SUR LES ZÉROS DE SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES À COEFFICIENTS MONOTONES

par

M. TOMIĆ (Beograd)

SOMMAIRE: Quelques généralisations et améliorations des résultats connus relatifs aux distributions des zéros de séries trigonométriques à coefficients monotones.

1. Dans la présente note nous allons considérer la distribution des zéros de séries trigonométriques de la forme

$$H_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \cos(n+\nu+1)\theta, \tag{1}$$

$$G_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \sin(n+\nu+1)\theta, \tag{2}$$

respectivement de la forme

$$Q_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \cos(n+2\nu+1)\theta, \tag{3}$$

$$P_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \sin(n+2\nu+1)\theta, \tag{4}$$

où l'on a supposé que les coefficents $\{c_{n+\nu+1}\}$ dépendant de n, forment une suite plusieurs fois monotone, c'est-à-dire telle qu'une ou plusieurs relations

$$\Delta^\nu c_k = c_k - \binom{\nu}{1} c_{k+1} + \binom{\nu}{2} c_{k+2} - \dots + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu} c_{k+\nu} \geqslant 0$$

$$k = n+1, n+2, \dots, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

soient satisfaites, et qu'on ait de plus

$$c_k \to 0, \quad k \to \infty. \tag{6}$$

Le premier résultat, à savoir, que les séries de la forme (1) – (4), c'est-à-dire les séries trigonométriques dépourvues de leurs n premiers coefficients, possèdent au moins n zéros dans $(0, \pi)$ est dû à A. Hurwitz [4].

Il a supposé que ces séries étaient des séries de Fourier d'une fonction continue dans $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ et bornée dans $(0, \pi)$. Mais c'est surtout dans les travaux de L. Fejér [1] et G. Szegö [2], [3], que furent déterminées les bornes très précises pour les zéros des séries (1) – (4), sous la condition que ces coefficients forment une suite plusieurs fois monotone.

Nous allons, dans cette note, donner quelques généralisations et améliorations de certains résultats de ces auteurs.

Pour la démonstration de ces théorèmes nous avançons un théorème au sens de A. Hurwitz. On voit en même temps de ce théorème, que la régularité des coefficients — telle que la monotonie — entraîne les bornes de Fejér-Szegö.

THÉORÈME I. A) *Soit la fonction*

$$f(z) = z^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} z^{\nu} \tag{7}$$

continue dans le secteur $|z| \leqslant 1$, $\varepsilon \leqslant \arg z \leqslant \pi - \varepsilon$, *et sa partie imaginaire,*

$$G_n(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \sin(n+\nu+1)\theta, \tag{2}$$

uniformément convergente pour $\varepsilon' \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon'$ $(\varepsilon' < \varepsilon)$.

Alors, la série (2) *a au moins* n *zéros dans* $(0, \pi)$, *qui se trouvent dans des intervalles empiétant partiellement les uns sur les autres, c'est-à-dire, dans*

$$\frac{k-2}{n+1}\pi \leqslant \theta_k \leqslant \frac{k}{n+1}\pi, \quad k = 2, 3, \ldots, n+1. \tag{8}$$

B) *Soit de plus, la série* (2), *telle qu'on ait*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \sin(2\nu+1)\theta/2 \geqslant 0, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi), \tag{9}$$

ce qui se produit effectivement si les $\{c_{n+\nu+1}\}$ *sont positifs et tendent d'une* *façon monotone vers zéro* [1]. *Alors, dans chacun des intervalles disjoints*

$$(10) \qquad \frac{k-1}{n+{}^1/_2}\pi \leqslant \theta_k \leqslant \frac{k}{n+{}^1/_2}\pi, \quad k=1,2,\ldots,n,$$

se trouve au moins un zéro de $G_n(\theta)$[1].

C) *Au lieu des hypothèses faites dans* A) *sur la fonction* $f(z)$, *on peut supposer que* $G_n(\theta)$, *donné par* (2), *représente une série de Fourier d'une fonction* $\Phi_n(\theta)$ *continue dans* $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$ *et appartenant à la classe* $L^p(0,2\pi), p>1$. *Alors* $\Phi_n(\theta)$ *aura au moins* n *zéros dans l'intervalle* (8), *c'est-à-dire* (10), *si en outre* $G_n(\theta)$ *satisfait à la condition* (9).

1.2 C'est L. Fejér [1] qui a montré que l'hypothèse sur la monotonie d'ordre plus élevé des coefficients $\{c_{n+\nu+1}\}$ des séries (1) – (4) entraînent les bornes plus précises que (10), pour les zéros des séries correspondantes. Nous allons donner ici un théorème de ce genre. En se servant du procédé de Fejér, G. Szegö [2] (§ 6.9) a démontré le théorème suivant.

Si la suite des coefficients $\{c_{n+\nu+1}\}$, $\nu=0,1,2,\ldots$ *de la série* (3) *est absolument monotone et tend vers zéro, alors* $Q_n(\theta)$ *possède au moins un zéro dans chaque intervalle*

$$(11) \qquad \frac{k}{n+{}^1/_2}\pi \leqslant \theta_k \leqslant \frac{k+{}^1/_2}{n+{}^1/_2}\pi, \quad k=0,1,2,\ldots n.$$

Au No. **3** nous démontrerons la généralisation suivante de ce théorème:

THÉORÈME II. *Si la suite* $\{c_{n+\nu+1}\}$ *n'est que trois fois monotone et tend vers zéro avec* $\nu\to\infty$, *alors les bornes* (11) *peuvent être remplacées par de plus précises*

$$(12) \qquad \frac{k}{n}\pi \leqslant \theta_k \leqslant \frac{k+{}^1/_2}{n+1}\pi, \quad k=0,1,2,\ldots,n'=[n/2].$$

Les autres zéros se trouvent dans les intervales symétriques de celui-ci par rapport à $\pi/2$.

Nous montrerons de plus, que, *dans les intervalles complémentaires des* (12) *et* $(0,\pi)$, *il n'y aura pas de zéros si l'on a par exemple*

$$c_{n+1}-2c_{n+2}+c_{n+3}>0.$$

---

[1] Si l'on a $c_{n+\nu+1}\geqslant c_{n+\nu+2}\to 0$ avec $\nu\to\infty$, toutes les hypothèses faites sur $f(z)$ et $G_n(\theta)$ mentionnées sous A) en résulteront alors.

1.3. Par le procédé exposé dans **3**, j'ai déjà démontré [7] que pour la série (4) on obtient les bornes de Markoff-Stieltjes:

$$\frac{k-{}^1/_2}{n}\pi \leqslant \theta_k \leqslant \frac{k}{n+1}\pi, \quad k=1,2,\ldots,n'=[{}^1/_2(n+1)], \tag{13}$$

sous la condition que la suite $\{c_{n+\nu+1}\}$ est trois fois monotone. L'idée de développer une fonction en sa série de Fourier puis, de là, de déterminer les bornes pour ces zéros, est due à Fejér [1]. Pour une suite des coefficients $\{c_{n+\nu+1}\}$ qui est trois fois monotone, mais arbitraire, les bornes (13) ne peuvent pas être améliorées puisqu'elles sont atteintes dans le cas spécial:

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta \quad \text{et} \quad U_n(\cos\theta)=\sin(n+1)\theta/\sin\theta.$$

Cependant, dans le cas du polynôme de Legendre, G. Szegö [3] a obtenu une borne inférieure plus précise que (13). Autrement dit il a réussi à remplacer $(k-{}^1/_2)\pi/n$ par $(k-{}^1/_4)\pi/(n+{}^1/_2)$. Dans ce but, il a utilisé un théorème de Sturm, sur les équations différentielles, dont la signification pour la détermination des zéros de polynômes orthogonaux a déjà été prouvée par E. Hille [2]. A l'aide du procédé exposé dans **3** on démontrera dans **4** un théorème, d'où, dans le cas spécial du polynôme de Legendre, donné par la série de Heine [1]

$$\begin{gathered} {}^1/_4\pi\,\alpha_n(2n+1)P_n(\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu\beta_\nu\sin(n+2\nu+1)\theta, \\ \alpha_0=1,\quad \alpha_\nu=\frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots 2\nu}, \\ \beta_0=\beta_0^{(n)}=1,\quad \beta_\nu=\beta_\nu^{(n)}=\frac{(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2\nu)}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\nu+1)},\quad \nu=1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{*}$$

résulte la borne inférieure pour ses zéros donnée plus haut. Nous remarquerons encore que cette borne, dans le cas du polynôme de Legendre est très précise. De la démonstration même de ce théorème on voit que le premier terme du développement asympthotique de zéros du polynôme de Legendre coïncide avec cette borne.

Le théorème en question est

THÉORÈME III. *Si la suite des coefficients* $\{c_{n+\nu+1}\}$ *de la série* (4) *prend la forme*

$$\{c_{n+\nu+1}\}=\{\alpha_\nu\cdot\beta_{n+\nu+1}\},$$

où

$$\{c_{n+\nu+1}\} \text{ est au moins trois fois monotone},$$
$$\{\alpha_\nu\} \text{ est au moins trois fois monotone},$$
$$(**) \qquad \alpha_\nu \to 0 \text{ avec } \nu \to \infty,$$
$$\{\beta_{n+\nu+1}\} \text{ est au moins simplement monotone},$$
$$\beta_{n+\nu+1} \to 1 \text{ avec } n \to \infty, \text{ pour chaque } \nu \text{ fixe}.$$

Soint enfin

$$R(e^{2\theta i}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu e^{2\nu\theta i},$$

et

$$F(e^{2\theta i}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} e^{2\nu\theta i},$$

alors, on a

$$0 < \operatorname{arc}\{F(e^{2\theta i})\} \leqslant \operatorname{arc}\{R(e^{2\theta i})\}, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2).$$

Il est facile de voir que toutes les conditions imposées aux $\{\alpha_\nu\}$ et $\{\beta_{n+\nu+1}\}$ sont remplies dans le cas spécial de la série de Heine (*).

1.4. Enfin, nous allons donner une condition qui assure le fait, que, par exemple, la série (4) possède exactement n zéros dans $(0, \pi)$. Au No. **5** nous démontrerons le

THÉORÈME IV. *Soit une série de la forme* (4), *telle que ses coefficients, outre la condition* $\{c_{n+\nu+1}\} \searrow 0$, *remplissent encore la condition que* $\{\nu c_\nu\}$ *est convexe au sens strict, c'est-à-dire que* $\Delta^2\{\nu c_\nu\} > 0$; *alors* (4) *possède précisément* n *zéros dans* $(0, \pi)$.

Remarquons que, dans ce cas, de la convexité de $\{\nu c_\nu\}$, résulte celle de $\{c_\nu\}$ et, par conséquent, les zéros de la série (4) se trouvent dans les intervalles disjoints [1]. Le théorème IV présente un certain intérêt si il s'agit d'une série de Fourier d'une fonction continûment différentiable.

2. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.* D'après un théorème de M. Riesz [5], de la convergence uniforme de (2) et de la continuité de (7) résulte la convergence uniforme, dans $(\varepsilon', \pi - \varepsilon')$, $(\varepsilon' < \varepsilon)$, de l'autre composante de $f(e^{\theta i})$, c'est-à-dire de $H_n(\theta)$. Il s'ensuit que

$$(14) \qquad f(e^{\theta i})\, e^{-(n+1)\theta i} = F(e^{\theta i}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} e^{\nu\theta i}$$

converge uniformément dans $(\varepsilon', \pi - \varepsilon')$. Mais $G_n(\theta)$ donné par (2) peut s'écrire sous la forme

$$(15) \qquad 2\, i\, G_n(\theta)\, e^{(n+1)\,\theta\, i} = e^{2\,(n+1)\,\theta\, i}\, F(e^{\theta i}) - F(e^{-\theta i}), \quad \varepsilon' < \theta < \pi - \varepsilon'.$$

De la convergence uniforme de $F(e^{\theta i})$, $\theta \in (\varepsilon', \pi - \varepsilon')$ il résulte l'existence de arc $F(e^{\theta i})$ pour chaque $\theta \in (\varepsilon', \pi - \varepsilon')$. En supposant que $F(e^{\theta i}) \neq 0$, $G_n(\theta)$ donné par (15) s'annule si, pour un $\theta \in (\varepsilon', \pi - \varepsilon')$ on a

$$\operatorname{arc}\{e^{2\,(n+1)\,\theta i}\, F(e^{\theta i})\} = \operatorname{arc}\{F(e^{-\theta i})\} + 2\, k\, \pi,$$

c'est-à-dire si

$$(16) \qquad (n+1)\,\theta + \operatorname{arc} F(e^{\theta i}) = k\,\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

La relation (16) donne les intervalles (8) en tenant compte que pour $F(e^{\theta i}) \neq 0$ on a toujours

$$0 \leqslant \operatorname{arc} F(e^{\theta i}) \leqslant 2\,\pi.$$

Pour démontrer l'assertion B) remarquons que de

$$F(e^{\theta i}) = e^{-\theta i/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1}\, e^{(\nu+1/2)\,\theta\, i}$$

et de (9) il s'ensuit

$$-\frac{\theta}{2} \leqslant \operatorname{arc} F(e^{\theta i}) \leqslant \pi - \frac{\theta}{2}.$$

En portant ses inégalités dans (16) on obtient les intervalles disjoints (10).

C) D'après un théorème de M. Riesz, la fonction conjuguée $\bar{\Phi}_n(\theta)$ [6] de $\Phi_n(\theta)$ appartient de même à la classe $L^p(0, \pi)$, $p > 1$. D'après le même théorème, $H_n(\theta)$ représente la série conjuguée de $G_n(\theta)$, donc la série de Fourier de $\bar{\Phi}_n(\theta)$. Soient maintenant $g_{mn}(\theta)$ et $h_{mn}(\theta)$ les polynômes de Fejér des séries $G_n(\theta)$ et $H_n(\theta)$ d'ordre m. D'après les théorèmes bien connus ils convergent uniformément dans $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ vers $\Phi_n(\theta)$ et $\bar{\Phi}_n(\theta)$ avec $m \to \infty$. Au lieu de (14) il faut considérer

$$F_m(e^{\theta i}) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{m - \nu}{m}\, c_{n+\nu+1}\, e^{\nu\,\theta\, i}.$$

Le même raisonnement qu'à la fonction (15) peut s'appliquer à la suite des fonctions

$$2\, i\, g_{mn}(\theta)\, e^{(n+1)\,\theta\, i} = e^{2\,(n+1)\,\theta\, i}\, F_m(e^{\theta i}) - F_m(e^{-\theta i}).$$

De là il résulte que dans les intervalles (8), c'est-à-dire (10), se trouve au moins un zéro de

$$g_{mn}(\theta) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{m-\nu}{m} c_{n+\nu+1} \sin(n+\nu+1)\theta .$$

Pour en déduire qu'il en est de même pour la fonction $\Phi_n(\theta)$, il faut appliquer à $g_{mn}(\theta)$ le théorème classique suivant de Hurwitz:

Si dans un domaine (D) la fonction $\Phi_n(\theta)$ *est la limite uniforme d'une suite des fonctions*

$$g_{1n}(\theta),\quad g_{2n}(\theta),\ldots,\quad g_{mn}(\theta),\ldots,$$

alors à l'intérieur de (D) les zéros de la fonction $\Phi_n(\theta)$ *sont les points d'accumulation des zéros de la suite des fonctions* $g_{mn}(\theta)$, $m = 1, 2, \ldots$

3 *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II.* En vertu de $\{c_{n+\nu+1}\} \searrow 0$ avec $\nu \to \infty$ c'est-à-dire de la convergence uniforme de $Q_n(\theta)$, il résulte que

(17) $$2\,Q_n(\theta)\, e^{(n+1)\theta i} = e^{2(n+1)\theta i} F(e^{2\theta i}) + F(e^{-2\theta i}),$$

où l'on a posé

$$F(e^{2\theta i}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1}\, e^{2\nu\theta i} .$$

Or du fait que $\{c_{n+\nu+1}\}$ est une suite trois fois monotone, on a

(18) $$0 \leqslant \varphi(2\theta) = \operatorname{arc} F(e^{2\theta i}) \leqslant \pi/2 - \theta .$$

La première de ces inégalités est un théorème bien connu de Fejér [1]. En effet si la suite n'est que deux fois mnnotone, on a

$$\mathfrak{I}\{F(e^{2\theta i})\} \geqslant 0 \quad ([1]\ \text{p. } 37).$$

La deuxième inégalité est de même un corollaire d'un théorème de Fejér. On a

$$\operatorname{tg} \varphi(2\theta) = \frac{\mathfrak{I}\{F(e^{2\theta i})\}}{\mathfrak{R}\{F(e^{2\theta i})\}} \leqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cotg} \theta .$$

A cause de

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \cos(n+2\nu+1)\theta \geqslant 0, \text{ [2]}$$

---

[2] Cette inégalité résulte de $\Delta^2\{c_{n+\nu+1}\} \geqslant 0$ [1]

la dernière inégalité se réduit à

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \cos (2\nu+1)\theta \geqslant 0,$$

ce qui a certainement lieu pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, dès que $\{c_{n+\nu+1}\}$ est trois fois monotone (F e j é r, [1] p. 37). De (17) il s'ensuit que $Q_n(\theta)$ s'annule si

$$(19) \qquad (n+1)\theta + \varphi(2\theta) = (k + {}^1/_2)\pi.$$

En portant l'inégalité (18) dans (19) on obtient

$$(12) \qquad \frac{k}{n}\pi \leqslant \theta_k \leqslant \frac{k+{}^1/_2}{n+1}\pi, \quad k = 1, 2, \dots, n' = [n/2].$$

Pour n pair cette dernière inégalité doit être remplacée par

$$\frac{n'}{n}\pi = \theta' = \frac{n'+{}^1/_2}{n+1}\pi = \frac{\pi}{2}.$$

A cause de la symetrie on a

$$Q_n(\pi-\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n+\nu+1} \cos (n+2\nu+1)\pi \cos (n+2\nu+1)\theta = (-1)^n Q_n(\theta),$$

d'où l'on conclut que dans l'intervalle symétrique de (12) par rapport à $\pi/2$ se trouve au moins un zéro de $Q_n(\theta)$.

Soit encore

$$c_{n+1} - 2c_{n+2} + c_{n+3} > 0;$$

on a alors $\Re\{F(e^{2\theta i})\} \neq 0$ ([1], p. 34), c'est-à-dire $F(e^{2\theta i}) \neq 0$. L'expression (17) ne peut donc s'annuler que si l'on a

$$\operatorname{arc}\{e^{2(n+1)\theta i} F(e^{2\theta i})\} = \operatorname{arc}\{-F(e^{-2\theta i})\}.$$

Étant donné (18) et (19), ceci ne sera pas possible si θ se trouve dans un intervalle différent de (12).

4. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III.* Selon les hypothèses faitas sur $\{c_{n+\nu+1}\}$, $P_n(\theta)$ peut s'écrire sous la forme

$$(21) \qquad 2i P_n(\theta) e^{(n+1)\theta i} = e^{2(n+1)\theta i} F(e^{2\theta i}) - F(e^{-2\theta i}),$$

avec

$$(22) \qquad F(e^{2\theta i}) = \alpha_0 \beta_{n+1} + \alpha_1 \beta_{n+2} e^{2\theta i} + \dots .$$

On voit aussitôt que $P_n(\theta)$ devient zéro si l'on a

$$(n+1)\,\theta + \varphi(2\,\theta) = k\,\pi \tag{22'}$$

avec

$$\varphi(2\,\theta) = \operatorname{arc}\{F(e^{2\theta i})\}.$$

Désignons par s_ν les sommes partielles de la série $F(e^{2\theta i})$. On peut tirer de s_ν une suite partielle $s_{m_1}, s_{m_2}, \ldots$ telle que

$$\operatorname{arc}\{s_{m_k}(e^{2\theta i})\} \geqslant \operatorname{arc}\{F(e^{2\theta i})\}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Cette suite dépend de $2\,\theta$, c'est-à-dire à chaque $2\,\theta$ correspond une suite d'indices $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ telle que les relations (23) sont satisfaites. Pour le montrer prenons, pour un θ donné ($\theta \in (\varepsilon, \pi/2)$), m_k tel que l'expression $\exp\{(m_k+1)\,2\,\theta\}$ se trouve dans le domaine (D) (voir fig. 1). Il existe une infinité de m_k satisfaisant aux conditions que, pour chaque $\theta \in (0, \pi/2)$ fixe $\exp\{(m_k+1)\,2\,\theta\}$ se trouve dans D. Ceci résulte du fait que l'angle (L', L_1) est égal à $2\,\theta$. De (22) on tire

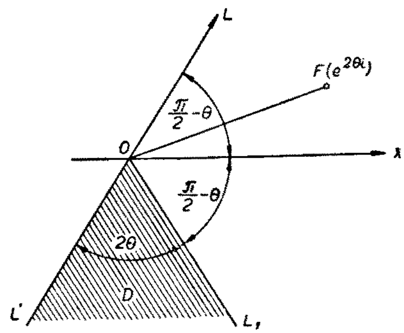

Fig. 1

$$F(e^{2\theta i}) = s_{m_k} + \exp\{m_k + 1)\,2\,\theta\,i\}\,\{\alpha_{m_k+1} \quad \beta_{m_k+n+1} + \ldots\}. \tag{24}$$

Les vecteurs définis par la série entre parenthèses ainsi que celle de $F(e^{2\theta i})$, définie par (22), se trouvent dans l'angle (x, L) puisque leurs coefficients sont trois fois monotones (voir No. **3**). Ceci implique que l'expression

$$\exp\{(m_k+1)\,2\,\theta\,i\}\,\{\alpha_{m_k+1}\cdot\beta_{m_k+n+1} + \alpha_{m_k+2}\,\beta_{m_k+n+2}\,e^{2\theta i} + \ldots\}$$

se trouve dans l'angle (x, L'). De ce fait ainsi que de (24) il résulte que les s_{m_k} se trouvent au-dessus de $F(e^{2\theta i})$, ce qui démontre la relation (23).

D'autre part, on a

$$s_{m_k}(e^{2\theta i}) = \sum_{\nu=0}^{m_k-1} (\beta_{n+\nu+1} - \beta_{n+\nu+2})\,T_\nu + \beta_{m_k+1}\,T_{m_k}, \tag{25}$$

avec

$$T_\nu(e^{2\theta i}) = \alpha_0 + \alpha_1\,e^{2\theta i} + \ldots + \alpha_\nu\,e^{2\nu\theta i},$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, m_k.$$

Mais $(\beta_{n+\nu+1} - \beta_{n+\nu+2})$ étant positif, de (25) on voit que au moins un des termes de la suite T_ν se trouve au-dessus de s_{m_k}, donc aussi au-dessus de $F(e^{2\theta i})$. Or, il faut observer que les T_ν, ne dépendant pas de n, en vertu d'un théorème de Fejér-Szegö ([1], p. 52) seront aussi bornés si leurs coefficients forment une suite deux fois monotone. De là, en faisant $n \to \infty$, de (25), ainsi que du fait que $\beta_{n+\nu+1} - \beta_{n+\nu+2} \to 0$, $n \to \infty$, il s'ensuit

$$\operatorname{arc}\{T_{m_k}(e^{2\theta i})\} \geqslant \operatorname{arc}\{F(e^{2\theta i})\}. \tag{26}$$

Cette inégalité a lieu pour tout m_k indépendant de n, d'où on conclut qu'on a uniformément dans $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$

$$\lim_{m_k \to \infty} T_{m_k}(e^{2\theta i}) = R(e^{2\theta i}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu e^{2\theta i} \geqslant \operatorname{arc}\{F e^{2\theta i})\},$$

ou, finalement,

$$\operatorname{arc}\{R(e^{2\theta i})\} \geqslant \operatorname{arc}\{F(e^{2\theta i})\}.$$

Dans le cas spécial du polynôme de Legendre, donné par la série de Heine (*), on a

$$\lim_{m_k \to \infty} T_{m_k}(e^{2\theta i}) = (1 - e^{2\theta i})^{-1/2} =$$

$$= 2(\sin\theta)^{-1/2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right\},$$

d'où l'on tire, pour ce cas,

$$\operatorname{arc}\{F(e^{2\theta i})\} \leqslant \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}.$$

En portant cette valeur dans (22), on trouve pour la borne inférieure celle donnée par G. Szegö [3], à savoir

$$\theta_k \geqslant \frac{k - 1/4}{n + 1/2}\pi.$$

5. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME IV.* En partant de (21) et de (22') on voit que sous l'hypothèse $F(e^{2\theta i}) \neq 0$ (ce qui a effectivement lieu lorsqu'on tient comte de $c_{n+1} - 2c_{n+2} + c_{n+3} > 0$), $P_n(\theta)$ aura exactement n zéros dans $(0, \pi)$ si la fonction

$$\varphi(2\theta) = \operatorname{arc}\{F(e^{2\theta i})\} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\Im\{F(e^{2\theta i})\}}{\Re\{F(e^{2\theta i})\}},$$

croît d'une façon monotone avec θ. Désignons respectivement par $P(\theta)$ et $Q(\theta)$ les parties réelle et imaginaire de $F(e^{2\theta i})$, et, pour simplifier les notations, écrivons $\{c_\nu\}$ au lieu de $\{c_{n+\nu+1}\}$. On a formellement

$$\text{(27)}\qquad \begin{aligned} P(\theta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos 2\nu\theta, \quad Q(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \sin 2\nu\theta, \\ \frac{\partial P}{\partial\theta} &= -\sum_{\nu=0}^{\infty} 2\nu c_\nu \sin 2\nu\theta, \quad \frac{\partial Q}{\partial\theta} = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2\nu c_\nu \cos 2\nu\theta. \end{aligned}$$

Pour assurer la convergence de ces séries, ainsi que de leurs combinaisons, nous prendrons au lieu de $\{c_\nu\}$ la suite $\{c_\nu r^\nu\}$ avec $0 < r < 1$. Cette dernière sera toujours k-fois monotone si la suite $\{c_\nu\}$ l'est. Pour le démontrer, nous nous servirons encore du fait que la fonction limite d'une suite de fonctions monotones est aussi monotone. De (27) on a

$$|F(e^{2\theta i})|^2 = P^2(\theta) + Q^2(\theta) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2k\theta$$

avec

$$\text{(28)}\qquad a_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu c_{\nu+k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

et de même

$$2\,[P(\theta)\,Q'(\theta) - Q(\theta)\,P'(\theta)] = b_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos 2k\theta,$$

avec

$$\text{(29)}\qquad b_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} (2\nu + 2k)\, c_\nu c_{\nu+k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

De la convexité de $\{\nu c_\nu\}$, comme nous l'avons déjà remarqué dans **1.4**, résulte celle de $\{c_\nu\}$. Comme, de plus, on a $c_\nu \to 0$, on peut conclure l'existence de $P(\theta)$ et $Q(\theta)$, donnés par (27), pour chaque $\theta \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon)$, c'est-à-dire l'existence de

$$\varphi(2\theta) = \operatorname{arc} F(e^{2\theta i}) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{I}\{F(e^{2\theta i}\}}{\mathfrak{R}\,F(e^{2\theta i})\}}.$$

La condition $\Delta^2\{\nu c_\nu\} \geqslant 0$ entraîne $\Delta^2\{c_\nu\} \geqslant 0$ et $\Delta^2\{b_\nu\} \geqslant 0$, ce qui donne la positivité des séries (28) et (29). De là on tire, que la fonction de θ au premier membre de (22') croit d'une façon monotone au sens strict avec θ, ce qui prouve que, pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n$, (22') a exactement un zéro dans $(0, \pi)$. Ceci aura lieu, comme nous l'avons remarqué, si l'on considère $\{c_\nu r^\nu\}$ avec $r > 1$. Mais cette conclusion reste aussi valable dans le cas limite $r = 1$, en vertu du fait que le second membre de (22') existe pour $r = 1$, et que $\varphi(2\theta)$ reste monotone, comme la limite d'une suite de fonctions monotones.

(Reçu le 21 avril 1954)

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] L. Fejér — Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. *Trans. Amer. Math. Soc.* **39** (1936), p. 18—59.

[2] G. Szegö — Orthogonal Polynomials, New York 1939.

[3] G. Szegö — Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **39** (1936), p. 2—17.

[4] A. Hurwitz — Über die Fourerierschen Konstanten integrierbaren Funktionen. *Math. Ann.* **57** (1903) p. 425—446 = *Math. Werke*, p. 556—76.

[5] M. Riesz — Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome. *Jahr. d. D. Math. Ver.* **23** (1914), p. 354—368.

[6] M. Riesz — Sur les fonctions conjuguées. *Math. Zeit.* **27** (1927), p. 218—244.

[7] M. Tomić — Sur les sommes trigonométriques à coefficients monotones. *Recueil des travaux de l'Acad. Serbe des Sciences* **2** (1952), p. 13—52.