est semi-continue inférieurement, donc mesurable.

Fixons un h positif.

y désignant un nombre positif quelconque, nous appellerons $E(y)$ l'ensemble des t appartenant à l'intervalle $[0,2h]$ tels que $W(t) > y$, et, pour $x \geqslant x_0$, nous appellerons $e_x(y)$ l'ensemble des u appartenant à l'intervalle $[x, x+2h]$ tels que $|f(u) - f(x)| > y$.

Ces deux ensembles sont mesurables.

Quels que soient $y > 0$ et $x \geqslant x_0$, on a $me_x(y) \leqslant mE(y)$, car l'ensemble déduit de $e_x(y)$ par la translation qui à u fait correspondre $u - x$ est évidemment contenu dans $E(y)$.

D'autre part, $mE(y)$ tend vers zéro quand y tend vers $+\infty$, car, si $\psi_y(t)$ est la fonction caractéristique de $E(y)$, on a

$$mE(y) = \int_0^{2h} \psi_y(t)\, dt$$

et, quand y tend vers $+\infty$, $\psi_y(t)$ tend vers zéro en restant de module au plus égal à 1.

Il existe donc un y_0 positif tel que $mE(y_0) < h/2$.

Nous allons voir que, si $x \geqslant x_0$ et $0 \leqslant t \leqslant h$, $|f(x+t) - f(x)| \leqslant 2y_0$.

En effet, on a

$$me_x(y_0) \leqslant mE(y_0) < \frac{h}{2} \quad \text{et} \quad me_{x+t}(y_0) \leqslant mE(y_0) < \frac{h}{2},$$

et par suite $m[e_x(y_0) \cup e_{x+t}(y_0)] < h$.

Or la partie commune aux intervalles $[x, x + 2h]$ et $[x + t, x + t + 2h]$ est un intervalle de longueur au moins égale à h.

Il existe donc des u appartenant à cette partie commune mais n'appartenant ni à $e_x(y_0)$ ni à $e_{x+t}(y_0)$, c'est-à-dire tels que

$$|f(u) - f(x)| \leqslant y_0 \quad \text{et} \quad |f(u) - f(x+t)| \leqslant y_0,$$

et ces deux inégalités entraînent $|f(x+t) - f(x)| \leqslant 2y_0$.

1.2. On peut aussi donner une démonstration indépendante de la théorie de la mesure.

1.2.1. Remarquons d'abord que, pour obtenir la conclusion indiquée, il suffit de prouver qu'il existe un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$, où $\alpha \geqslant 0$, sur lequel $W(t)$ est bornée supérieurement.

En effet, supposons que, pour $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, avec $0 \leqslant \alpha < \beta$, on ait $W(t) \leqslant H$.

Soit K positif tel que $|f(x)| \leqslant K$ pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \beta$, et posons

$$\mathrm{Max}\,[H, K] = H_1.$$

On voit en premier lieu que, pour $x \geqslant x_0$ et $0 \leqslant t \leqslant \beta - \alpha$,

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant 2H_1,$$

car, si $x \geqslant x_0 + \alpha$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x)| &\leqslant |f(x+t) - f(x-\alpha)| + |f(x) - f(x-\alpha)| \\ &\leqslant W(\alpha+t) + W(\alpha), \\ &\leqslant 2H, \end{aligned}$$

et, si $x_0 \leqslant x < x_0 + \alpha$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x)| &\leqslant |f(x+t)| + |f(x)|, \\ &\leqslant 2K. \end{aligned}$$

Si, maintenant, on se donne un h positif, il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que

$$(p-1)(\beta-\alpha) < h \leqslant p(\beta-\alpha),$$

et l'on va voir que, pour $x \geqslant x_0$ et $0 \leqslant t \leqslant h$,

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant 2pH_1.$$

Il suffit de considérer le cas où $t > 0$ car, si $t = 0$, le premier membre est nul. Il existe alors un entier $q \geqslant 1$ et $\leqslant p$ tel que

$$(q-1)(\beta-\alpha) < t \leqslant q(\beta-\alpha).$$

Si $q = 1$, on a $0 < t \leqslant \beta - \alpha$, donc $|f(x+t) - f(x)| \leqslant 2H_1 \leqslant 2pH_1$.

Si $q > 1$, on peut écrire

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{q-1} |f[x+j(\beta-\alpha)] - f[x+(j-1)(\beta-\alpha)]| + \\ + |f(x+t-) f[x+(q-1)(\beta-\alpha)]|, \\ \leqslant 2qH_1, \\ \leqslant 2pH_1.$$

1.2.2. Remarquons que, a étant une nombre réel quelconque, tout intervalle ouvert situé à droite de 0 et qui contient un point t_0 tel que $W(t_0) > a$ contient un intervalle fermé (non réduit à un point) en tous les points duquel $W(t) > a$. Cela résulte immédiatement de ce que la fonction $W(t)$ est semi-continue inférieurement.

1.2.3. Il est facile de déduire de là que tout intervalle ouvert situé à droite de 0 contient au moins un intervalle fermé sur lequel $W(t)$ est bornée supérieurement.

En effet, considérons un intervalle ouvert $]\alpha_0, \beta_0[$ tel que $\alpha_0 \geqslant 0$ et supposons qu'il ne contienne aucun intervalle fermé sur lequel $W(t)$ soit bornée supérieurement.

$W(t)$ n'est pas bornée supérieurement sur $]\alpha_0, \beta_0[$, sinon elle le serait sur tout intervalle fermé contenu dans $]\alpha_0, \beta_0[$. Il existe donc un t_1 appartenant à $[\alpha_0, \beta_0]$ tel que $W(t_1) > 1$, et par suite un intervalle fermé $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ contenu dans $]\alpha_0, \beta_0[$ et tel que $W(t) > 1$ sur I_1.

$W(t)$ n'étant pas non plus bornée supérieurement sur $]\alpha_1, \beta_1[$, il existe un t_2 appartenant à cet intervalle tel que $W(t_2) > 2$, et par suite un intervalle fermé $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ contenu dans $]\alpha_1, \beta_1[$, donc dans I_1, et tel que $W(t) > 2$ sur I_2.

On voit de même qu'il existe encore un intervalle fermé I_3 contenu dans I_2 et tel que $W(t) > 3$ sur I_3. Et ainsi de suite...

On obtient ainsi une suite d'intervalles fermés $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ dont chacun est contenu dans le précédent et qui sont tels que $W(t) > n$ sur I_n.

Ces intervalles ont un point commun θ, qui est un nombre positif puisque I_1 est contenu dans $]\alpha_0, \beta_0[$, et l'on doit avoir $W(\theta) > n$ quel que soit n entier, ce qui amène à une contradiction puisque par ailleurs $W(\theta) < +\infty$.[1)]

[1)] Le résultat établi dans ce paragraphe est un cas particulier d'un théorème bien connu de Baire. Cf, par exemple, B o u r b a k i, Topologie générale, Ch. IX, p. 77, Th. 2 (où l'énoncé est beaucoup plus général que celui de Baire).

1.3. Notons que notre première démonstration vaudrait encore si l'on remplaçait l'hypothèse que f est continue pour $x \geqslant x_0$ par toute autre hypothèse entraînant, d'une part, que f soit bornée sur tout intervalle fini d'origine x_0 et mesurable, d'autre part, que $W(t)$ soit mesurable.

De même, notre deuxième démonstration vaudrait encore si l'on remplaçait l'hypothèse de la continuité de f par toute autre hypothèse entraînant, d'une part, que f soit bornée sur tout intervalle fini d'origine x_0, d'autre part, que tout intervalle ouvert situé à droite de 0 et contenant un point t_0 tel que $W(t_0) > a$ contienne un intervalle fermé non réduit à un point sur lequel $W(t) > a$.

1.4. Comme nous allons le voir, ces deux remarques montrent l'une et l'autre que *le théorème* 1 *reste vrai si l'on y remplace l'hypothèse que f est continue pour $x \geqslant x_0$ par celle que f n'a que des points de discontinuité de première espèce et que, pour tout point de discontinuité X autre que x_0, on a*

$$f(X) = \frac{1}{2}[f(X+0) + f(X-0)]\text{[2]}.$$

1.4.1. Cette hypothèse implique d'abord que f soit bornée sur tout intervalle fini $[x_0, x_0 + l]$.

En effet, soit $\{\xi_n\}$ une suite de points de l'intervalle $[x_0, x_0 + l]$.

On peut en extraire une suite qui converge vers un point ξ de cet intervalle. Chaque terme de cette dernière suite est ou bien supérieur à ξ, ou bien égal à ξ, ou bien inférieur à ξ. L'une au moins de ces circonstances se présente pour une infinité de termes.

On peut donc extraire de la suite $\{\xi_n\}$ une suite $\{\xi_{n_k}\}$ qui converge vers ξ, ses termes étant ou bien tous supérieurs à ξ, ou bien tous égaux à ξ, ou bien tous inférieurs à ξ. Dans tous les cas, la suite $\{f(\xi_{n_k})\}$ tend vers une limite finie.

On voit donc que l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ quand x parcourt l'intervalle $[x_0, x_0 + l]$ est tel que, de toute suite de points de cet ensemble, on peut extraire une suite convergente. Ceci montre qu'il est borné.

[2]) Rappelons qu'un point de discontinuité X autre que x_0 est dit de première espèce si f possède en ce point des limites à droite et à gauche finies $f(X+0)$ et $f(X-0)$, et lorsque x_0 est un point de discontinuité, il est dit de première espèce si f a en x_0 une limite à droite finie.

Notre hypothèse implique évidemment que, *pour tout x supérieur à x_0*, les limites à droite et à gauche $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent et sont finies et l'on a

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

1.4.2. D'autre part, aucun nombre supérieur ou égal à x_0 ne peut être point d'accumulation de l'ensemble des points où l'oscillation de f est au moins égale à un nombre positif donné. Cet ensemble est donc au plus dénombrable.

L'ensemble des points où l'oscillation de f est au moins égale à $1/n$ étant au plus dénombrable, l'ensemble de tous les points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

f est donc intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle $[x_0, x_0 + l]$, puisqu'elle est bornée et continue presque-partout sur un tel intervalle. Elle est donc mesurable et, pour chaque $x \geqslant x_0$, la fonction $|f(x+t) - f(x)|$ est mesurable.

1.4.3. On va voir, de plus, que $W(t)$ est égale à la borne supérieure $W^*(t)$ de $f(x+t) - f(x)|$ *pour x parcourant l'ensemble A formé des nombres rationnels supérieurs à x_0 plus le nombre x_0.*

Il suffit de considérer le cas où $t > 0$ puisque $W(0) = W^*(0) = 0$.

Fixons donc un t positif.

En premier lieu, il est clair que $W^*(t) \leqslant W(t)$.

Pour prouver que $W^*(t) \geqslant W(t)$, remarquons d'abord que, quel que soit ξ supérieur à x_0, quand x tend vers ξ par valeurs supérieures, $|f(x+t) - f(x)|$ tend vers $|f(\xi + t + 0) - f(\xi + 0)|$, quand x tend vers ξ par valeurs inférieures, $|f(x+t) - f(x)|$ tend vers $|f(\xi + t - 0) - f(\xi - 0)|$, et l'une au moins de ces limites est au moins égale à $|f(\xi + t) - f(\xi)|$, puisque

$$f(\xi + t) - f(\xi) = {}^1/_2 \{[f(\xi + t + 0) - f(\xi + 0)] + [f(\xi + t - 0) - f(\xi - 0)]\},$$

d'où

$$|f(\xi + t) - f(\xi)| \leqslant {}^1/_2 \{|f(\xi + t + 0) - f(\xi + 0)| + |f(\xi + t - 0) - f(\xi - 0)|\}.$$

Ceci montre que, si $|f(\xi + t) - f(\xi)| > a$, avec $\xi > x_0$, on peut trouver un x appartenant à A tel que $|f(x+t) - f(x)| > a$.

Ceci étant, on voit que, quel que soit $y < W(t)$, on a $W^*(t) > y$.

En effet, d'après la définition de $W(t)$, il existe au moins un ξ supérieur ou égal à x_0 tel que $|f(\xi + t) - f(\xi)| > y$.

Si ξ appartient à A, ceci entraîne $W^*(t) > y$.

Si ξ n'appartient pas à A, on a $\xi > x_0$ et l'on peut trouver un x appartenant à A tel que $|f(x+t) - f(x)| > y$, ce qui entraîne encore $W^*(t) > y$.

1.4.4. Étant égale à $W^*(t)$, la fonction $W(t)$ est l'enveloppe supérieure d'une famille dénombrable de fonctions mesurables. Elle est donc mesurable.

1.4.5. Pour achever de justifier notre affirmation du paragraphe 1.4, il ne reste plus qu'à montrer que tout intervalle ouvert situé à droite de 0 et contenant un t_0 tel que $W(t_0) > a$ contient un intervalle fermé non réduit à un point sur lequel $W(t) > a$.

Supposons donc que $W(t_0) > a$, avec $0 \leqslant \alpha < t_0 < \beta$.

D'après la définition de $W(t)$, il existe au moins un ξ supérieur ou égal à x_0 tel que $|f(\xi + t_0) - f(\xi)| > a$.

Le nombre complexe $f(\xi + t_0) - f(\xi)$ appartenant au segment fermé ayant pour extrémités $f(\xi + t_0 + 0) - f(\xi)$ et $f(\xi + t_0 - 0) - f(\xi)$ — segment qui est d'ailleurs réduit à un point si f est continue au point $\xi + t_0$ —, l'un au moins de ces derniers nombres est de module supérieur à a.

Si $|f(\xi + t_0 + 0) - f(\xi)| > a$, il suffit que t soit assez voisin de t_0 en lui étant supérieur pour que l'on ait $|f(\xi + t) - f(\xi)| > a$. On peut donc trouver un intervalle fermé contenu dans l'intervalle ouvert $]t_0, \beta[$ et tel que, pour tout t appartenant à cet intervalle $|f(\xi + t) - f(\xi)| > a$, d'où $W(t) > a$.

De même, si $|f(\xi + t_0 - 0) - f(\xi)| > a$, on peut trouver un intervalle fermé contenu dans l'intervalle ouvert $]\alpha, t_0[$ et sur lequel $W(t) > a$.

1.5 Notons que *le théorème* 1 *reste encore vrai si l'on y remplace l'hypothèse que f est continue pour $x \geqslant x_0$ par celle que f n'a que des points de discontinuité de première espèce et que, pour tout point de discontinuité X autre que x_0, $f(X)$ appartient au segment fermé ayant pour extrémités $f(X - 0)$ et $f(X + 0)$.*

Cela résulte cette fois de la deuxième remarque du paragraphe 1.3.

En effet, ce qui a été dit aux paragraphes 1.4.1 et 1.4.5 vaut encore ici sans aucune modification.[3]

2. Considérons maintenant la fonction réelle définie pour $x \geqslant 1$ de la façon suivante:

Pour chaque n entier $\geqslant 1$, f est linéaire dans chacun des intervalles fermés

$$\left[n^2, n^2 + \frac{1}{3n}\right], \left[n^2 + \frac{1}{3n}, n^2 + \frac{2}{3n}\right], \left[n^2 + \frac{2}{3n}, n^2 + \frac{1}{n}\right] \text{ et } \left[n^2 + \frac{1}{n}, (n+1)^2\right],$$

et l'on a

$$f(n^2) = f\left(n^2 + \frac{2}{3n}\right) = -(n-1)^2$$

[3]) Il n'en est pas de même de ce qui a été dit au paragraphe 1.4.3.

et

$$f\left(n^2+\frac{1}{3\,n}\right)=f\left(n^2+\frac{1}{n}\right)=-\,n^2.$$

Il est clair que f est continue pour $x \geqslant 1$.

De plus, on voit que, pour tout t positif, la différence $f(x+t)-f(x)$ est bornée supérieurement pour $x \geqslant 1$. Plus précisèment, on a pour tout $x \geqslant 1$

$$f(x+t)-f(x) \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{t}-1 & \text{si } t<1, \\ 0 & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

En effet, notons d'abord que, quel que soit n entier $\geqslant 1$, on a

$$-\,n^2 \leqslant f(x) \leqslant -\,(n-1)^2 \quad \text{pour} \quad n^2 \leqslant x \leqslant (n+1)^2$$

et

$$f(x) \leqslant -\,n^2 \quad \text{pour} \quad x \geqslant n^2+\frac{1}{n}.$$

D'autre part, à tout $x \geqslant 1$ correspond un entier $p \geqslant 1$ tel que

$$p^2 \leqslant x < (p+1)^2.$$

Comme on a $f(x) \geqslant -\,p^2$, on ne peut avoir $f(x+t)-f(x)>0$ que si $f(x+t)>-\,p^2$, ce qui nécessite $x+t<p^2+1/p$, donc $t<1/p$, d'où $t<1$ et $p<1/t$.

Alors, comme $p^2<x+t<(p+1)^2$, on a $f(x+t) \leqslant -\,(p-1)^2$ et par suite $f(x+t)-f(x) \leqslant 2\,p-1<2/t-1$.

Par contre, quel que soit h positif, le maximum de $f(x+t)-f(x)$ pour $0 \leqslant t \leqslant h$ n'est pas borné supérieurement pour $x \geqslant 1$.

En effet, si $x=n^2$, avec n entier $\geqslant 1$, ce maximum est égal à $2\,n-1$ dès que n est assez grand pour que $2/3\,n \leqslant h$ et $2\,n+1 \geqslant h$, puisque

$\checkmark + \frac{1}{3n}$

$$f\left(n^2+\frac{2}{3\,n}\right)-f(n^2)=2\,n-1$$

et

$$f(n^2+t)-f(n^2) \leqslant 2\,n-1 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\,n+1.$$

Cet exemple montre donc que la réponse à la deuxième question de M. Karamata est négative même si la fonction f est supposée continue pour $x \geqslant x_0$.

3. On peut néanmoins établir le théorème suivant:

THÉORÈME 2: *Soit $f(x)$ une fonction réelle définie pour x supérieur ou égal à un certain x_0 et continue pour $x \geqslant x_0$.*

Supposons que, pour tout t positif, on ait

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} [f(x+t) - f(x)] < +\infty.$$

Alors, quels que soient h_1 et h_2 satisfaisant à $0 < h_1 < h_2$, il existe un nombre positif $N(h_1, h_2)$ tel que, pour $x \geqslant x_0$ et $h_1 \leqslant t \leqslant h_2$,

$$f(x+t) - f(x) \leqslant N(h_1, h_2).$$

Nous définirons une fonction $W_1(t)$ pour $t \geqslant 0$ par

$$W_1(t) = \operatorname*{Sup}_{x \geqslant x_0} [f(x+t) - f(x)].$$

Il est clair que $W_1(0) = 0$. De plus, du fait que f est bornée sur tout intervalle fini d'origine x_0, pour chaque t positif, l'hypothèse que

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} [f(x+t) - f(x)] < +\infty$$

entraîne $W_1(t) < +\infty$.

3.1. Comme enveloppe supérieure de fonctions continues, la fonction $W_1(t)$ est semi-continue inférieurement, donc mesurable.

Fixons h_1 et h_2 satisfaisant à $0 < h_1 < h_2$.

y désignant un nombre positif quelconque, nous appellerons $E_1(y)$ l'ensemble des t appartenant à l'intervalle $[0, h_2]$ tels que $W_1(t) > y$.

Pour $x \geqslant x_0$, nous désignerons par $e'_x(y)$ l'ensemble des u appartenant à l'intervalle $[x, x+h_2]$ tels que $f(u) - f(x) > y$, et, pour $x \geqslant x_0 + h_2$, nous désignerons par $e''_x(y)$ l'ensemble des u appartenant à l'intervalle $[x - h_2, x]$ tels que $f(x) - f(u) > y$.

Tous ces ensembles sont mesurables.

Quels que soient $y > 0$ et $x \geqslant x_0$, on a $me'_x(y) \leqslant mE_1(y)$, car l'ensemble déduit de $e'_x(y)$ par la translation qui à u fait correspondre $u - x$ est évidemment contenu dans $E_1(y)$.

De même, quels que soient $y > 0$ et $x \geqslant x_0 + h_2$, on a $me''_x(y) \leqslant mE_1(y)$ car l'ensemble déduit de $e''_x(y)$ par la symétrie qui à u fait correspondre $x - u$ est évidemment contenu dans $E_1(y)$.

D'autre part, on voit, comme plus haut pour $E(y)$, que $mE_1(y)$ tend vers zéro quand y tend vers $+\infty$.

Il existe donc un y_0 positif tel que $mE_1(y_0) < h_1/2$.

On voit que, si $x \geqslant x_0 + h_2 - h_1$ et $h_1 \leqslant t \leqslant h_2$, $f(x+t) - f(x) \leqslant 2y_0$. En effet, on a

$$me'_x(y_0) \leqslant mE_1(y_0) < \frac{h_1}{2} \quad \text{et} \quad me''_{x+t}(y_0) \leqslant mE_1(y_0) < \frac{h_1}{2}$$

et par suite

$$m[e'_x(y_0) \cup e''_{x+t}(y_0)] < h_1.$$

Or la partie commune aux intervalles $[x, x+h_2]$ et $[x+t-h_2, x+t]$ est un intervalle de longueur au moins égale à h_1.

Il existe donc des u appartenant à cette partie commune mais n'appartenant ni à $e_x'(y_0)$, ni à $e''_{x+t}(y_0)$, c'est-à-dire tels que

$$f(u) - f(x) \leqslant y_0 \quad \text{et} \quad f(x+t) - f(u) \leqslant y_0,$$

et ces deux inégalités entraînent $f(x+t) - f(x) \leqslant 2y_0$.

Si maintenant l'on designe par K la borne supérieure de $|f(x)|$ pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 2h_2 - h_1$, on voit immédiatement que, pour $x \geqslant x_0$ et $h_1 \leqslant t \leqslant h_2$, $f(x+t) - f(x) \leqslant 2 \operatorname{Max}(y_0, K)$.

3.2. Comme pour le théorème 1, on peut aussi donner une démonstration indépendante de la théorie de la mesure.

3.2.1. Il s'agit en fait de prouver que la fonction $W_1(t)$ est bornée supérieurement sur tout intervalle $[h_1, h_2]$, où $h_1 > 0$.

Il suffit de montrer que, à tout $t_0 > 0$, on peut faire correspondre un intervalle ouvert contenant t_0 et sur lequel $W_1(t)$ est bornée supérieurement.

En effet, s'il en est ainsi et si $0 < h_1 < h_2$, les intervalles ouverts correspondant aux points de l'intervalle fermé $[h_1, h_2]$ formeront une famille dont la réunion recouvre cet intervalle, et il existera une sous-famille finie ayant la même propriété.

3.2.2. Remarquons en premier lieu que, quels que soient t_1 et t_2 positifs, on a

$$W_1(t_1 + t_2) \leqslant W_1(t_1) + W_1(t_2).$$

En effet, on a pour tout $x \geqslant x_0$

$$\begin{aligned} f(x+t_1+t_2) - f(x) &= [f(x+t_1) - f(x)] + [f(x+t_1+t_2) - f(x+t_1)], \\ &\leqslant W_1(t_1) + W_1(t_2). \end{aligned}$$

3.2.3. D'autre part, on voit par les mêmes raisonnements qu'aux paragraphes 1.2.2 et 1.2.3 que tout intervalle ouvert situé à droite de 0 contient au moins un intervalle fermé non réduit à un point sur lequel la fonction $W_1(t)$ est bornée supérieurement.

3.2.4. Ceci étant, soit t_0 un nombre positif quelconque.

Il existe d'abord un intervalle fermé $[\gamma, \delta]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]0, t_0[$ et sur lequel $W_1(t)$ est bornée supérieurement. On a alors $0 < t_0 - \delta < t_0 - \gamma$ et il existe encore un intervalle fermé $[\gamma_1, \delta_1]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]t_0 - \delta, t_0 - \gamma[$ et sur lequel $W_1(t)$ est aussi bornée supérieurement.

Supposons que $W_1(t) \leqslant B$ sur $[\gamma, \delta]$ et $W_1(t) \leqslant B_1$ sur $[\gamma_1, \delta_1]$.

Les inégalités $t_0 - \delta < \gamma_1 < \delta_1 < t_0 - \gamma$, qui expriment que l'intervalle fermé $[\gamma_1, \delta_1]$ est contenu dans l'intervalle ouvert $]t_0 - \delta, t_0 - \gamma[$, entraînent

$$\gamma + \gamma_1 < t_0 < \delta + \delta_1,$$

de sorte que l'intervalle ouvert $]\gamma + \gamma_1, \delta + \delta_1[$ contient le point t_0.

On voit que sur cet intervalle $W_1(t) \leqslant B + B_1$.

En effet, si $\gamma + \gamma_1 < t < \delta + \delta_1$, les intervalles fermés $[\gamma, \delta]$ et $[t - \delta_1, t - \gamma_1]$ ont une partie commune non vide puisque $t - \delta_1 < \delta$ *et* $t - \gamma_1 > \gamma$. Si u est un point de cette partie commune, u appartient à $[\gamma, \delta]$, $t - u$ appartient à $[\gamma_1, \delta_1]$, et l'on peut écrire

$$W_1(t) \leqslant W_1(u) + W_1(t - u),$$
$$\leqslant B + B_1.$$

3.3. Ici aussi, on peut noter que notre première démonstration vaudrait encore si l'on remplaçait l'hypothèse que f est continue pour $x \geqslant x_0$ par toute autre hypothèse entraînant, d'une part, que f soit bornée sur tout intervalle fini d'origine x_0, et mesurable, d'autre part, que la fonction $W_1(t)$ soit mesurable.

De même, notre deuxième démonstration vaudrait encore si l'on remplaçait l'hypothèse de la continuité de f par toute autre hypothèse entraînant, d'une part, que f soit bornée sur tout intervalle fini d'origine 0, d'autre part, que tout intervalle ouvert situé à droite de 0 et contenant un point t_0 tel que $W_1(t_0) > a$ contienne un intervalle fermé non réduit à un point sur lequel $W_1(t) > a$.

3.4. On voit ainsi, comme pour le théorème 1, que *le théorème* 2 *reste vrai si l'on y remplace l'hypothèse que f est continue pour $x \geqslant x_0$ par celle que f n'a que des points de discontinuité de première espèce et que,* *pour tout point de discontinuité* X *autre que* x_0 *on a*

$$f(X) = 1/2\,[f(X+0) + f(X-0)],$$

ou même par celle que f *n'a que des points de discontinuité de première espèce et que, pour tout point de discontinuité* X *autre que* x_0, $f(X)$ *est compris (au sens large) entre* $f(X-0)$ *et* $f(X+0)$.

Les deux démonstrations sont valables pour le premier cas, la deuxième seulement pour le second.

(Reçu le 3 novembre 1954)