ÜBER EINEN ABSOLUTEN FATOU-RIESZSCHEN SATZ FÜR LAPLACEINTEGRALE

von

W. JURKAT (Cincinnati) und A. PEYERIMHOFF (Giessen).

Nach M. Riesz [6] gilt der folgende Satz: *Erfüllt eine für* $t \geqq 0$ *erklärte und L-integrierbare komplexwertige*[1] *Funktion* $b(t)$ *die Bedingung* $b(t) = o(1)$ *und ist das (für* $\Re s > 0$ *konvergente) Laplaceintegral*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, b(t)\, dt$$

regulär für $s = 0$, *so existiert*

$$\int_0^\infty b(t)\, dt.$$

Wir wollen im folgenden einen Satz von entsprechender Struktur beweisen der die Beziehung $\int_0^\infty |b(t)|\, dt < \infty$ erschliesst. Es wird sich zeigen, dass diese Beziehung aus den Voraussetzungen des Rieszschen Satzes folgt, wenn nur die Bedingung $b(t) = o(1)$ ersetzt wird durch $b(t) = a(1)$[2] $(t \to \infty)$. Dieser Sachverhalt ist ein Spezialfall des folgenden Satzes 2.

Als Anwendung werden wir aus Satz 2 den absoluten Fatou-Rieszschen Satz für Potenzreihen ableiten[3]; als weitere Anwendungen erhalten wir Sätze, die Fatou-Rieszschen Sätzen bei Dirichletreihen entsprechen (Satz 4 und Satz 5).

---

[1]) Die in dieser Arbeit auftretenden Funktionen einer reellen Veränderlichen sind stets als komplexwertig aufzufassen (und eine derartige Funktion heisst L-integrierbar bzw. totalstetig bzw. von beschränkter Schwankung, wenn dies von ihrem Real-und Imaginärteil gilt).

[2]) Es sei $x(t) = a(y(t))$ für $t \to \infty$, wenn $\alpha(t)$ durch $x(t) = \alpha(t)\, y(t)$ von einer Stelle $(t \geqq T)$ an erklärt und im Intervall (T, ∞) von beschränkter Schwankung ist. Die Bedingung $b(t) = a(1)$ besagt also, dass $\int_a^\infty |db(t)| < \infty$ ist für ein passendes $a \geqq 0$ (vgl. hierzu [3] S. 285).

[3]) Vgl. [3] Satz 1.

1. Wir beweisen zunächst den folgenden

SATZ 1. *Erfüllt eine für* $t \geqq 0$ *erklärte und (in jedem Intervall* $(0, T)$*) totalstetige Funktion* $b(t)$ *die Bedingung* $\int_0^\infty |b'(t)|\,dt < \infty$ *und ist das (fü* $\Re s > 0$ *konvergente) Laplaceintegral*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, b(t)\, dt$$

regulär für $s = 0$, *so ist*

$$\int_0^\infty |b(t)\, dt| < \infty.$$

Wir schicken dem Beweis einen Hilfssatz voraus.

Eine Funktion $\phi(\alpha)\ (-\infty < \alpha < +\infty)$ gehört zur Klasse U, wenn sie die Fouriertransformation einer Funktion aus $L\ (-\infty, +\infty)$ ist, wenn also gilt

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, \varphi(t)\, dt \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty.$$

HILFSSATZ. *Jede zweimal stetig differenzierbare Funktion* $\phi(\alpha) \in L^2(-\infty, +\infty)$ *mit* $\phi(\alpha) = o(1)$, $\phi'(\alpha) = o(1)$ $(|\alpha| \to \infty)$, $\phi''(\alpha) \in L(-\infty, +\infty)$ *gehört zur Klasse* U.

B e w e i s. Nach dem Satz von Plancherel[4] existiert

$$\varphi(\alpha) = \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} e^{i\alpha t}\, \varphi(t)\, dt.$$

und es ist $\varphi(\alpha) \in L^2(-\infty, +\infty)$ und

$$\phi(\alpha) = \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} e^{-i\alpha t}\, \phi(t)\, dt$$

Durch zweimalige partielle Integration erkennt man, dass unter den gegebenen Voraussetzungen sogar der

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{+n} e^{i\alpha t}\, \phi(t)\, dt$$

[4] Vgl. [1] S. 112, [7] S. 315. Gehören die Funktionen $f_n(x)$ $(n = 0, 1 \ldots)$ und $f(x)$ zu $L^2(-\infty, +\infty)$, so sei wie üblich $\underset{n \to \infty}{\text{l.i.m}}\, f_n(x) = f(x)$ erklärt durch $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx = o(1)$.

für alle $\alpha \neq 0$ existiert und gleich

$$\frac{1}{(i\alpha)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\phi''(t)\,dt$$

ist. Somit ist $\varphi(\alpha) = O(1/\alpha^2)\,(|\alpha| \to \infty)$; insbesondere ist also $\varphi(\alpha) \in L(-\infty, +\infty)$ und damit

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\varphi(t)\,dt$$

w. z. b. w.

Die Voraussetzungen des Hilfssatzes sind erfüllt für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $\phi(\alpha)\,(-\infty < \alpha < \infty)$ mit $\phi(\alpha) = 0$ für $|\alpha| \geqq c < 0$ bzw. $\phi(\alpha) = 1/i\alpha$ für $|\alpha| \geqq c > 0$. Von dieser Bemerkung werden wir beim Beweis von Satz 1 Gebrauch machen.

Beweis von Satz 1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $b(0) = 0$ ist. Wegen $b(t) = O(1)$ ist für $\Re s > 0$ (partielle Integration)

$$f(s) = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,b'(t)\,dt.$$

Das Integral ist absolut konvergent für $\Re s \geqq 0$ wegen $\int_0^\infty |b'(t)|\,dt < \infty$. Die Funktion $f(s)$ ist also für $\Re s \geqq 0$ stetig (für eine Umgebung von $s = 0$ nach Voraussetzung) und es ist

$$(1) \qquad i\tau f(i\tau) = \int_0^\infty e^{-i\tau t}\,b'(t)\,dt \quad \text{für} \quad -\infty < \tau < +\infty\,.$$

Da $f(s)$ regulär ist für $s = 0$, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(i\tau)$ zweimal stetig differenzierbar ist für $|\tau| \leqq \varepsilon$. Es sei $g(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $g(t) = 1/it$ für $|t| \geqq \varepsilon/2$ und es sei $f_1(\tau) = g(\tau)\,i\tau\,f(i\tau)$ und $f_1(\tau) + f_2(\tau) = f(i\tau)$. Nach dem Hilfssatz ist $g(\tau) \in U$ und nach (1) ist $i\tau f(i\tau) \in U$ so dass auch $f_1(\tau) \in U$ ist[5]). Ferner ist $f_2(\tau) = f(i\tau)(1 - i\tau g(\tau))$, d. h. $f_2(\tau) = 0$ für $|\tau| \geqq \varepsilon/2$

[5]) Vgl. etwa [1] S. 6. th. 2.

und somit ist $f_2(\tau)$ zweimal stetig differenzierbar. Nach dem Hilfssatz ist also auch $f_2(\tau) \in U$, insgesamt ist somit $f(i\tau) \in U$[6]. Ist etwa

$$f(i\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau t} a(t)\, dt \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |a(t)|\, dt < \infty,$$

so ist

$$-i\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} a(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} b'(t)\, dt \quad (b'(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0)$$

und daraus folgt, dass $b(t) = a(t)$ f. ü. ist[7] w.z.b.w.

Bemerkung. Aus dem Beweis ist zu ersehen, dass die Voraussetzung über die Regularität von $f(s)$ gar nicht vollständig benötigt wurde. Wie eine leichte Abänderung des Beweises zeigt, bleibt der Satz richtig, wenn die Voraussetzung über die Regularität ersetzt wird durch die nach dem Hilfssatz schwächere Bedingung: Es gibt eine Zahl $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $h(t) \in U$, so dass gilt: $f(i\tau) = h(\tau)$ für $0 < |\tau| \leqq \varepsilon$ ($f(i\tau)$ ist wegen $\int_0^\infty |b'(t)|\, dt < \infty$ erklärt für alle $\tau \neq 0$). Diese Bedingung ist zugleich notwendig für $\int_0^\infty |b(t)|\, dt < \infty$. Bei den folgenden Sätzen ist ebenfalls eine derartige Abschwächung der Voraussetzungen möglich. Um jedoch die Sätze möglichst einfach formulieren zu können, werden wir dort nur die Voraussetzung über die Regularität einführen.

2. Es ist unbefriedigend, dass in Satz 1 die Bedingung $\int_0^\infty |b'(t)|\, dt < \infty$ nicht notwendig ist für die Richtigkeit der Behauptung. Wir werden im folgenden eine Erweiterung von Satz 1 beweisen, bei der $\int_0^\infty |b'(t)|\, dt < \infty$ ersetzt ist durch eine notwendige Bedingung. Gleichzeitig wird dabei die Klasse der zugelassenen Funktionen $b(t)$ vergrössert.

SATZ 2. Voraussetzung. *Es sei $b(t)$ eine für $t \geqq 0$ erklärte und in jedem Intervall $(0, T)$ L-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass das Laplaceintegral*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} b(t)\, dt$$

für $\Re s > 0$ konvergiert und $f(s)$ regulär ist für $s = 0$.

---

[6] Zu diesen Überlegungen vgl. die Anwendung des Lokalisationssatzes von N. Wiener für absolut konvergente Fourierreihen ([7] S. 140) in [3] S. 288.

[7] Vgl. etwa [1] S. 26. th 15.

Behauptung. *Genau dann ist* $\int_0^\infty |b(t)|\,dt < \infty$, *wenn gilt*

$$\int_0^\infty \left| \frac{d}{dx}\, e^{-\sigma x} \int_0^x e^{\sigma t}\, b(t)\, dt \right| dx < \infty \quad \text{für ein} \quad \sigma > 0 \tag{2}$$[8].

Aus (2) *folgt die Konvergenz des Laplaceintegrales für* $\Re s > 0$.

Beweis. Setzen wir zur Abkürzung

$$h(x) = e^{-\sigma x} \int_0^x e^{\sigma t}\, b(t)\, dt,$$

so ist

$$h'(x) = -\sigma h(x) + b(x) \quad \text{f. ü.} \tag{3}$$

Aus (3) folgt unmittelbar die Behauptung über die Konvergenz des Laplaceintegrales, da wegen (2) $h(x) = O(1)$ und somit $\int_0^x b(t)\, dt = O(x)$ ist.

Ist $\int_0^\infty |b(t)|\, dt < \infty$, so ist

$$\int_0^\infty |h(x)|\, dx \leqq \int_0^\infty e^{-\sigma x} \int_0^x |b(t)|\, e^{\sigma t}\, dt\, dx = \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty |b(t)|\, dt < \infty$$

und daraus folgt wegen (3) die Notwendigkeit von (2). Dass (2) hinreichend ist, folgt unmittelbar aus der Beziehung

$$\int_0^\infty e^{-st}\, h(t)\, dt = \frac{1}{s+\sigma} \int_0^\infty e^{-st}\, b(t)\, dt = \frac{f(s)}{s+\sigma} \quad (\Re s > 0)$$

durch Anwendung von Satz 1 und Beachtung von (3).

Zusatz. Die Bedingung (2) ist erfüllt, wenn $b(t)$ für $t \geqq 0$ erklärt, in jedem Intervall $(0, T)$ L-integrierbar und $b(t) = a(1)$ $(t \to \infty)$ ist. In diesem Fall folgt (2) durch eine einfache Rechnung aus

$$h'(x) = e^{-\sigma x} \left\{ C + \int_\alpha^x e^{\sigma t}\, db(t) \right\} \quad (x \geqq a).$$

[8] Ist (2) für ein $\sigma_0 > 0$ erfüllt, so für alle $\sigma > 0$. Dies ergibt sich durch eine einfache Rechnung, wenn man $h_\sigma(x) = e^{-\sigma x} \int_0^x e^{\sigma t}\, b(t)\, dt$ setzt und beachtet, dass für je zwei $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$

$$h'_{\sigma_2}(x) = h'_{\sigma_1}(x) - (\sigma_2 - \sigma_1)\, e^{-\sigma_2 x} \int_0^x e^{\sigma_2 t}\, h'_{\sigma_1}(t)\, dt$$

ist.

Durch eine lineare Transformation der Variablen s kann man von Satz 2 zu Sätzen gelangen, in die die Voraussetzung der Regularität von $f(s)$ an einer Stelle $s=\sigma>0$ eingeht. Auf diese Weise ergibt sich z. B. der

SATZ 3. Voraussetzung. *Es sei $b(t)$ eine für $t\geqq 0$ erklärte und in jedem Intervall $(0, T)$ L-integrierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass das Laplaceintegral*

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}\, b(t)\, dt$$

für $\Re s>\sigma_0>0$ konvergiert und $f(s)$ regulär ist für $s=\sigma_0$.

Behauptung. *Genau dann ist $\int_0^\infty e^{-\sigma_0 t}\,|b(t)|\,dt<\infty$, wenn gilt*

$$\int_0^\infty \left|\frac{d}{dx}\, e^{-\sigma_0 t}\int_0^x b(t)\, dt\right| dx<\infty. \tag{4}$$

Aus (4) folgt die Konvergenz des Laplaceintegrales für $\Re s>\sigma_0$.

Beweis. Anwendung von Satz 2 auf die Funktion

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,(e^{-\sigma_0 t}\, b(t))\, dt$$

wobei in (2) $\sigma=\sigma_0$ gesetzt wird.

3. Wir wollen als Anwendung der bisherigen Ergebnisse einige Anwendungen auf Dirichletreihen besprechen. Nach M. Riesz (vgl. [2], [5]) gelten für Dirichletreihen $f(s)=\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ $(\lambda_n\geqq 0,\ \lambda_n<\lambda_{n+1}\to\infty)$ die folgenden Sätze

a) Ist $\lambda_n-\lambda_{n-1}=O(1)$, $a_n=o(\lambda_n-\lambda_{n-1})$ (die Reihe ist dann sicher konvergent für $\Re s>0$) und ist $f(s)$ regulär für $s=0$, so konvergiert $\sum a_n$.

b) Ist $s_n=o(e^{\lambda_n c})$, $c>0$ $(s_n=\sum_{\nu=0}^n a_\nu)$ (die Reihe ist dann sicher konvergent für $\Re s>c$) und ist $f(s)$ regulär für $s=c$, so ist $\sum a_n e^{-\lambda_n c}$ konvergent.

Für Dirichletreihen mit $l_n-l_{n-1}=O(1)$ $(l_n=e^{\lambda_n})$ können wir aus Satz 2 entsprechend gebaute Sätze ableiten die sich auf absolute Konvergenz beziehen.

SATZ 4. *Es sei $f(s)=\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ eine Dirichletreihe mit $l_n-l_{n-1}=O(1)$, $a_n=a(\lambda_n-\lambda_{n-1})$[9] (unter diesen Voraussetzungen ist die Reihe konvergent für $\Re s>0$). Ist $f(s)$ regulär für $s=0$ so ist $\sum|a_n|<\infty$.*

---

[9] Es ist $x_n=a(y_n)$, wenn α_n durch $x_n=\alpha_n y_n$ von einer Stelle an $(n\geqq N)$ erklärt und $\sum_N^\infty|\alpha_n-\alpha_{n+1}|<\infty$ ist. Vgl. auch [2].

B e w e i s. Wegen $s_n = O(\lambda_n) = O(e^{\lambda_n \varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$ ist $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ konvergent für $\Re s > 0$. Setzen wir

$$b(t) = \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \quad \text{für} \quad \lambda_{n-1} \leqq t < \lambda_n \quad (n = 1, 2 \ldots)$$

und

$$b(t) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < \lambda_0,$$

so ist $b(t) = a(1)$ und

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, b(t)\, dt = \frac{1}{s} \sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \left(e^{-\lambda_{n-1} s} - e^{-\lambda_n s}\right) \text{ für } \Re s > 0.$$

Wegen $\lambda_n - \lambda_{n-1} = O(1)$ ist (mit $\sigma = \Re s$) für jede Folge μ_n mit $\lambda_{n-1} \leqq \mu_n \leqq \lambda_n$

(5) $$e^{\lambda_{n-1} s} - e^{-\lambda_n s} = s e^{-\mu_n s} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) + O(1)\, s^2 (\lambda_n - \lambda_{n-1})^2 e^{-\lambda_n s} e^{O(1)\sigma}$$

und somit für $\Re s > 0$ $(\mu_n = \lambda_n)$ $g(s) = (f(s) - a_0) + \sum_1^\infty \alpha_n(s)$, wo [10])

$$|\alpha_n(s)| = O(1)\, |s|\, e^{O(1)\sigma} \frac{(\lambda_n - \lambda_{n-1})^2}{l_n^\sigma} = O(1)\, |s|\, e^{O(1)\sigma} \frac{(l_n - l_{n-1})}{l_n^{\sigma+2}}$$

ist. Aus dem Satz von A b e l-D i n i [11]) folgt, dass $\sum \alpha_n(s)$ regulär ist für $\Re s > -1$. Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar aus Satz 2 (mit Zusatz).

B e m e r k u n g. Satz 4 bleibt auch richtig für $\lambda_n = n$, da in diesem Falle $g(s) = \dfrac{e^s - 1}{s} (f(s) - a_0)$ ist. In diesem Fall stellt Satz 4 den absoluten Fatou-Rieszschen Satz für Potenzreihen dar[3]).

Als Folgerung aus Satz 4 erhalten wir ein Analogon zum Satz *b*) von Riesz.

SATZ 5. V o r a u s s e t z u n g. *Es sei $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ eine Dirichletreihe mit $l_n - l_{n-1} = O(1)$. Die Reihe sei konvergent für $\Re s > c$ $(c > 0)$ und $f(s)$ sei regulär für $s = c$.*

---

[10]) Bei der folgenden Abschätzung ist zu beachten, dass gilt:

$$\frac{1}{l_n} \frac{l_n - l_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 1 + o(1). \quad (n \to \infty)$$

(Anwendung des Mittelwertatzes der Differentialrechnung und $\dfrac{l_{n-1}}{l_n} \to 1$).

[11]) Vgl. etwa [4] S. 299.

Behauptung. *Genau dann ist* $\sum |a_n e^{-\lambda_n c}| < \infty$, *wenn gilt*

(6) $$s_n = o(l_n^c).$$

Aus (5) *folgt die Konvergenz der Dirichletreihe für* $\Re s > c$.

Beweis. Wegen $s_n = o(l_n^{c+\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$ ist $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ konvergent für $\Re s > c$. Wegen (6) ist die Dirichletreihe

$$g(s) = \sum_0^\infty \frac{s_n}{l_n^c}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)\, e^{-\lambda_n s}$$

konvergent für $\Re s > 0$ und aus (5) folgt (mit $\mu_n = \lambda_{n-1}$) für $\Re s > 0$

$$g(s) = \frac{1}{s+c} \sum s_n \left(e^{-\lambda_n (s+c)} - e^{-\lambda_{n+1}(s+c)}\right) + \sum \alpha_n(s) = \frac{f(s+c)}{s+c} + h(s)$$

wo $h(s)$ (auf Grund derselben Abschätzungen wie beim Beweis von Satz 4) regulär ist für $\Re s > -1$. Nach Satz 4 ist

$$\sum \left| \frac{s_n}{l_n^c}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \right| < \infty$$

und daraus folgt

$$\sum \left| \frac{a_n}{l_n^c} \right| < \infty$$

wegen (6) und

(7) $$\left| \left| s_n l_n^{-c} - s_{n-1} l_{n-1}^{-c} \right| - \left| a_n l_n^{-c} \right| \right| \leqq |s_{n-1}| \left(l_{n-1}^{-c} - l_n^{-c}\right)$$

da

$$l_{n-1}^{-c} - l_n^{-c} = O(1)\,(\lambda_n - \lambda_{n-1})\, l_{n-1}^{-c}$$

ist. Ferner folgt aus (7) durch eine einfache Rechnung die Notwendigkeit von (6).

(Eingegangen am 3. November 1954).

LITERATUR

[1] Bochner, S. und K. Chandrasekharan — Fourier Transforms. Princeton 1949.

[2] Hardy, G. H. und M. Riesz — The general theory of Dirichlet's series. Cambridge 1915.

[3] Jurkat, W. und A. Peyerimhoff — Der Satz von Fatou-Riesz und der Riemannsche Lokalisationssatz bei absoluter Konvergenz. *Arch. d. Math* **4** (1953), 285—297.

[4] Knopp, K. — Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer 1947.

[5] Riesz, M. — Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen. *Acta Math.* **40** (1916), 349—361.

[6] Riesz, M. — Über die Summierbarkeit durch typische Mittel. *Acta Szeged* **2** (1924), 18—31.

[7] Zygmund, A. — Trigonometrical series. Warszawa 1935.