SUR UNE FONCTION DU CALCUL OPÉRATIONNEL

par

BOGOLJUB STANKOVIĆ (Beograd)

SOMMAIRE: On établit certaines propriétés des solutions continues de l'équation intégrale $\int_0^\infty e^{-st} f_\alpha(t)\, dt = e^{-s^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Dans ce qui suit nous allons démontrer quelques propriétés des solutions continues de l'équation intgérale:

$$\int_0^\infty e^{-st} f_\alpha(t)\, dt = e^{-s^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

H. Pollard [4] a trouvé la solution de l'équation (1) sous la forme

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-tu} e^{-u^\alpha \cos \pi \alpha} \sin (u^\alpha \sin \pi \alpha)\, du. \tag{2}$$

P. Humbert [2] est arrivé à la solution de (1) sous forme d'une série

$$f_\alpha(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \sin \pi \alpha k \cdot \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{t^{\alpha k + 1}}. \tag{3}$$

J. Mikušinski [3] a démontré que, pour les λ réels et positifs, la fonction (2) est une solution de l'équation intégrale (1) et que

$$f_\alpha^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{où} \quad f_\alpha^{(0)}(0) = f_\alpha(0).$$

L. Wlodarski [5] a de son côté démontré que la relation $f_\alpha(t) \geqslant 0$, $t > 0$ est vraie pour $f_\alpha(t)$ continue.

Nous nous proposons de démontrer, en outre, que

1. Pour $|\arg t| < \pi/2$ on a

$$f_\alpha(t) \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\alpha\pi}{t^{\alpha+1}}, \quad |t| \to \infty. \tag{4}$$

2. Pour

$$|\arg t| \leqslant \operatorname{Min}\left\{\frac{3\pi}{2\alpha}(1-\alpha), \quad \frac{\pi}{\alpha}\right\} - \varepsilon \tag{4}$$

on a

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{t} I(0, -\alpha, Y), \quad |t| \to 0, \tag{6}$$

où

$$Y = \frac{(1-\alpha)\,\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

et

$$I(0, -\alpha; Y) = Y^{1/2} e^{-Y}\left\{\sum_{m=0}^{n-1} A_m Y^{-m} + O(Y^{-M})\right\}.$$

3. Pour $t > 0$ et finie, on a

$$f_\alpha(t) > 0.$$

a. La formule asymptotique (4) est une conséquance immédiate du théorème bien connu d'Abel-Stolz.

b. Étant donné (3) et

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

on a

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t^{-\alpha})^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-\alpha k)} = \frac{1}{t}\,\Phi\left(0, -\alpha; -\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

D'après un théorème connu dû à E. M. Wright [6] on a

$$\Phi\left(0, -\alpha; -\frac{1}{t^\alpha}\right) = I(0, -\alpha; Y)$$

si

$$\left|\arg\frac{1}{t^\alpha}\right| < \operatorname{Min}\left\{\frac{3\pi}{2}(1-\alpha), \pi\right\} - \varepsilon,$$

c'est-à-dire si (5) est vrai. Donc 2. est ainsi démontré.

c. La démonstration de 3. s'appuie sur un théorème connu de L. Post:

Soit $f^*(t)$ pour $t > 0$ continu et

$$L^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f^*(t)\, dt$$

convergent pour $\Re\{s\} > x_0$; alors on a

$$f^*(t) = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} L^{*(k)}\left(\frac{k}{t}\right).$$

Dans le cas actuel $f^*(t) = f_\alpha(t)$ et

$$\int_0^\infty e^{-st} f_\alpha(t)\, dt = e^{-s^\alpha} \equiv L_\alpha(s)$$

donc $L^*(s) = L_\alpha(s)$. L'intégrale converge pour tous les $\Re\{s\} \geqslant 0$. En outre on a

$$(-1)\, L'_\alpha(s) = \alpha\, s^{\alpha-1} L_\alpha(s), \tag{7}$$

et

$$(-1)^k L_\alpha^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^k f_\alpha(t)\, dt.. \tag{8}$$

Posons, pour abréger,

$$G_\alpha(t) = e^{-t} \int_0^t \frac{f_\alpha(t)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau.$$

On a évidemment

$$G_\alpha(t) > 0, \quad t > 0, \tag{9}$$

car, en vertu du théorème de L. Wlodarski, $f_\alpha(t) \geqslant 0$.

On a

$$\int_0^\infty G_\alpha(t)\, e^{-st}\, dt = \Gamma(1-\alpha)\,(s+1)^{\alpha-1} L_\alpha(s+1).$$

A cause de (7) on a, en vertu du théorème de L. Post,

$$G_\alpha(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} (-1)^{k+1} L_\alpha\left(\frac{k}{t}+1\right). \tag{10}$$

Appliquons maintenant le théorème de L. Post à $t f_\alpha(t)$ et comparons le résultat ainsi obtenu à (10). Eu égard en outre à (9), on trouve:

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} t f_\alpha(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} (-1)^{k+1} L_\alpha^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}\right)$$

$$\geqslant \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} L_\alpha^{(k+1)}\left(\frac{k}{t}+1\right)$$

$$\geqslant G_\alpha(t) > 0, \qquad \infty > t > 0.$$

(Reçu le 20 janvier 1954)

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bochner — Completely monotone functions of the Laplace operator for torus and sphere, *Duke Math.* **3** (1937), pp. 488—503.

[2] P. Humbert — Nouvelles corespondances symboliques, Bull. des Sc. Math. **49** (1945), pp. 121—129.

[3] J. G. Mikušinski — Sur les fonctions exponentielles du calcul operatoire, Studia Mathematica **12** (1951), p. 208—224.

[4] H. Pollard — The representation of e^{-s^λ} as a Laplace integral, *Bull. of the Amer. Math. Society* **5** (1946), № 10.

[5] L. Wlodarski — Une remarque sur une classe des fonctions exponentielles du calcul opérationnel, *Studia Mathematica* **13** (1952), pp. 188—189.

[6] E. M. Wright — The generalized Bessel function of order greater than one, *Quarterly Journal of Math.*, Oxford series, **2** (1940), № 41.