ÉVALUATION ÉLÉMENTAIRE DES SOMMES TYPIQUES DE RIESZ DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES

par

J. KARAMATA (Genève)

SOMMAIRE. — Rapport entre les évaluations des sommes de Riesz et celles de leurs fonctions génératrices et quelques applications aux procédés relatives à l'évaluation de ces premières.

1. Par sommes typiques de Riesz ou par somme de Riesz d'ordre k d'une suite ou de la fonction arithmétique (f. a.)

$$f(n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

relative à la suite croissante

$$0 < l_1 < l_2 < l_3 < \ldots < l_n \ldots,$$

nous entendons des expressions de la forme

$$F_k(x) = \sum_{l_n \leqslant x} f(n) \lg^k \frac{x}{l_n} = \int_{l_1 - 0}^{\infty} \lg^k \frac{x}{t} \, dF(t), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

où

$$F(x) = F_0(x) = \sum_{l_n \leqslant x} f(n)$$

est la fonction somme (f. s.) des $f(n)$, et par fonction génératrice (f. g.) des $f(n)$ la fonction $\bar{f}(s)$ définie par la série de Dirichlet

$$\bar{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)/l_n^s = \int_{l_1 - 0}^{\infty} \frac{dF(t)}{t^s},$$

toutes les fois que cette dernière série converge pour au moins une valeur de s.

Dans cet article nous étudierons les évaluations des sommes de Riesz $F_k(x)$ qui procèdent suivant les puissances de $\lg x$ et pour mieux mettre en évidence le rapport existant entre ces évaluations et les f. g. des f. a. envisagées, nous rappellerons au § 2 certains théorèmes les concernant. Dans les paragraphes suivants nous établirons un certain nombre de théorèmes permettant d'obtenir ces évaluations pour diverses fonctions arithmétiques, en particulier pour les f. a. $\Lambda(n)$, $\mu(n)$ et $\lambda(n)$.

Dans tout cet exposé nous ne considérerons que le cas où

$$l_n = n,$$

pour avoir des énoncés plus simples et des applications directes aux f. a. qui touchent à la fonction $\zeta(s)$, mais on se rend facilement compte que l'extension au cas général est immédiate pour la plupart des théorèmes énoncés; d'ailleurs le théorème de Landau mentionné au début du § 2 a été formulé pour le cas général.

2. Soit

$$a(n), \quad n = 1, 2, 3 \ldots,$$

une fonction arithmétique et

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n)$$

sa fonction somme. E. Landau [3], en généralisant un théorème de Phragmèn, a montré que *si*

$$A(x) = cx^{\alpha} + O(x^{\beta}) \quad avec \quad \beta < \alpha,$$

alors la série de Dirichlet

$$\bar{a}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^s$$

converge pour $R(s) > \alpha$, et la fonction génératrice $\bar{a}(s)$ des $a(n)$ peut s'écrire:

$$\bar{a}(s) = \frac{c\,\alpha}{s-\alpha} + \bar{a}_{\beta}(s)$$

où $\bar{a}_{\beta}(s)$ est holomorphe pour $R(s) > \beta$.

Ce résultat est immédiat et il est facile d'en donner des extensions dont je ne mentionnerai que la suivante:

Lorsque

$$A(x) = cx^{\alpha} \lg^n x + r(x), \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

avec

$$r(x) = O(x^{\beta}), \quad \beta < \alpha,$$

alors

$$\bar{a}(s) = cs\,\frac{\Gamma(n+1)}{(s-\alpha)^{n+1}} + \bar{a}_{\beta}(s),$$

avec $\bar{a}_{\beta}(s)$ holomorphe pour $R(s) > \beta$.

On a en effet pour $R(s) > \alpha$,

$$\bar{a}(s) = \int_{1-0}^{\infty} \frac{dA(t)}{t^s} = c\int_{1}^{\infty} \frac{d(t^\alpha \lg^n t)}{t^s} + \int_{1-0}^{\infty} \frac{dr(t)}{t^s} =$$

$$= cs\,\frac{\Gamma(n+1)}{(s-\alpha)^{n+1}} - c\lg^n 1 - r(1-0) + s\int_{1}^{\infty} \frac{r(t)}{t^{s+1}}\,dt =$$

$$= cs\,\frac{\Gamma(n+1)}{(s-\alpha)^{n+1}} + s\int_{1}^{\infty} \frac{r(t)}{t^{s+1}}\,dt,$$

car

$$r(1-0) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n > 0, \\ -c & \text{pour } n = 0. \end{cases}$$

Puisque $r(t) = O(t^\beta)$, cette dernière intégrale converge pour $R(s) > \beta$ et la fonction

$$\bar{a}_\beta(s) = s\int_{1}^{\infty} \frac{r(t)}{t^{s+1}}\,dt$$

y est holomorphe.

Ainsi, lorsque la fonction somme

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n)$$

peut être évaluée par une expression de la forme

$$A(x) = x^\alpha \sum_{\nu=0}^{N} c_{-\nu} \lg^\nu x + r(x), \tag{2}$$

avec

$$r(x) = O(x^\beta), \quad \beta < \alpha,$$

alors la série de Dirichlet

$$\bar{a}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^s$$

converge pour $R(s) > \alpha$, et la fonction génératrice $\bar{a}(s)$ est holomorphe pour $R(s) > \beta$, excepté au point $s = \alpha$, au voisinage duquel elle est développable en une série de Laurent de la forme

$$\bar{a}(s) = \sum_{\nu=-N-1}^{\infty} b_\nu (s-\alpha)^\nu \tag{3}$$

qui converge pour $|s-\alpha| < \alpha - \beta$, dont la partie principale du pôle est donnée par

$$s \sum_{\nu=0}^{N} \frac{\nu!\, c_{-\nu}}{(s-\alpha)^{\nu+1}} - c_{-0},$$

et la partie entière de la série (3) par

$$c_{-0} - s \int_{1}^{\infty} \frac{r(t)}{t^{s+1}}\, dt = \int_{1-0}^{\infty} \frac{dr(t)}{t^s},$$

c-à-d. en développant sous l'intégrale t^{-s} en série suivant les puissances de $(s-\alpha)$ et en tenant compte de

$$c_{-0} + r(1-0) = 0,$$

par

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int_{1-0}^{\infty} \frac{\lg^\nu t}{t^\alpha}\, d\{r(t)\}\ (s-\alpha)^\nu. \tag{4}$$

Les relations entre l'évaluation (2) de la fonction somme $A(x)$ et les coefficients de la partie entière de la série de Laurent (3) peuvent de même être obtenues à partir des évaluations relatives aux sommes de Riesz. A cet effet, considérons en premier lieu le cas où $A(x)$ est évaluable par une expression de la forme (1). On peut alors facilement évaluer les sommes partielles

$$A_0(\alpha, x) = \sum_{n \leqslant x} a(n)/n^\alpha$$

de la série de Dirichlet de $\bar{a}(s)$ pour $s = \alpha$, car

$$A_0(\alpha, x) = \int_{1-0}^{x} \frac{dA(t)}{t^\alpha} = c \int_{1}^{x} \frac{d\{t^\alpha \lg^n t\}}{t^\alpha} + \int_{1-0}^{x} \frac{dr(t)}{t^\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c\alpha}{n+1} \lg^{n+1} x + c \lg^n x + c_0 - \displaystyle\int_{x}^{\infty} \frac{dr(t)}{t^\alpha}, & n > 0, \\[2ex] c\alpha \lg x + c_0 - \displaystyle\int_{x}^{\infty} \frac{dr(t)}{t^\alpha}, & n = 0. \end{cases}$$

En posant donc

$$\rho_0(x) = \int_x^\infty \frac{d\,r(t)}{t^\alpha},$$

on aura

$$c_0 = \rho_0(1-0)$$

et

$$A_0(\alpha, x) = \frac{c\alpha}{n+1} \lg^{n+1} x + \varepsilon_n c \lg^n x + c_0 - \rho_0(x), \tag{5}$$

où

$$\rho_0(x) = -\frac{r(x)}{x^\alpha} + \alpha \int_x^\infty \frac{r(t)}{t^{\alpha+1}} dt = O(1/x^{\alpha-\beta})$$

et

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad n > 0, \\ 0 & \text{pour} \quad n = 0. \end{cases}$$

En second lieu, formons les sommes typiques de Riesz d'ordre k de la suite $a(n)/n^\alpha$, c-à-d. les expressions:

$$A_k(\alpha, x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n^\alpha} \lg^k x/n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

De l'hypothèse (1) il résulte que toutes ces expressions, quel que soit $k = 0, 1, 2, \ldots$, possèdent une évaluation au terme $O(1/x^{\alpha-\beta})$ près. En effet, de

$$A_k(\alpha, x) = k \int_1^x A_{k-1}(\alpha, t) \frac{dt}{t}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

on obtient, à partir de (5), par induction sur k, que

$$\begin{aligned} A_k(\alpha, x) = {} & \frac{k!\, c}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+1)} \lg^{n+k+1} x + \\ & + \frac{\varepsilon_n k!\, c}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \lg^{n+k} x + \\ & + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} c_\nu \lg^{k-\nu} x - (-1)^k \rho_k(x), \end{aligned}$$

où

$$\rho_k(x) = k \int_x^\infty \frac{\rho_{k-1}(t)}{t^\alpha} dt = O(1/x^{\alpha-\beta}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

avec

$$\rho_0(x) = \int_x^\infty \frac{d\,r(t)}{t^\alpha} = O\,(1/x^{\alpha-\beta}),$$

et

$$c_\nu = \rho_\nu(1-0), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots.$$

Enfin, en supposant que la fonction somme $A(x)$ possède une évaluation de la forme (2) et en tenant compte des résultats précédents, on obtient, en posant

$$r(x) = x^\alpha \rho(x) \quad \text{et} \quad \alpha - \beta = \delta > 0,$$

le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Lorsque la fonction somme*

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n)$$

est évaluable par une expression de la forme

$$A(x) = x^\alpha \sum_{\nu=0}^{N} c_{-\nu} \lg^\nu x + x^\alpha \rho(x), \tag{6}$$

avec

$$\rho(x) = O\,(1/x^\delta), \quad \delta > 0,$$

alors les sommes de Riesz

$$A_k(\alpha, x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n^\alpha} \lg^k x/n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

peuvent être évaluées au terme $O\,(1/x^\delta)$ près, par

$$\begin{aligned} A_k(\alpha, x) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{k!\,\nu!}{(k+\nu)!}\, c_{-\nu} \left\{\frac{\alpha}{\nu+k+1} \lg x + 1\right\} \lg^{\nu+k} x \,+ \\ + \frac{c_{-0}\,\alpha}{k+1} \lg^{k+1} x + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} c_\nu \lg^{k-\nu} x \,- \\ - (-1)^k \rho_k(x), \end{aligned} \tag{7}$$

où

$$\rho_k(x) = k \int_x^\infty \frac{\rho_{k-1}(t)}{t}\, dt = O\,(1/x^\delta), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\rho_0(x) = \int_x^\infty \frac{d\,\{t^\alpha \rho(t)\}}{t^\alpha} = O\,(1/x^\delta),$$

et

$$c_\nu = \rho_\nu (1-0), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Lorsqu'on remplace l'hypothèse (6) par l'hypothèse que l'évaluation (7) est valable pour un $k = k_0 \geqslant 1$, avec

$$\rho_{k_0}(x) = O(1/x^\delta), \quad \delta > 0,$$

alors elle reste valable pour tout $k > k_0$, mais pas nécessairement pour $k < k_0$.

En comparant les expressions des coefficients c_ν de l'évaluation (7) ainsi obtenue à celle des coefficients de la partie entière de la série de Laurent (3), donnée par (4), on voit que ces derniers coefficients sont donnés par $(-1)^\nu c_\nu/\nu!$, car on peut vérifier directement que:

$$c_\nu = \int_{1-0}^{\infty} \frac{d\{t^\alpha \rho(t)\}}{t^\alpha} \lg^\nu t, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ce même résultat peut d'ailleurs être obtenu en remarquant d'une part que pour $R(s) > \alpha$,

$$\int_1^\infty \frac{dA_\alpha(\alpha, t)}{t^s}\, dt = \frac{k}{s} \int_1^\infty \frac{dA_{k-1}(\alpha, t)}{t^s} =$$

$$= \frac{k!}{s^k} \int_{1-0}^{\infty} \frac{dA_0(\alpha, t)}{t^s} =$$

$$= \frac{k!}{s^k}\, \bar{a}(s+\alpha),$$

c-à-d.

$$\bar{a}(s) = \frac{(s-\alpha)^k}{k!} \int_{1-0}^{\infty} \frac{dA_k(\alpha, t)}{t^{s-\alpha}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

d'autre part que, d'après (7),

$$\int_{1-0}^{\infty} \frac{dA_k(\alpha, t)}{t^{s-\alpha}} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{k!\,\nu!}{(k+\nu)!}\, c_{-\nu} \left\{ \alpha \frac{(k+\nu)!}{(s-\alpha)^{k+\nu+1}} + \frac{(k+\nu)!}{(s-\alpha)^{k+\nu}} \right\} +$$

$$+ \frac{c_{-0}\, k!\, \alpha}{(s-\alpha)^{k+1}} + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu k! \frac{c_\nu}{\nu!} (s-\alpha)^{\nu-k} - (-1)^k \int_1^\infty \frac{d\rho_k(t)}{t^{s-\alpha}} =$$

$$= s \sum_{\nu=0}^{N} \frac{k!\,\nu!\,c_{-\nu}}{(s-\alpha)^{\nu+k+1}} - \frac{k!\,c_{-0}}{(s-\alpha)^{k}} + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu}\, k!\, \frac{c_{\nu}}{\nu!} (s-\alpha)^{\nu-k} +$$

$$+ (-1)^{k+1} (s-\alpha) \int_{1}^{\infty} \frac{\rho_k(t)}{t^{s-\alpha+1}}\, dt,$$

puisque $\rho_k(1) = c_k$.

Ainsi

$$\bar{a}(s) = s \sum_{\nu=0}^{N} \frac{\nu!\,c_{-\nu}}{(s-\alpha)^{\nu+1}} - c_{-0} + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \frac{c_{\nu}}{\nu!} (s-\alpha)^{\nu}$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{k!} (s-\alpha)^{k+1} \int_{1}^{\infty} \frac{\rho_k(t)}{t^{s-\alpha+1}}\, dt,$$

ce qui équivaut au résultat obtenu précédemment et qu'on peut énoncer sous la forme du théorème suivant, en posant toutefois pour simplifier

$$f(n) = a(n)/n^{\alpha}$$

ou, ce qui revient au même, $\alpha = 0$.

THÉORÈME 2. *Soit*

$$F_k(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \lg^k x/n,$$

la k-ème somme de Riesz de la f.a. $f(n)$; *supposons que pour un k fixe on puisse l'évaluer par un polynôme en* $\lg x$ *au terme* $O(1/x^{\delta})$ *près, c-à-d. que*

$$F_k(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{k!\,\nu!}{(k+\nu)!} c_{-\nu} \lg^{k+\nu} x + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} c_{\nu} \lg^{k-\nu} x + \tag{8}$$

$$+ (-1)^{k+1} \rho_k(x),$$

avec

$$\rho_k(x) = O(1/x^{\delta}), \qquad \delta > 0.$$

Dans ce cas la série de Dirichlet

$$\bar{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^{s}$$

converge pour $R(s) > 0$ *et la f. g.* $\bar{f}(s)$ *est holomorphe pour* $R(s) > -\delta$, *à l'exception d'un pôle d'ordre* N *à l'origine. Son développement en série de Laurent au voisinage de ce pôle est de la forme*

$$\bar{f}(s) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\nu!\, c_{-\nu}}{s_{\nu}} + \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \frac{c_{\nu}}{\nu!} s^{\nu} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} s^{n+1} \int_{1}^{\infty} \frac{\rho_n(t)}{t^{s+1}} dt, \tag{9}$$

où

$$\rho_n(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{\rho_{n-1}(t)}{t} dt, \quad n = k+1, k+2, \ldots,$$

et

$$c_{\nu} = \rho_{\nu}(1-0), \quad \nu \geqslant k.$$

3. Lorsque la f. a. $f(n)$ a une allure suffisamment régulière, on peut facilement évaluer ses sommes de Riesz au terme $O(1/x^{\delta})$ près, même avec un ordre δ arbitrairement grand. Les cas dont nous aurons besoin sont

$$f(n) = 1/n \quad \text{et} \quad f(n) = \frac{\lg n}{n},$$

mais on peut obtenir ces évaluations pour des cas bien plus généraux, en particulier lorsque $f(n)$ est une fonction du type *lg-exp* de Hardy, c-à-d. une fonction que l'on obtient par l'application un nombre fini de fois des opérations rationnelles, de *lg* et d'*exp.* D'une manière plus précise, désignons par $\mathfrak{H}$ le corps des f. que l'on obtient par adjonction algébrique des *lg* et *exp* au corps des f. rationnelles à coefficients réels.

Les f. appartenant à $\mathfrak{H}$ sont de signe constant et monotones à partir d'un x et leur propriété essentielle est qu'elles sont comparables entre elles par rapport aux relations $\succ, \prec, \asymp$ (voir [1]).

En se basant sur ces propriétés, on peut établir, en premier lieu, le lemme suivant:

LEMME 1. *Supposons que* $f(x) \in \mathfrak{H}$ *et que*

$$f(x) = O\left(\frac{\lg^q x}{x^{\delta}}\right) \quad \text{où} \quad \delta > 0, \tag{10}$$

alors

$$f^{(k)}(x) = O\left(\frac{\lg^q x}{x^{k+\delta}}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

D é m o n s t r a t i o n Puisque
$$f'(x) \in \mathfrak{H},$$
cette fonction est comparable à $\lg^q x/x^{\delta+1}$; on aura donc ou bien
$$f'(x) = O\left(\lg^q x/x^{\delta+1}\right),$$
ou bien
$$|f'(x)| \succ \lg^q x/x^{\delta+1}.$$

Or, ce dernier cas est exclu car il en résulterait que
$$\int_x^\infty |f'(t)|\, dt \succ \int_x^\infty \frac{\lg^q t}{t^{\delta+1}}\, dt,$$
c-à-d. que
$$|f(x)| \succ \lg^q x/x^\delta,$$
puisque
$$\int_x^\infty |f'(t)|\, dt = |f(x)|$$
pour x suffisamment grand et
$$\int_x^\infty \frac{\lg^q t}{t^{\delta+1}}\, dt \sim \frac{\lg^q x}{\delta x^\delta},$$
qui est en contradiction avec (10).

En répétant le même raisonnement, par induction sur k, on obtient (11).

Nous pouvons maintenant passer au théorème concernant l'évaluation des sommes de Riesz lorsque $f(x) \in \mathfrak{H}$.

THÉORÈME 3. *Lorsque $f(x) \in \mathfrak{H}$ et satisfait à la relation*
$$f(x) = O\left(\frac{\lg^q x}{x^\delta}\right), \quad \delta > 0, \tag{10}$$
alors on a pour la k-ème somme de Riesz
$$F_k(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \lg^k x/n$$
l'évaluation suivante
$$F_k(x) = \int_1^x f(t) \lg^k x/t\, dt + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} c_\nu \lg^{k-\nu} x - (-1)^k \Delta_k(x), \tag{12}$$

avec

$$\Delta_k(x) = O\left(\frac{\lg^q x}{x^{k+\delta}}\right), \tag{13}$$

et en posant

$$s(t) = 1/2 + [t] - t,$$

on aura

$$\Delta_k(x) = \int_x^\infty f(t) \lg^k t/x \, d\, s(t), \tag{14}$$

et

$$c_\nu = \Delta_\nu(1-0) = \int_{1-0}^\infty \lg^\nu t f(t) \, d\, s(t), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

DÉMONSTRATION Quelque soit $k \geqslant 0$, on peut écrire:

$$F_k(x) = \int_{1-0}^x f(t) \lg^k x/t \, d\,[t] =$$

$$= \int_1^x f(t) \lg^k x/t \, dt + \int_{1-0}^x f(t) \lg^k x/t \, d\, s(t).$$

Puisque la dérivée de

$$f(t) \lg^k x/t$$

par rapport à t est monotone à partir d'un t et, d'après (10), tend vers 0 lorsque $t \to \infty$, l'intégrale

$$\int^\infty f(t) \lg^k x/t \, d\, s(t)$$

converge et l'on peut écrire

$$\int_{1-0}^x f(t) \lg^k x/t \, d\, s(t) = \int_{1-0}^\infty f(t) \lg^k x/t \, d\, s(t) - \int_x^\infty f(t) \lg^k x/t \, d\, s(t).$$

Dans la première intégrale du second membre développons

$$\lg^k x/t = (\lg x - \lg t)^k$$

à l'aide de la formule du binôme; on aura alors, d'après (15):

$$\int_{1-0}^{\infty} f(t) \lg^k x/t \, d s(t) = \int_{1-0}^{\infty} f(t) \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \lg^{k-\nu} x \lg^\nu t \, d s(t) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} c_\nu \lg^{k-\nu} x ,$$

ce qui donne, après (14), la relation (12).

Pour établir l'évaluation (13), remarquons que l'on peut écrire

$$\Delta_k(x) = \lim_{n \to \infty} \int_x^n f(t) \lg^k t/x \, d s(t) .$$

En intégrant par partie, on a

$$\int_x^n f(t) \lg^k t/x \, d s(t) = f(t) \lg^k t/x \, s(t) \Big|_x^n - \int_x^n \{f(t) \lg^k t/x\}' s(t) \, dt =$$

$$= f(n) \lg^k n/x \, s(n) - \int_x^n \{f(t) \lg^k t/x\}' \, d s_1(t) ,$$

où

$$s_1(x) = -\tfrac{1}{2} \{(x-[x])^2 - (x-[x]) + B_2\}, \quad B_2 = \tfrac{1}{6} ,$$

B_2 étant le premier nombre de Bernoulli et $s_1(x)$ la primitive harmonique de $s(x)$, c-à-d. la primitive satisfaisant à la relation

$$\int_0^1 s_1(t) \, dt = 0 .$$

Puisque d'après (10)

$$f(n) \lg^k n/x \to 0, \quad n \to \infty,$$

on obtient, en faisant $n \to \infty$,

$$\Delta_k(x) = - \int_x^\infty \varphi'(t) \, d s_1(t) ,$$

où

$$\varphi(t) = f(t) \lg^k t/x .$$

Après k intégrations par parties on obtient pour $\Delta_k(x)$ l'expression suivante

$$\Delta_k(x) = (-1)^k \int_x^\infty \varphi^{(k)}(t)\, ds_k(t),$$

où $s_k(t)$ est la k-ième primitive harmonique de $s(x)$, c-à-d. la primitive dont la primitive reste périodique; on a pour $s_k(x)$ l'expression suivante

$$s_k(x) = -\frac{1}{(k+1)!} B_{k+1}(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

où

$$B_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} b_\nu x^{k-\nu}$$

est le k-ième polynôme de Bernoulli et

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -1/2, \quad b_{2\nu} = (-1)^{\nu+1} B_{2\nu}, \quad b_{2\nu+1} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3 \ldots,$$

$B_{2\nu}$ étant les nombres de Bernoulli; ainsi

$$\frac{1}{t} - \frac{e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(x) t^\nu, \quad 0 < x < 1, \quad s_0(x) = s(x).$$

D'autre part

$$s_{2\nu}(x) = \frac{2(-1)^\nu}{(2\pi)^{2\nu+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n^{2\nu+1}}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$s_{2\nu-1}(x) = \frac{2(-1)^\nu}{(2\pi)^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^{2\nu}}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où l'on tire que

$$|s_k(x)| \leqslant 2/(2\pi)^{k+1} = M_k.$$

Intégrons une $(k+1)$-ème fois par parties

$$\Delta_k(x) = (-1)^k \lim_{n=\infty} \left\{ \varphi^{(k)}(t)\, s_k(t) \Big|_x^n - \int_x^n \varphi^{(k+1)}(t)\, s_k(t)\, dt \right\}.$$

Or si l'on considère

$$\varphi^{(k)}(t) = \{f(t) \lg^k (t/x)\}^{(k)},$$

on constate que chaque terme contient une puissance de $\lg t/x$ et par conséquent s'annule pour $t = x$ sauf un qui vaut

$$\frac{k!}{t^k} f(t).$$

Ainsi, après la $(k+1)$-ème intégration par parties, on obtient

$$\Delta_k(x) = \frac{k!\,(-1)^k\, s_k(x)\, f(x)}{x^k} - (-1)^k \int_x^\infty \varphi^{(k+1)}(t)\, s_k(t)\, dt,$$

et puisque

$$\left| \int_x^\infty \varphi^{(k+1)}(t)\, s_k(t)\, dt \right| \leqslant M_k \int_x^\infty |\varphi^{(k+1)}(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_k \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{k+1}{\nu} \int_x^\infty |f^{(\nu)}(t)|\, |(\lg^k t/x)^{(k+1-\nu)}|\, dt$$

on aura, d'après le lemme 1,

$$\int_x^\infty \varphi^{(k+1)}(t)\, s_k(t)\, dt = O\left\{ \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{k+1}{\nu} \int_x^\infty \frac{\lg^q t}{t^{\nu+\delta}}\, |(\lg^k t/x)^{(k+1-\nu)}|\, dt \right\},$$

d'où l'on tire l'évaluation (13).

4. Considérons dans ce paragraphe quelques f. a. particulières et les évaluations de leurs sommes de Riesz selon les théorèmes précédents.

Soit en premier lieu

$$f(n) = 1/n.$$

L'application directe du th. 3 donne pour les sommes de Riesz

$$H_k(x) \stackrel{def}{=} \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} \lg^k \frac{x}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

l'évaluation suivante

$$H_k(x) = \frac{\lg^{k+1} x}{k+1} + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} c_\nu \lg^{k-\nu} x - (-1)^k \Delta_k(x), \tag{16}$$

avec

$$\Delta_k(x) = \int_x^\infty \frac{\lg^k t/x}{t}\, d\, s(t) = O(1/x^{k+1}),$$

$$c_\nu = \int_{1-0}^\infty \frac{\lg^\nu t}{t}\, d\, s(t), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

où $c_0 = C$ est la constante d'Euler.

Puisque la f. g. de la suite $1/n$ est $\zeta(s+1)$, son développement en série de Laurent sera

$$\zeta(s+1) = \frac{1}{s} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{c_{\nu}}{\nu!} s^{\nu}, \tag{18}$$

les coefficients c_ν étant donnés par (17).

Soit en second lieu

$$f(n) = \frac{\lg n}{n}.$$

Le th. 3 donne dans ce cas

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\lg n}{n} \lg^k \frac{x}{n} = \frac{\lg^{k+2} x}{(k+1)(k+2)} + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} c_{\nu+1} \lg^{k-\nu} x - (-1)^k \Delta_k(x), \tag{19}$$

avec

$$\Delta_k(x) = \int_x^{\infty} \frac{\lg t}{t} \lg^k \frac{t}{x}\, d\, s(t) = O\left(\frac{\lg x}{x^{k+1}}\right),$$

les coefficients c_ν étant donnés par (17).

Puisque $-\zeta'(s+1)$ est la f. g. correspondante, on aura bien

$$-\zeta'(s+1) = \frac{1}{s^2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{c_{\nu+1}}{\nu!} s^{\nu}.$$

En troisième lieu considérons la f. a.

$$q(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = k^2, \\ 0 & \text{pour } n \neq k^2. \end{cases}$$

Puisque

$$\sum_{n \leqslant x} q(n) = [\sqrt{x}] = O(\sqrt{x}),$$

d'après le théorème 1 les sommes de Riesz de $q(n)/n$ peuvent être évaluées au terme $O(1/\sqrt{x})$ près, et il est facile à voir que

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{q(n)}{n} \lg^k x/n = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \delta_{\nu} \lg^{k-\nu} x + O(1/\sqrt{x}), \tag{19'}$$

avec

$$\delta_{\nu} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\lg^{\nu} \mu^2}{\mu^2}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots.$$

En effet,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{q(n)}{n}\lg^k\frac{x}{n}=\sum_{\mu\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{\mu^2}\lg^k\frac{x}{\mu^2}=$$

$$=\sum_{\mu\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{\mu^2}(\lg x-\lg\mu^2)^k=$$

$$\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}\lg^{k-\nu}x\sum_{\mu\leqslant\sqrt{x}}\frac{\lg^\nu\mu^2}{\mu^2}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}\delta_\nu\lg^{k-\nu}x-\Delta_k(x),$$

où, d'après le théorème 1,

$$\Delta_k(x)=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}\lg^{k-\nu}x\sum_{\mu\leqslant\sqrt{x}}\frac{\lg^\nu\mu^2}{\mu^2}=O(1/\sqrt{x}),$$

puisque

$$\Delta_k(x)\to 0,\quad x\to\infty.$$

Comme quatrième exemple dont nous aurons besoin dans la suite, considérons encore la f. a.

$$\tau(n)=\sum_{d\,|\,n}1,\quad \tau(1)=1,$$

dont la f. g. est

$$\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)/n^s.$$

Puisque sa f. s. est facilement évaluable au terme $O(\sqrt{x})$ près par

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)=x\lg x+(2C-1)x+O(\sqrt{x}),$$

où C est la constante d'Euler (v. p. exp. [2, p. 262]), on peut, d'après le th. 1, évaluer toutes les sommes de Riesz de $\tau(n)/n$ au terme $O(1/\sqrt{x})$ près:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\tau(n)}{n}\lg^k\frac{x}{n}=\frac{\lg^{k+2}x}{(k+1)(k+2)}+\frac{2C}{(k+1)}\lg^{k+1}x+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}\tau_\nu\lg^{k-\nu}x+O(1/\sqrt{x}),\tag{19''}$$

où les coefficients τ_ν sont donnés, suivant (17), (18) et le th. 2, du fait que

$$\zeta^2(s+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n}n^{-s}=\frac{1}{s^2}+\frac{2C}{s}+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{\tau_\nu}{\nu!}s^\nu,$$

par

$$\tau_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} c_\mu c_{\nu-\mu} - 2\,\frac{c_{\nu+1}}{\nu+1}\,.$$

Enfin lorsqu'on envisage les fonctions arithmétiques qui sont liées à la répartition des nombres premiers telles que les symboles de Möbius

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 1 \\ (-1)^k \text{ pour } n = p_1 p_2 \dots p_k, \\ 0 \text{ pour } n \neq p_1 p_2 \dots p_k, \end{cases}$$

ou les symboles de von Mangoldt

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \lg p \text{ pour } n = p^\alpha, \\ 0 \quad \text{pour } n \neq p^\alpha, \end{cases}$$

ou enfin les symboles de Liouville

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 1, \\ (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_k} \text{ pour } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \end{cases}$$

les évaluations de leurs sommes de Riesz, ou plutôt des sommes de Riesz de

$$\frac{\mu(n)}{n}, \quad \frac{\Lambda(n)}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda(n)}{n},$$

à un terme $O(1/x^\delta)$ près, quelque petit que fût $\delta > 0$, touchent à l'hypothèse de Riemann. En, effet les fonctions génératrices de ces fonctions arithmétiques étant

$$1/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n^s,$$

$$-\zeta'(s)/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)/n^s,$$

$$\zeta(2s)/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)/n^s,$$

toute évaluation des sommes de Riesz

$$\begin{aligned} g_k(x) &\overset{def}{=} \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \lg^k \frac{x}{n}, \\ m_k(x) &\overset{def}{=} \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} \lg^k \frac{x}{n}, \qquad (20) \\ l_k(x) &\overset{def}{=} \sum_{n \leqslant x} \frac{\lambda(n)}{n} \lg^k \frac{x}{n}, \end{aligned}$$

au terme $O(1/x^{\delta})$ près, évaluation qui serait, d'après le théorème 1, de la forme

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \alpha_{\nu} \lg^{k-\nu} x + O(1/x^{\delta}), \\ m_k(x) &= \frac{\lg^{k+1} x}{k+1} + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \beta_{\nu} \lg^{k-\nu} x + O(1/x^{\delta}), \\ l_k(x) &= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \gamma_{\nu} \lg^{k-\nu} x + O(1/x^{\delta}), \end{aligned} \tag{21}$$

entraînerait, d'après le th. 2, la régularité de $1/\zeta(s)$ pour $R(s) > 1-\delta$, c-à-d. le fait que $\zeta(s)$ n'aurait pas de zéro dans ce domaine. Ces deux affirmations sont d'ailleurs équivalentes car, du fait que $\zeta(s)$ n'a pas de zéro pour $R(s) > 1-\delta_0$, $0 < \delta_0 < 1/2$, il résulte, d'après les théorèmes connus [7, p. 314], que

$$\begin{aligned} M(x) &\overset{def}{=} \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = O(1/x^{\delta}), \\ \psi(x) &\overset{def}{=} \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = x + O(1/x^{\delta}), \\ L(x) &\overset{def}{=} \sum_{n \leqslant x} \lambda(n) = O(1/x^{\delta}), \end{aligned}$$

pour tout $0 < \delta < \delta_0$ ce qui entraîne, d'après le théorème 1, les évaluations (21).

D'autre part, comme nous le verrons par la suite, les évaluations des sommes de Riesz (20) à $o(1)$ près, c-à-d. les évaluations

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \alpha_{\nu} \lg^{k-\nu} x + o(1), \\ m_k(x) &= \frac{\lg^{k+1} x}{k+1} + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \beta_{\nu} \lg^{k-\nu} x + o(1), \\ l_k(x) &= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \gamma_{\nu} \lg^{k-\nu} x + o(1), \end{aligned} \tag{22}$$

ont comme conséquence le théorème des nombres premiers; seules les évaluations de ces mêmes sommes à $O(1)$ près, c-à-d. les relations

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \alpha_{\nu} \lg^{k-\nu} x + O(1), \\ m_k(x) &= \frac{\lg^{k+1} x}{k+1} + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \beta_{\nu} \lg^{k-\nu} x + O(1), \\ l_k(x) &= \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} \gamma_{\nu} \lg^{k-\nu} x + O(1), \end{aligned} \tag{23}$$

sont de nature strictement élémentaire.

A ce sujet, remarquons que les évaluations

$$\begin{aligned} M(x) &= O(x), \\ \Psi(x) &= O(x), \\ L(x) &= O(x), \end{aligned} \tag{24}$$

et même les évaluations

$$\begin{aligned} M(x) &= o(x), \\ \Psi(x) &= x + o(x), \\ L(x) &= o(x), \end{aligned} \tag{25}$$

(ces dernières étant équivalentes au théorème des nombres premiers) ne sont plus une implication directe des évaluations correspondantes (23) des sommes de Riesz (20) et à plus forte raison des évaluations (22).

L'inverse n'a pas lieu non plus dans le cas général. Toutefois les fonctions arithmétiques envisagées étant bornées d'un côté

$$(22) \to (25)$$

et

$$(23) \to (24),$$

fait que nous allons établir, en le généralisant, dans le paragraphe suivant.

5. D'une manière générale, lorsque, dans le théorème 1, on pose dans (6) $\delta = 0$, c-à-d. lorsqu'on on ne suppose que

$$\rho(x) = O(1),$$

ce théorème n'est plus valable, c-à-d. que $A_k(\alpha, x)$ n'est plus nécessairement évaluable par une expression de la forme (7) avec $\rho_k(x) = O(1)$ et ce fait subsiste même si l'on suppose dans (6) que

$$\rho(x) = o(1).$$

On peut le voir facilement; il suffit, par exemple, de remarquer que

$$\sum_{n \leqslant x} a(n) = x + o(x) \not\to \sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n} = \lg x + O(1),$$

on bien que

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n} = \lg x + c + o(1) \not\to \sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n} \lg \frac{x}{n} = \frac{1}{2} \lg^2 x + c \lg x + O(1).$$

D'autre part, *pour* $\alpha > 0$, (7) *avec* $k = 0$ *et*

$$\rho_0(x) = O(1), \quad \textit{respectivement} \quad = o(1),$$

implique (6) *avec*

$$\rho(x) = O(1), \text{ respectivement } = o(1).$$

On a, en effet,

$$A(x) = \int_{1-0}^{x} t^{\alpha}\, dA_0(\alpha, t) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} c_{-\nu} \int_{1}^{x} t^{\alpha-1} \{\alpha \lg^{\nu} t + \nu \lg^{\nu-1} t\}\, dt + c_{-0}\, x^{\alpha} -$$

$$- c_{-0} - \int_{1-0}^{x} t^{\alpha} \rho_0(t)\, dt =$$

$$= x^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{N} c_{-\nu} \lg^{\nu} x - c_{-0} + \rho_0(1-0) - x^{\alpha} \rho_0(x) +$$

$$+ \alpha \int_{1}^{x} t^{\alpha-1} \rho_0(t)\, dt =$$

$$= x^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{N} c_{-\nu} \lg^{\nu} x + x^{\alpha} \rho(x),$$

où

$$\rho(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha}} \int_{1}^{x} t^{\alpha-1} \rho_0(t)\, dt - \rho_0(x) + \{\rho_0(1-0) - c_{-0}\}\, x^{-\alpha}.$$

Mais ce fait n'a plus lieu lorsque $k \geqslant 1$ et, en général, il n'existe pas de relations entre les évaluations (7) pour les différentes valeurs de $k \geqslant 0$ lorsque

$$\rho(x) = O(1), \text{ respectivement } o(1).$$

Toutefois lorsque la suite $a(n)$ satisfait à certaines conditions de nature taubérienne, on peut déduire des évaluations de $A_k(\alpha, x)$, $k \geqslant 1$, l'évaluation correspondante pour $A_0(\alpha, x)$. Pour le montrer considérons ces mêmes expressions mises sous la forme (8); il s'agit alors de démontrer les théorèmes suivants:

THÉORÈME 4. *Soit* $f(n)$ *une fonction arithmétique,*

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n)$$

sa fonction somme et

$$F_k(x) = k \sum_{n \leqslant x} f(n) \lg^k \frac{x}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

ses sommes de Riesz qui satisfont à la relation de récurrence

$$F_k(x) = k \int_1^x \frac{F_{k-1}(t)}{t} \, dt, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

avec $F_0(x) = F(x)$.

Posons encore

$$\Delta_\lambda \{F(x)\} = F(\lambda x) - F(x);$$

de

$$F_k(x) = P_{N+k}(\lg x) + o(1), \quad x \to \infty, \tag{26}$$

où $P_{N+k}(\lg x)$, $N \geqslant 0$, *est un polynôme de degré* $N+k$ *en* $\lg x$, *il résulte*

$$F(x) = \frac{1}{k!} P^{(k)}_{N+k}(\lg x) + o(1), \quad x \to \infty, \tag{27}$$

toutes les fois que $F(x)$ *satisfait aux conditions*

$$\Delta_t \Delta_{\lambda_{N-1}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F(x)\} \geqslant -M, \tag{28}$$

pour $x \geqslant 1$, $1 \leqslant t \leqslant \lambda_N$ *avec* $\lambda_i > 1$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *et fixes,*

$$\liminf_{\lambda_N = 1} \ \liminf_{x = \infty} \Delta_{\lambda_N} \Delta_{\lambda_{N-1}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F(x)\} \geqslant 0. \tag{29}$$

THÉORÈME 4'. *De* (26) *avec* $O(1)$ *à la place de* $o(1)$ *et* (28) *il résulte* (27) *avec* $O(1)$ *à la place de* $o(1)$.

Pour établir ces théorèmes nous démontrerons d'abord les lemmes suivants.

LEMME 2. *Soit* $\rho(x)$ *à variation bornée dans tout intervalle fini pour* $x \geqslant 1$; *de*

$$\Phi(x) = \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t} \, dt = a + o(1), \quad x \to \infty, \tag{30}$$

et

$$\Delta_t \Delta_{\lambda_{n-1}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x)\} \geqslant -M, \quad \text{pour } x \geqslant 1, \tag{31}$$

$$1 \leqslant t \leqslant \lambda_n, \quad \lambda_i > 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ et fixes,}$$

avec

$$\liminf_{\lambda_n = 1} \ \liminf_{x = \infty} \Delta_{\lambda_n} \Delta_{\lambda_{n-1}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x)\} \geqslant 0, \tag{32}$$

il résulte que

$$\varphi(x) = o(1), \quad x \to \infty. \tag{33}$$

Démonstration. De (30) on tire

$$\int_1^{\lambda} \varphi(tx) \frac{dt}{t} = \Delta_\lambda \{\Phi(x)\} = o(1), \quad x \to \infty,$$

ainsi que

$$\int_1^{\lambda_n} \Delta_{\lambda_{n-1}} \Delta_{\lambda_{n-2}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(tx)\} \frac{dt}{t} = \Delta_{\lambda_n} \Delta_{\lambda_{n-1}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\Phi(x)\} = o(1), \quad x \to \infty.$$

Par suite

$$\Delta_{\lambda_{n-1}} \Delta_{\lambda_{n-2}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x)\} \lg \lambda_n = - \int_1^{\lambda_n} \Delta_t \Delta_{\lambda_{n-1}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x)\} \frac{dt}{t} + o(1),$$

d'où l'on tire, d'après (31), par l'application du lemme de Fatou, selon lequel

$$f_n(x) \geqslant -M \to \liminf_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \geqslant \int_a^b \liminf_{n=\infty} f_n(x)\,dx,$$

que:

$$\limsup_{x=\infty} \Delta_{\lambda_{n-1}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x)\} \lg \lambda_n \leqslant - \int_1^{\lambda_n} \liminf_{x=\infty} \Delta_t \Delta_{\lambda_{n-1}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x)\} \frac{dt}{t}.$$

En divisant cette inégalité par $\lg \lambda_n$ et en faisant $\lambda_n \to 1$, on en déduit, d'après (32), que

$$\limsup_{x=\infty} \Delta_{\lambda_{n-1}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x)\} \leqslant 0.$$

D'autre part, puisque (31) et (32) entraînent:

$$\Delta_{\lambda_n/t} \Delta_{\lambda_{n-1}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(tx)\} = \Delta_{\lambda_{n-1}} \Delta_{\lambda_{n-2}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(\lambda_n x)\} - \\ - \Delta_{\lambda_{n-1}} \Delta_{\lambda_{n-2}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(tx)\} \geqslant -M,$$

pour $1 \leqslant tx$ et $1 \leqslant t \leqslant \lambda_n$, ainsi que

$$\liminf_{\lambda_n=1} \liminf_{x=\infty} \Delta_{\lambda_n/t} \Delta_{\lambda_{n-1}} \cdots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(tx)\} \geqslant 0,$$

des considérations analogues aux précédentes donnent

$$\Delta_{\lambda_{n-1}} \Delta_{\lambda_{n-2}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(\lambda_n x)\} \lg \lambda_n = \int_1^{\lambda_n} \Delta_{\lambda_n/t} \Delta_{\lambda_{n-1}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(tx)\} \frac{dt}{t} + o(1),$$

d'où l'on tire que

$$\liminf_{x=\infty} \Delta_{\lambda_{n-1}} \Delta_{\lambda_{n-2}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(\lambda_n x)\} = \liminf_{x=\infty} \Delta_{\lambda_{n-1}} \Delta_{\lambda_{n-2}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x)\} \geqslant 0.$$

Par suite

$$\Delta_{\lambda_{n-1}} \Delta_{\lambda_{n-2}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x)\} \to 0, \quad x \to \infty, \tag{34}$$

quel que soit $\lambda_i > 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ fixes.

Or cette relation entraîne les inégalités (31) et (32) avec $n-1$ à la place de n, car (32) est évidemment contenu dans (34) et si (34) avec $\lambda_{n-1} = t$ a lieu pour tout $1 \leqslant t \leqslant \lambda_{n-1}$, elle a lieu uniformément par rapport à t. Ainsi l'affirmation (33) résulte par induction sur n.

Remarquons qu'un raisonnement analogue nous permet d'établir le emme correspondant suivant.

LEMME 2'. *De* (30) *avec* $O(1)$ *à la place de* $o(1)$ *et* (31), *il résulte* (33) *avec* $O(1)$ *à la place de* $o(1)$.

Etant donné que dans les conditions (31) et (32) figurent les n-ièmes différences de $\varphi(x)$, en ajoutant à $\varphi(x)$ un polynôme de degré n en $\lg x$ ces conditions restent satisfaites car si

$$P(\lg x) = c \lg^n x + \ldots$$

on aura

$$\Delta_{\lambda_n} \Delta_{\lambda_{n-1}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x) + P(\lg x)\} = \Delta_{\lambda_n} \Delta_{\lambda_{n-1}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{\varphi(x)\} + n! c \lg \lambda_1 \ldots \lg \lambda_n .$$

En remplaçant donc l'hypothèse (30) par

$$\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t} dt = P_{n+1}(\lg x) + o(1),$$

où $P_{n+1}(\lg x)$ est un polynôme de degré $(n+1)$ en $\lg x$, puisque

$$\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t} dt - P_{n+1}(\lg x) + P_{n+1}(0) = \int_1^x \frac{\varphi(t) - P'_{n+1}(\lg t)}{t} dt,$$

on peut déduire des lemmes 2 et 2' l'extension suivante.

LEMME 3. *De*

$$\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = P_{n+1}(\lg x) + o(1), \quad x \to \infty, \tag{35}$$

il résulte

$$\varphi(x) = P'_{n+1}(x) + o(1), \quad x \to \infty, \tag{36}$$

lorsque $\varphi(x)$ *satisfait aux conditions* (31) *et* (32).

Cette affirmation reste valable lorsqu'on remplace dans (35) *et* (36) $o(1)$ *par* $O(1)$ *en négligeant toutefois la condition* (32).

Lorsqu'on pose dans ce lemme

$$n = N \quad \text{et} \quad \varphi(x) = F(x)$$

il se réduit aux théorèmes 4 et 4′ avec $k = 1$. Par suite, pour établir ces th. par induction sur k, il suffit de montrer que, lorsque $F(x)$ satisfait aux conditions (28) et (29), alors $F_p(x)$, quel que soit $p = 1, 2, 3 \ldots$, satisfait aux conditions

$$\Delta_t \Delta_{\lambda_{N+p-1}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F_p(x)\} \geqslant -M_p, \quad x \geqslant 1, \quad 1 \leqslant t \leqslant \lambda_{N+p}, \tag{37}$$

et

$$\liminf_{\lambda_{N+p}=1} \liminf_{x=\infty} \Delta_{\lambda_{N+p}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F_p(x)\} \geqslant 0, \tag{38}$$

c-à-d. à ces mêmes conditions avec $N+p$ au lieu de N.

A cet effet, remarquons que

$$\Delta_{\lambda_{N+1}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F_1(x)\} = \int_1^{\lambda_{N+1}} \frac{dt_1}{t_1} \Delta_{\lambda_N} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F(t_1 x)\},$$

d'où

$$\Delta_{\lambda_{N+2}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F_2(x)\} = 2 \int_1^{\lambda_{N+2}} \frac{dt_2}{t_2} \Delta_{\lambda_{N+1}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F_1(t_2 x)\} =$$

$$= 2 \int_1^{\lambda_{N+2}} \frac{dt_2}{t_2} \int_1^{\lambda_{N+1}} \frac{dt_1}{t_1} \Delta_{\lambda_N} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F(t_1 t_2 x)\}$$

et, par induction sur p, on obtient que pour tout $p = 1, 2, 3 \ldots$,

$$\Delta_{\lambda_{N+p}} \Delta_{\lambda_1} \{F_p(x)\} = p! \int_1^{\lambda_{N+p}} \frac{dt_p}{t_p} \int_1^{\lambda_{N+p-1}} \frac{dt_{p-1}}{t_{p-1}} \ldots \int_1^{\lambda_{N+1}} \frac{dt_1}{t_1} \Delta_{\lambda_N} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F(t_1 t_2 \ldots t_p x)\}.$$

On en déduit de la seule condition (28) que

$$\Delta_{\lambda_{N+p}} \ldots \Delta_{\lambda_1} \{F_p(x)\} \geqslant - p!\, M \lg \lambda_{N+1} \lg_{N+2} \ldots \lg \lambda_{N+p},$$

qui implique évidemment les deux conditions (37) et (38).

Ainsi, par application successive du lemme (3) à

$$\varphi(x) = F_p(x),$$

avec

$$n = N + p + 1, \quad p = 1,2, \ldots k-1,$$

les th. 4 et 4' se trouvent établis.

Remarquons que le cas particulier des théorèmes 4 et 4' dont nous aurons besoin, surtout pour les cas particuliers mentionnés au §, 3 est celui où $N = 1$. Dans ce cas les conditions (28) et (29) portent sur la première différence

$$F(\lambda x) - F(x)$$

de $F(x)$ et lorsque

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n),$$

ces deux conditions seront satisfaites si

$$f(n) \geqslant - M/n,$$

car

$$F(\lambda x) - F(x) = \sum_{x < n \leqslant \lambda x} f(n) \geqslant - M \sum_{x < n \leqslant \lambda x} 1/n \geqslant - M \left\{\lg \lambda + \lg \frac{x}{x-1}\right\}.$$

On obtient ainsi le cas particulier suivant:

THÉORÈME 5. *En conservant les notations du théoréme 4 de*

$$F_k(x) = P_{k+1}(\lg x) + o(1), \quad resp. \quad + O(1), \tag{39}$$

il résulte

$$F(x) = \frac{1}{k!} P^{(k)}_{k+1}(\lg x) + o(1), \quad resp. \quad + O(1), \tag{40}$$

toutes les fois que

$$f(n) \geqslant - M/n, \quad n = 1,2, \ldots \tag{41}$$

En posant dans ce dernier théorème successivement

$$f(n) = \mu(n)/n, \quad = \Lambda(n)/n, \quad = \lambda(n)/n,$$

la condition (41) se trouve remplie; par suite, les relations (22) resp. (23) entraîneraient les suivantes

$$g(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)/n = \alpha_0 + o(1) \quad \text{resp.} \quad + O(1),$$

$$m(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)/n = \lg x + \beta_0 + o(1) \quad \text{resp.} \quad + O(1),$$

$$l(x) = \sum_{n \leqslant x} \lambda(n)/n = \gamma_0 + o(1) \quad \text{resp.} \quad + O(1),$$

et ces dernières relations, d'après les remarques faites au début de ce paragraphe, impliquent les relations (25) resp. (24).

Ainsi les évaluations (22) contiennent le théorème des nombres premiers, mais inversement de ce th. on ne peut même pas déduire directement les évaluations (23) que nons établirons par voie élémentaire au § 7.

6. Avant de passer aux théorèmes qui permettent d'obtenir les évaluations (23), nous allons donner, en restant dans le cas général, certaines conséquences qui découlent des évaluations des sommes de Riesz données par

$$F_k(x) = P_{N+k}(\lg x) + o(1), \quad \text{resp. } O(1).$$

En premier lieu, on peut établir un théorème analogue au théorème 2, mais cette fois-ci, au lieu d'obtenir pour la f. g. $\bar{f}(s)$ une série de Laurent convergente au voisinage de l'origine, on ne peut en déduire qu'une série asymptotique relative à „$s \to +0$" au terme $o(s^k)$, resp. $O(s^k)$ près.

On obtient en effet par un calcul analogue à celui du § 2 le théorème suivant:

THÉORÈME 6. *Lorsque la k-ième somme de Riesz*

$$F_k(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \lg^k \frac{x}{n}$$

est évaluable par une expression de la forme

$$F_k(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{k!\,\nu!}{(k+\nu)!} c_{-\nu} \lg^{k+\nu} x + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} c_\nu \lg^{k-\nu} x + \rho(x), \tag{42}$$

avec

$$\rho(x) = o(1), \quad \text{resp.} \; = O(1), \quad x \to \infty,$$

alors la série de Dirichlet

$$\bar{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)/n^s$$

converge pour $R(s) > 0$ *et la f. g. est développable au voisinage de* $s = +0$ *en une série asymptotique de la forme*

$$\bar{f}(s) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\nu!\, c_{-\nu}}{s^\nu} + \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{c_\nu}{\nu!} s^\nu + o(s^k), \quad \text{resp.} \quad + O(s^k). \tag{43}$$

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'identité

$$\bar{f}(s) = \frac{s^k}{k!} \int_{1-0}^{\infty} \frac{dF_k(t)}{t^s}$$

dans laquelle il suffit de remplacer $F_k(t)$ par l'évaluation (42). On obtient en effet, pour $s > 0$,

$$\bar{f}(s) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\nu!\, c_{-\nu}}{s^\nu} + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \frac{c_\nu}{\nu!} s^\nu + \frac{s^k}{k!} \int_{1-0}^{\infty} \frac{d\rho(t)}{t^s} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\nu!\, c_{-\nu}}{s^\nu} + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \frac{c_\nu}{\nu!} s^\nu - \frac{\rho(1-0)}{k!} s^k + \frac{s^{k+1}}{k!} \int_{1}^{\infty} \frac{\rho(t)}{t^{1+s}} dt,$$

d'où l'on déduit (43) puisque, d'après (42),

$$-\rho(1-0) = (-1)^k c_k$$

et

$$\rho(t) = o(1), \quad \text{resp.} \quad = O(1), \quad t \to \infty,$$

implique

$$s \int_{1}^{\infty} \frac{\rho(t)}{t^{1+s}} dt = o(1), \quad \text{resp.} \quad = O(1), \quad s \to +0.$$

Une seconde conséquence d'une évaluation de la forme

$$F_k(x) = P_{N+k}(\lg x) + O(1),$$

a le caractère d'une affirmation de Tchebycheff [4, *p.* 11—18, 140—150] relative à

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1,$$

d'après laquelle, si

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lg^q x}{x} \left\{ \pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\lg t} \right\}$$

existe, cette limite est nécessairement égale à zéro, quel que soit $q \geqslant 1$.

En restant dans le cas général, on peut la formuler par le théorème suivant:

THÉORÈME 7. *Lorsque la k-ième somme de Riesz*

$$F_k(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \lg^k \frac{x}{n}, \quad k \geqslant 1,$$

est évaluable par une expression de la forme

$$F_k(x) = P_{N+k}(\lg x) + O(1), \tag{44}$$

où $P_{N+k}(\lg x)$ est un polynôme de degré $N+k$ en $\lg x$, et si la fonction somme

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n)$$

est développable en une série asymptotique suivant les puissances négatives de $\lg x$ jusqu'au terme $o(1/\lg^q x)$, $q \leqslant k$, près, cette série est nécessairement de la forme

$$F(x) = \sum_{\nu=-N}^{q} A_\nu / \lg^\nu x + o(1/\lg^q x), \tag{45}$$

avec

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_q = 0.$$

En d'autres termes, si

$$\lim_{x=\infty} \lg^q x \left\{ F(x) - \sum_{\nu=0}^{N} A_{-\nu} \lg^\nu x \right\}, \quad q \leqslant k,$$

existe, cette limite est nulle.

En effet, si la relation (45), c-à-d.

$$F(x) = P_N(\lg x) + \frac{A_1}{\lg x} + \frac{A_2}{\lg^2 x} + \ldots\ldots + \frac{A_q}{\lg^q x} + o(1/\lg^q x)$$

a lieu pour $q > 1$, on peut la diviser par x et intégrer terme à terme et l'on obtient

$$F_1(x) = P_{N+1}(\lg x) + A_1 \lg\lg x - \frac{A_2}{\lg x} - \frac{A_3}{2\lg^2 x} - \ldots - \frac{A_q}{(q-1)\lg^{q-1} x} + \\ + o(1/\lg^{q-1} x);$$

car, de

$$\varphi(x) = o(1/\lg^q x) \quad \text{et} \quad q > 1,$$

il résulte

$$\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}\, dt = c + o(1/\lg^{q-1} x).$$

En répétant cette opération r fois, on obtiendrait

$$F_r(x) = P_{N+r}(\lg x) + r \lg\lg x \left\{ \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \binom{r-1}{\nu} A_{\nu+1} \lg^{r-1-\nu} x \right\} +$$

$$+ (-1)^r \left\{ \frac{A_{r+1}}{\lg x} + \frac{r!\,1!}{(r+1)!} \frac{A_{r+2}}{\lg^2 x} + \frac{r!\,2!}{(r+2)!} \frac{A_{r+3}}{\lg^3 x} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{r!\,(q-r-1)!}{(q-1)!} \frac{A_q}{\lg^{q-r} x} \right\} + o(1/\lg^{q-r} x),$$

si $r < q$; si $r = q$, la dernière accolade ne figurerait pas et $o(1/\lg^{q-r})$ serait à remplacer par $o(\lg\lg x)$, car de

$$\varphi(x) = o(1/\lg x),$$

il résulte

$$\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}\, dt = o(\lg\lg x).$$

En comparant l'expression ainsi obtenue à l'évaluation (44), supposée satisfaite, on constate que tous les termes qui contiennent $\lg\lg x$ ne peuvent y figurer; il faut donc que

$$A_\nu = 0 \quad \text{pour tout } \nu = 1, 2, \ldots, q.$$

Le théorème 7 est ainsi démontré.

A titre d'application, remarquons que ce théorème comprend comme cas particulier l'affirmation de Tchebycheff mentiononée plus haut.

En effet, de la seconde des relations (23),

$$m_k(x) = \frac{\lg^{k+1} x}{k+1} + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \beta_\nu \lg^{k-\nu} x + O(1),$$

qui est valable pour tout $k \geqslant 0$ (ce que nous établirons au paragraphe suivant), il résulte, d'après le théorème 7, que, si

$$m_0(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)/n$$

est développable en une série asymptotique suivant les puissances decroissantes de $\lg x$, cette série a nécessairement la forme

$$m_0(x) = \lg x - O + o(1/\lg^q x)$$

quel que soit $q \geqslant 1$. Il s'en suit, en tenant compte de

$$\Psi(x) = \int_{1-0}^{x} t\, d\, m_0(t) = x m_0(x) - \int_{1}^{x} m_0(t)\, dt$$

que, si $\Psi(x)/x$ admet un développement asymptotique, il doit être de la forme

$$\Psi(x)/x = \lg x - C + o(1/\lg^q x) - \frac{1}{x}\int_{1}^{x} \lg t\, dt + \frac{C}{x}\int_{1}^{x} dt + o\left(\frac{1}{x}\int_{2}^{x}\frac{dt}{\lg^q t}\right) =$$

$$= \lg x - C - \lg x + 1 + C - C/x + o(1/\lg^q x) = 1 + o(1/\lg^q x).$$

D'autre part, du fait que

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \lg p/p = \Psi(x) + O(\sqrt{x}\lg x).$$

on aurait de même

$$\vartheta(x)/x = 1 + o(1/\lg^q x),$$

c-à-d.

$$\vartheta(x) = x + r(x),$$

avec

$$r(x) = o(x/\lg^q x).$$

Par suite, de

$$\pi(x) = \int_{2-0}^{x} \frac{d\,\vartheta(t)}{\lg t}$$

on obtient

$$\pi(x) = \int_{2}^{x} \frac{dt}{\lg t} + \int_{2-0}^{x} \frac{dr(t)}{\lg t} =$$

$$= \int_{2}^{x} \frac{dt}{\lg t} + \frac{r(x)}{\lg x} - \frac{r(2-0)}{\lg 2} + \int_{2}^{x} \frac{r(t)}{t \lg^2 t}\, dt =$$

$$= \int_{2}^{x} \frac{dt}{\lg t} + o(x/\lg^{q+1} x),$$

ce qui équivaut à l'affirmation de Tchebycheff.

7. Lorsqu'on ne peut pas évaluer les sommes de Riesz de fonctions arithmétiques par voie directe, comme cela a été fait au § 3 pour les fonctions élémentaires du corps $\mathfrak{H}$, on peut obtenir certaines de ces évaluations, par exemple les évaluations (23), en passant par les produits de composition relatifs aux fonctions arithmétiques envisagées.

Soient

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n) \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n \leqslant x} b(n)$$

les f. s. des f. a. $a(n)$ et $b(n)$; par produit de composition des f. s. $A(x)$ et $B(x)$ j'entends l'expression

$$A(x) * B(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n)\, B(x/n),$$

où

$$C(x) = A(x) * B(x)$$

est la f. s. de la f. a. $c(n)$ donnée par le produit de Dirichlet des *f. a.* $a(n)$ et $b(n)$, c-à-d. où

$$C(x) = \sum_{n \leqslant x} c(n),$$

avec

$$c(n) = \sum_{d \mid n} a(d)\, b(n/d).$$

Enfin, $\bar{a}(s)$ et $\bar{b}(s)$ étant les f. g. de $a(n)$ resp. $b(n)$, c-à-d.

$$\bar{a}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^s \quad \text{et} \quad \bar{b}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)/n^s,$$

la f. g.

$$\bar{c}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)/n^s$$

des $c(n)$ est donnée par

$$\bar{c}(s) = \bar{a}(s)\, \bar{b}(s).$$

Ceci posé, il s'agit de montrer que, dans certains cas, on peut évaluer les sommes de l'un des facteurs $a(n)$ ou $b(n)$ connaissant une évaluation suffisante des sommes de Riesz de l'autre facteur et du produit $c(n)$.

Nous nous bornerons ici strictement au cas qui nous permettra d'obtenir les relations (23). Dans ce but, il suffit de considérer les produits de composition de la forme

$$\sum_{n \leqslant x} a(n)\,[x/n] = C(x),$$

avec

$$B(x) = [x] = \sum_{n \leqslant x} 1,$$

c-à-d.

$$\bar{b}(s) = \zeta(s)$$

et d'envisager le cas où $N = 1$, c-à-d. de supposer que $C(x)$ est de l'ordre de grandeur de $x \lg x$. Dans ces conditions on peut obtenir une évaluation des sommes de Riesz de la f. a. $a(n)/n$ ayant la forme des évaluations (23); on peut énoncer ce résultat sous la forme du théorème suivant:

THÉORÈME 8. *Soit $a(n)$ une f. a. satisfaisant à la condition*

$$a(n) \geqslant -M; \tag{46}$$

supposons que son produit de composition

$$\sum_{n \leqslant x} a(n)[x/n] = C(x) \tag{47}$$

est évaluable par

$$C(x) = gx \lg x + O(x) \tag{48}$$

et que les sommes de Riesz

$$G_k(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{c(n)}{n} \lg^k \frac{x}{n}, \quad k = 0,1,2,..,$$

de la f. a.

$$\frac{c(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} a(d),$$

possèdent une évaluation correspondante de la forme

$$G_k(x) = \frac{g}{(k+1)(k+2)} \lg^{k+2} x + \frac{g}{k+1} \lg^{k+1} x + \\ + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} g_\nu \lg^{k-\nu} x + O(1). \tag{49}$$

Ces hypothèses faites, les sommes de Riesz de $a(n)/n$ peuvent être évaluées par

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n} \lg^k \frac{x}{n} = \frac{g}{k+1} \lg^{k+1} x + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} a_\nu \lg^{k-\nu} x + O(1). \tag{50}$$

Remarquons d'abord que, d'après le théorème 6, il suffit de démontrer qu'une évaluation de la forme (50) existe, car, dans ce cas, la f. g. $\bar{a}(s+1)$ des $a(n)/n$, qui est égale à

$$\bar{c}(s+1)/\zeta(s+1),$$

possède un développement asymptotique pour $s \to +0$, et la structure des coefficients de l'évaluation (50) ainsi que les coefficients a_ν sont alors donnés par

$$\frac{\bar{c}(s+1)}{\zeta(s+1)} = \frac{g}{s} + \sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu \frac{a_\nu}{\nu!} s^\nu + O(s^k).$$

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que

$$a(n) \geqslant 0; \tag{51}$$

il suffit, en effet, d'après (46), de remplacer

$$a(n) \quad \text{par} \quad a(n) + M$$

et

$$C(x) \quad \text{par} \quad C(x) + M\,S(x)$$

où

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} [x/n] = \sum_{n \leqslant x} \tau(n);$$

car, lorsque $C(x)$ satisfait aux conditions (48) et (49), $C(x) + M\,S(x)$ les satisfait aussi d'après l'évaluation (19″) établie au § 4.

En supposant donc (51) satisfait, nous montrerons en premier lieu que (47) et (48) impliquent

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a(n) = O(x) \tag{52}$$

et

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n} = c \lg x + O(1). \tag{53}$$

En effet de

$$C(x) - 2\,C(x/2) = \sum_{n \leqslant x} a(n)\{[x/n] - 2\,[x/2n]\} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{x/2 < n \leqslant x} a(n) \geqslant$$
$$\geqslant A(x) - A(x/2),$$

il résulte, d'après (48), que

$$A(x) - A(x/2) = O(x),$$

qui implique (52).

Par suite

$$\begin{aligned} x \sum_{n \leqslant x} a(n)/n &= C(x) + \sum_{n \leqslant x} a(n) \{x/n - [x/n]\} \leqslant \\ &\leqslant gx \lg x + A(x) + O(x) \leqslant \\ &\leqslant gx \lg x + O(x), \end{aligned}$$

qui équivaut à (53).

Pour établir la relation (50), remarquons d'abord que de

$$\int_{1-0}^{x} \lg^k \frac{x}{t} \frac{dC(t)}{t} = \sum_{n \leqslant x} \frac{c(n)}{n} \lg^k \frac{x}{n} = G_k(x),$$

en posant

$$H_k(x) = \int_{1-0}^{x} \lg^k \frac{x}{t} \frac{d[t]}{t} = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{n} \lg^k \frac{x}{n},$$

on obtient, d'après (47),

$$\begin{aligned} G_k(x) &= \int_{1-0}^{x} \frac{1}{t} \lg^k \frac{x}{t} d \Big\{ \sum_{\substack{n \leqslant t \\ \leqslant x}} a(n) [t/n] \Big\} = \\ &= \sum_{n \leqslant x} a(n) \int_{1-0}^{x} \lg^k \frac{x}{t} \frac{d[t/n]}{t} = \\ &= \sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n} \int_{1-0}^{x} \lg^k \frac{x/n}{t} \frac{d[t]}{t}, \end{aligned}$$

c-à-d.

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n} H_k(x/n) = G_k(x). \tag{54}$$

Or, d'après les évaluations (16) établies au § 4, on a pour tout $q = 1,2, \ldots k$,

$$\frac{1}{q} \lg^q x + \sum_{\nu=0}^{q-1} (-1)^\nu \binom{q-1}{\nu} c_\nu \lg^{q-1-\nu} x = H_{q-1}(x) + O(1/x);$$

des ces k relations on peut éliminer $\lg^\nu x$, $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$, et exprimer $\lg^k x$ linéairement en fonction de $H_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$, ce qui donne

$$\lg^k x = \sum_{\nu=0}^{k-1} A_\nu^k H_{k-1-\nu}(x) + A_k^k + O(1/x),$$

avec

$$A_0^k = k.$$

Il s'en suit, d'après (54), que

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n} lg^k \frac{x}{n} = \sum_{\nu=0}^{k-1} A_\nu^k G_{k-1-\nu}(x) + A_k^k \sum_{n \leqslant x} \frac{a(n)}{n} + O(A(x)/x),$$

d'où il résulte, en tenant compte de l'hypothèse (49) et des relations (52) et (53), l'affirmation (50).

Il est facile de voir que les évaluations (23) résultent de ce théorème. En effet, les trois f. a. $\mu(n)$, $\Lambda(n)$ et $\lambda(n)$ satisfont à la condition (46). D'autre part la relation (47), c-à-d. leurs produits de composition correspondants sonts

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n)[x/n] = 1, \quad x \geqslant 1,$$

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)[x/n] = \sum_{n \leqslant x} \lg n = T(x),$$

$$\sum_{n \leqslant x} \lambda(n)[x/n] = \sum_{n \leqslant x} q(n) = [\sqrt{x}],$$

où

$$q(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = k^2, \\ 0 & \text{si} \quad n \neq k^2, \end{cases}$$

d'où l'on tire en particulier que les relations correspondantes à (54) sont

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} H_k(x/n) = \lg^k x,$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} H_k(x/n) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\lg n}{n} \lg^k \frac{x}{n};$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\lambda(n)}{n} H_k(x/n) = \sum_{n \leqslant x} \frac{q(n)}{n} \lg^k \frac{x}{n} = \sum_{\nu \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{\nu^2} \lg^k \frac{x}{\nu^2}.$$

Ainsi (48) est rempli avec $g = 0$, 1 et 0 respectivement.

Quant à la relation (49), elle est évidente pour

$$G_k(x) = \lg^k x.$$

Pour

$$G_k(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\lg n}{n} \lg^k \frac{x}{n},$$

elle a été établie au § 4 et est donnée par (19). Enfin pour

$$G_k(x) = \sum_{\nu \leqslant \sqrt{k}} \frac{1}{\nu^2} \lg^k x/\nu^2,$$

elle se trouve de même donnée au § 4 par (19′).

Ainsi les évaluations (23) ont bien lieu et pour les premières valeurs de k elles se réduisent à

$$g(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)/n = O(1),$$

$$g_1(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \lg \frac{x}{n} = O(1),$$

$$g_2(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \lg^2 \frac{x}{n} = 2 \lg x + O(1),$$

dont les deux premières, sous la forme plus précise

$$|g(x)| \leqslant 1$$

$$|g_1(x)| \leqslant 2 + C, \quad x \geqslant 1,$$

ont été données par Gram et v. Mangoldt resp. [4, p. 575] et la troisième intervient dans la démonstration du théorème des nombres premiers de Erdös-Selberg [6, p. 282]; quant à la k-ième somme de Riesz, elle a été donnée par une voie différente par H. N. Shapiro [7].

Quant aux évaluations relatives aux $\Lambda(n)$, les premières sont

$$m(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)/n = \lg x + O(1), \tag{55}$$

qui est le contenu du lemme de Mertens

$$m_1(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)/n \lg \frac{x}{u} = \frac{1}{2} \lg^2 x - C \lg x + O(1), \tag{56}$$

$$m_2(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)/n \lg^2 \frac{x}{n} = \frac{1}{3} \lg^3 x - C \lg^2 x + 2(C^2 + 2c_1) \lg x + O(1),$$

$$m_3(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)/n \lg^3 \frac{x}{n} = \frac{1}{4} \lg^4 x - C \lg^3 x + 3(C^2 + 2c_1) \lg^2 x -$$

$$- 3(2C^3 + 6Cc_1 + 3c_2) \lg x + O(1),$$

où $C = c_0$ est la constante d'Euler et

$$c_\nu = \int_{1-0}^{\infty} \frac{\lg^\nu t}{t} \, d\,\{1/2 + [t] - t\}, \quad \nu = 0, 1, \dots ;$$

d'ailleurs les coefficients

$$\beta_0 = -C, \quad \beta_1 = C^2 + 2c_1, \quad \beta_2 = -(2\,C^3 + 6\,Cc_1 + 3c_2), \dots$$

peuvent être obtenus à l'aide de

$$-\frac{\zeta'(s+1)}{\zeta(s+1)} = 1/s + \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \frac{\beta_\nu}{\nu!} s^\nu + O(s^k), \quad s \to -0.$$

Au sujet de la relation de Mertens (55), remarquons que, si elle peut s'écrire sous la forme plus précise

$$m(x) = \lg x + A + o(1),$$

on aura nécessairement, d'après (56),

$$A = -C;$$

elle se réduit alors à la relation de Landau [5] et équivaut au théorème des nombres premiers.

Remarquons en dernier lieu que l'affirmation (50) du théorème 8 peut être obtenue en se passant des hypothèses (46) et (49), en remplaçant toutefois l'hypothèse (48) par une meilleure évaluation de $C(x)$, à savoir

$$C(x) = gx \lg x + g'x + O(\omega(x)),$$

avec $\omega(x) > 0$ et

$$\int^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2} \lg^q t \, dt < \infty \quad \text{pour tout} \quad q > 0.$$

Un tel énoncé du théorème 8 contiendrait encore les relations (23), mais sa démonstration repose sur la première de ces relations, c-à-d. suppose que les évaluations des sommes de Riesz de $\mu(n)/n$ soient connues. Dans ce cas, ce théorème perd le caractère taubérien et peut s'énoncer comme suit

THÉORÈME 9. *Soit*

$$\sum_{n \leqslant x} a(n)\,[x/n] = C(x); \tag{47}$$

de

$$C(x) = gx \lg x + g'x + O(\omega(x)), \tag{57}$$

avec

$$\int^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2} \lg t \, dt < \infty \quad \textit{pour tout} \quad q > 0, \tag{58}$$

il résulte

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a(n)}{n}\lg^k\frac{x}{n}=\frac{g}{k+1}\lg^{k+1}x+\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}a_\nu\lg^{k-\nu}x+O(1)$$

pour tout $k\geqslant 0$.

Démonstration. De (47) il résulte

$$A(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\,C(x/n),$$

par suite

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a(n)}{n}\lg^k(x/n)=\int_{1-0}^{x}\lg^k(x/t)\frac{dA(t)}{t}=$$

$$=\int_{1-0}^{x}\lg^k(x/t)\,\frac{1}{t}\,d\Big\{\sum_{\substack{n\leqslant t\\ \leqslant x}}\mu(n)\,C(t/n)\Big\}=$$

$$=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\int_{1-0}^{x}\lg^k(x/t)\frac{dC(t/n)}{t}=$$

$$=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)/n\int_{1-0}^{x/n}\lg^k(x/nt)\frac{dC(t)}{t}=$$

$$=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)/n\;G_k(x/n).\tag{59}$$

Or, d'après (57), en posant

$$C(x)=gx\lg x+g'x+h(x),$$

on aura

$$G_k(x)=\int_{1-0}^{x}\lg^k(x/t)\frac{dC(t)}{t}=$$

$$=g\int_{1}^{x}\lg^k(x/t)\,\frac{\lg t}{t}\,dt+(g+g')\int_{1}^{x}\lg^k\frac{x}{t}\,\frac{dt}{t}+\int_{1-0}^{x}\lg^k\frac{x}{t}\,\frac{dh(t)}{t}=$$

$$=\frac{g}{(k+1)(k+2)}\lg^{k+2}x+\frac{g+g'}{k+1}\lg^{k+1}x+g'\lg^k x+$$

$$+\int_{1}^{x}\Big\{\lg^k\frac{x}{t}+k\lg^{k-1}\frac{x}{t}\Big\}\frac{h(t)}{t^2}\,dt$$

c-à-d.

$$G_k(x) = P_{k+2}(\lg x) - (-1)^k \Delta_k(x) + (-1)^k k \Delta_{k-1}(x),$$

où $P_{k+2}(\lg x)$ est un polynôme de degré $k+2$ en $\lg x$ et

$$\Delta_k(x) = \int_x^\infty \lg^k\left(\frac{x}{t}\right)\frac{h(t)}{t^2}\,dt.$$

En remplaçant l'expression ainsi obtenue pour $G_k(x)$ dans (59), on obtient, d'après les relations (23) relatives à $\mu(n)$,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a(n)}{n}\lg^k\frac{x}{n} = P^*_{k+1}(\lg x) + O(1) + (-1)^k \sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\Delta_k(x/n) -$$
$$- (-1)^k k \sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\Delta_{k-1}(x/n),$$

où $P^*_{k+1}(\lg x)$ est un polynôme de degré $k+1$ en $\lg x$.

Il reste encore à montrer que

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\Delta_r(x/n) = O(1), \tag{60}$$

sachant que

$$|h(x)| \leqslant M\omega(x), \quad x \geqslant 1,$$

avec $\omega(x)$ satisfaisant à (58). On en tire en effet que

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\Delta_r(x/n)\right| \leqslant \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}|\Delta_r(x/n)| \leqslant M\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\delta_r(x/n),$$

avec

$$\delta_r(x) = \int_x^\infty \lg^r\frac{t}{x}\,\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt,$$

et

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\delta_r(x/n) = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\frac{x}{n}\delta_r(x/n)$$

restera borné si l'intégrale

$$\int_{+0}\delta_r(1/t)\frac{dt}{t} = \int^\infty \delta_r(\eta)\frac{d\eta}{\eta}$$

converge. Or, en intégrant par parties r fois, on aura

$$\int_1^x \delta_r(\eta)\frac{d\eta}{\eta} = \int_1^x \frac{d\eta}{\eta}\int_\eta^\infty \lg^r\frac{t}{\eta}\,\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r}\binom{r}{\nu}\frac{\lg^{\nu+1}x}{\nu+1}\int_x^\infty \lg^{r-\nu}\frac{t}{x}\,\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + \frac{1}{k+1}\int_1^x \lg^{r+1}\eta\,\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}\,d\eta,$$

et (58) étant satisfait, tous les termes de la somme tendent vers 0, car

$$\lg^{\nu+1}x\int_x^\infty \lg^{r-\nu}\frac{t}{x}\,\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt < \lg^{\nu+1}x\int_x^\infty \lg^{r-\nu}t\,\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt <$$

$$< \int_x^\infty \lg^{r+1}t\,\frac{\omega(t)}{t^2} \to 0,$$

et le dernier terme est borné. Par suite (60) est bien satisfait et le théorème se trouve démontré.

Remarquons au sujet de ce théorème qu'il reste valable lorsqu'on remplace dans l'hypothèse (57) et l'affirmation (50) O par o; dans ce cas il représente un complément à un théorème de Landau [5] qui se rapporte à l'évaluation de $A(x)$ et qui contient le théorème des nombres premiers.

(Reçu le 29 septembre 1954)

RÉFÉRENCES

[1] S. H. Hardy — Ordre of infinity, Cambridge Tracts, № 12, 1910.

[2] S. H. Hardy and E. M. Wright — An introduction to the theory of numbers. Oxford, 1938.

[3] E. Landau — Über einen Satz von Herrn Phragmén. *Acta Math.* **30** (1905), pp. 195—201.

[4] E. Landau — Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig—Berlin, 1909.

[5] E. Landau — Über einige neuere Grenzwertsätze. *Rend. del Circolo Mat. di Palermo,* **36** (1912).

[6] T. Nagel — Introduction to number theory. Upsala, 1951.

[7] H. N. Shapiro — On a theorem of Selberg and generalizations. *Ann. of Math.* **51** (1950), pp. 485—597.

[8] E. C. Titchmarsh — The theory of the Riemann Zeta-function. Oxford. 1952.