QUELQUES THÉORÈMES RELATIFS À LA TRANSFORMATION DE STIELTJES

par

VLADETA VUČKOVIĆ (Beograd)

SOMMAIRE: Un théorème de représentation de la transformation de Stieltjes et son application aux théorèmes de nature tauberienne.

0.1. Soit $A(u)$ une fonction à variation bornée sur chaque segment fini et $A(0) = 0$.

Désignons par

(0.1.1) $$S(x) = \int_0^\infty \frac{dA(u)}{(u+x)^{\rho-1}}, \quad (\rho > 1),$$

la transformation de Stieltjes convergente pour $x > 0$.

Soit en outre

(0.1.2) $$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\ldots < \lambda_n \to \infty$$

une suite proprement croissante et

(0.1.3) $$\sigma(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{(x+\lambda_n)^{\rho-1}}, \quad (\rho > 1)$$

la série correspondante de Stieltjes, convergente pour $x > 0$.

$a(u)$ soit défini par

(0.1.4) $$a(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} a_n.$$

Dans une note publiée antérieurement j'ai établi quelques théorèmes relatifs à la transformation (0.1.1) de Stieltjes pour le cas $\rho = 2$. Je reprends ici ces recherches et je démontre les théorèmes correspondants pour $\rho > 1$ quelconque.

1.1. THÉORÈME 1.1.1. *Si*

$$S(x) = O(e^{-x^{\alpha}}), \quad x \to \infty, \tag{1.1.1}$$

et $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$, *alors la fonction*

$$\chi(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} u^{\gamma} A(u^{1/\alpha})\, du, \quad (\gamma > -1), \tag{1.1.2}$$

régulière pour $\Re\{s\} > 0$ *le sera encore au point* $s = 0$.

On pourrait, par des intégrations répétées de la fonction $\chi(s)$, de s à ∞ diminuer l'exposant γ chaque fois d'une unité mais l'integrale $\int_0^{\infty} \chi(s)\, ds$ est en général divergente. Si cependant, pour un $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, on a

$$A(u) = 0 \quad \text{pour } 0 < u \leqslant \varepsilon \tag{1.1.3}$$

et par suite (Doetsch [1], p. 199, Théorème 10), dans l'angle $|\arg s| \leqslant \leqslant \varphi < \pi/2$ aussi

$$\chi(s) = O(e^{-\varepsilon \Re\{s\}}), \quad s \to \infty,$$

on pourra intégrer $\chi(s)$ autant de fois que l'on voudra. En vertu de notre supposition (étant donné que $0 < \lambda_1$) $\chi(s)$ satisfait à la condition (1.1.3). Ainsi donc on a pour la série (0.1.3) de Stieltjes le

THÉORÈME 1.1.2. *Si*

$$\sigma(x) = O(e^{-x^{\alpha}}), \quad x \to \infty, \tag{1.1.4}$$

et $0 < \alpha \leqslant {}^1/_2$, *alors, pour tout* τ *réel, la fonction*

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} u^{\tau} a(u^{1/\alpha})\, du, \tag{1.1.5}$$

qui est régulière pour $\Re\{s\} > 0$, *le sera encore au point* $s = 0$.

1.2 Avant de passer à la démonstration du théorème 1.1.1 j'avancerai les lemmes suivants.

LEMME 1.2.1. *Soit*

$$F(\alpha, \delta, \rho, s; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} s^{\nu} x^{\alpha\nu + \delta + \rho - 1}}{\Gamma(\nu + 1)\, \Gamma(\alpha\nu + \delta + \rho)\, \Gamma(-\alpha\nu - \delta)} \tag{1.2.1}$$

où les nombres réels α, δ, ρ, s *satisfont aux conditions suivantes:*

$$s>0, \quad \rho>1, \quad 0<\alpha\leqslant {}^1/_2, \quad \delta>-1. \tag{1.2.2}$$

Alors le comportement asymptotique de la fonction $F(\alpha, \delta, \rho, s; x)$ *est donné par les relations suivantes:*

$$F(\alpha, \delta, \rho, s; x) = O(x^{\delta+\rho-1}), \quad x \to +0, \tag{1.2.3}$$

$$F(\alpha, \delta, \rho, s; x) = O(x^{-N}), \quad x \to +\infty, \quad (0<\alpha<{}^1/_2), \tag{1.2.4}$$

$$F({}^1/_2, \delta, \rho, s; x) = O(x^{1/2-\delta-\rho}), \quad x \to +\infty, \tag{1.2.5}$$

et on a

$$\int_0^\infty \frac{F(\alpha, \delta, \rho, s; t)}{(t+x)^\rho}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\, x^\delta e^{-sx^\alpha}. \tag{1.2.6}$$

Ici les O-constantes dans (1.2.3) *et* (1.2.5) *ne dépendent que de* s, ρ, α *et* δ, *et dans* (1.2.4) *encore de* N; N *est un nombre fixe, aussi grand que l'on veut.*[1]

Démonstration. (1.2.3) est la conséquence immédiate de (1.2.1). (1.2.5) s'obtient en s'appuyant sur un théorème de Ford ([1], p. 5, Theorem). Pour parvenir à la relation (1.2.4) j'exprimerai $F(\alpha, \delta, \rho, s; x)$ de la manière suivante

$$F(\alpha, \delta, \rho, s; x) = \frac{x^{\delta+\rho-1}}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (sx^\alpha)^{-\tau} \frac{\Gamma(\tau)\, d\tau}{\Gamma(\alpha\tau-\delta)\,\Gamma(-\alpha\tau+\delta+\rho)}, \tag{1.2.7}$$

avec $a>0$.

D'après les évaluations connues pour la fonction $\Gamma(x+iy)$, on a pour $\tau = a+iy$

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\Gamma(a+iy)}{\Gamma(\alpha a-\delta+i\alpha y)\,\Gamma(-\alpha a+\delta+\rho-i\alpha y)}\right| \leqslant \\ &\qquad \leqslant C(\alpha, a, \delta, \rho, s)\, |y|^{a+1/2-\delta-\rho}\, e^{-|y|\left\{\frac{\pi}{2}(1-2\alpha)-2\alpha\varepsilon\right\}}, \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

pour $\varepsilon>0$ aussi petit que l'on veut.

---

[1] La fonction $F(\alpha, \delta, \rho, s; x)$ ressemble à la classe des fonctions hypergéométriques généralisées étudiées plus particulièrement par E. M. Wright [7a, b].

Étant donné (1.2.8) on a

$$|F(\alpha, \delta, \rho, s; x)| \leqslant C \cdot x^{\delta+\rho-1-\alpha a}, \quad x > 0. \tag{1.2.9.}$$

Je prends $a = (N + \delta + \rho - 1)/\alpha$, avec N aussi grand que l'on veut, de sorte que (1.2.9) devient immédiatement (1.2.4).

Passons maintenant à la démonstration de l'équation (1.2.6). À cet effet je considère l'intégrale double

$$J = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty y^{\rho-1} e^{-yx} \, dy \int_0^\infty e^{-yt} F(t) \, dt, \tag{1.2.10}$$

où l'on a, pour abréger, désigné $F(\alpha, \delta, \rho, s; t)$ par $F(t)$. Dans cette intégrale on peut, étant donné (1.2.2), (1.2.3) et (1.2.5), intervertir l'ordre de l'intégration. On a ainsi

$$J = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty F(t) \, dt \int_0^\infty e^{-y(t+x)} y^{\rho-1} \, dy = \int_0^\infty \frac{F(t)}{(t+x)^\rho} \, dt. \tag{1.2.11}$$

D'autre part on a

$$\int_0^\infty e^{-yt} F(t) \, dt = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu s^\nu}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\alpha\nu+\delta+\rho)\,\Gamma(-\alpha\nu-\delta)} \int_0^\infty e^{-yt} t^{\alpha\nu+\delta+\rho-1} \, dt =$$

$$= \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu s^\nu}{y^{\alpha\nu+\delta+\rho}\,\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\alpha\nu-\delta)} = \tag{1.2.12}$$

$$= \frac{1}{y^{\delta+\rho}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \left(\frac{s}{y^\alpha}\right)^{-\tau} \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau\alpha-\delta)} \, d\tau.$$

Ici l'intervertibilité de l'ordre de sommation et d'intégration est évidente et aussi la dernière égalité facile à vérifier à l'aide du calcul de résidus. En vertu de (1.2.10) et (1.2.12) on a donc

$$J = \frac{1}{2\pi i\,\Gamma(\rho)} \int_0^\infty e^{-yx} y^{-1-\delta} \, dy \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \left(\frac{s}{y^\alpha}\right)^{-\tau} \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau\alpha-\delta)} \, d\tau, \tag{1.2.13}$$

d'où, en intervertissant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} s^{-\tau} \frac{\Gamma(\tau)\, d\tau}{\Gamma(\tau\alpha - \delta)} \int_0^\infty e^{-yx}\, y^{\tau\alpha - \delta - 1}\, dy =$$

(1.2.14)

$$= \frac{x^\delta}{\Gamma(\rho)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} (s x^\alpha)^{-\tau}\, \Gamma(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\Gamma(\rho)} x^\delta\, e^{-s x^\alpha}.$$

La comparaison de (1.2.11) et (1.2.14) conduit à (1.2.6).

LEMME 1.2.2. *Soit* $F(\alpha, \delta, \rho, s; x)$ *la même fonction que celle du lemme* 1.2.1, *et* s *un nombre complexe. Alors, pour chaque tel* s *on a*

$$|F(\alpha, \delta, \rho, s; x)| \leqslant |x|^{\delta + \rho - 1}\, e^{|s|\,|x|^\alpha}. \tag{1.2.15}$$

Démonstration. Du fait que $\rho > 1$ on a

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\alpha\nu + \delta + \rho)\, \Gamma(-\alpha\nu - \delta)} \right| \leqslant \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha\nu + \delta + 1)\, \Gamma(-\alpha\nu - \delta)} \right| = \left| \frac{\sin \pi(\alpha\nu + \delta)}{\pi} \right| < 1.$$

En appliquant cette inégalité à la série (1.2.1) il s'ensuit l'affirmation.

LEMME 1.2.3. *Soit* $S(x)$ *la transformation de Stieltjes du théorème* 1.1.1, *donc la condition* (1.1.1) *est en vigueur, et* $F(\alpha, \delta, \rho, s; x)$ *la fonction du lemme* 1.2.1. *Alors il existe*

$$\frac{1}{1-\rho} \int_0^\infty F(\alpha, \delta, \rho, s; x)\, S(x)\, dx = \int_0^\infty F(\alpha, \delta, \rho, s; x)\, dx \int_0^\infty \frac{A(u)\, du}{(u+x)^\rho} \tag{1.2.16}$$

et l'ordre d'intégration dans l'intégrale double au second membre peut être interverti.

Démonstration. De la convergence de l'intégrale (0.1.1) on a

$$S(x) = O\left(\frac{1}{x^{\rho - 1}}\right), \quad x \to +0, \tag{1.2.17}$$

et à cause de $A(0) = 0$

$$S(x) = (1 - \rho) \int_0^\infty \frac{A(u)}{(u + x)^\rho}\, du. \tag{1.2.18}$$

D'après les inégalités (1.2.3) et (1.2.17) il vient

$$S(x)\,F(\alpha,\delta,\rho,s;x) = O(x^{\delta}), \quad x\to+0,$$

et, étant donné (1.1.1) et (1.2.4),

$$S(x)\,F(\alpha,\delta,\rho,s;x) = O(x^{-N}e^{-x^{\alpha}}), \quad x\to+\infty,$$

d'où l'existence de l'intégrale (1.2.16) devient apparente (puisque $\delta > -1$).

La justification de l'inversion de l'ordre de l'intégration est un peu plus circonstanciée, surtout dans le cas $\alpha = {}^1/_2$, où l'on doit avoir recours au théorème d'Arzelà-Lebesgue.

Considérons d'abord le cas $0<\alpha<{}^1/_2$.

Pour R_1 et R_2 déterminés, on a

$$\int_0^{R_1} F(x)\,dx \int_0^{R_2} \frac{A(u)}{(u+x)^{\rho}}\,du = \int_0^{R_2} A(u)\,du \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{(u+x)^{\rho}}\,dx,$$

où l'on a mis, comme précédemment, $F(x)$ pour $F(\alpha,\delta,\rho,s;x)$. On a donc

$$\int_0^{\infty} F(x)\,dx \int_0^{R_2} \frac{A(u)}{(u+x)^{\rho}}\,du = \lim_{R_1\to\infty} \int_0^{R_2} A(u)\,du \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{(u+x)^{\rho}}\,dx,$$

en tant que le lim au second membre existe. Je vais démontrer que cette limite existe et est égale à

$$\int_0^{R_2} A(u)\,du \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{(u+x)^{\rho}}\,dx.$$

Pour cela il suffit de montrer que la différence

$$D_1 = \int_0^{R_2} A(u)\,du \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{(u+x)^{\rho}}\,dx - \int_0^{R_2} A(u)\,du \int_0^{R_1} \frac{F(x)}{(u+x)^{\rho}}\,dx =$$

$$= \int_0^{R_2} A(u)\,du \int_{R_1}^{\infty} \frac{F(x)}{(u+x)^{\rho}}\,dx$$

tend vers zéro avec $R_1\to\infty$, ce qui est facile à voir puisque l'intégrale $\int^{\infty} F(x)\,dx/(u+x)^{\rho}$ converge et la variation totale de $A(u)$, pour un R_2

donné reste limitée. Donc on a

$$\int_0^\infty F(x)\,dx \int_0^{R_1} \frac{A(u)}{(u+x)^\rho}\,du = \int_0^{R_2} A(u)\,du \int_0^\infty \frac{F(x)}{(u+x)^\rho}\,dx.$$

Il en résulte que

$$\int_0^\infty A(u)\,du \int_0^\infty \frac{F(x)}{(u+x)^\rho}\,dx = \lim_{R_2\to\infty} \int_0^\infty F(x)\,dx \int_0^{R_2} \frac{A(u)}{(u+x)^\rho}\,du,$$

si toutefois le lim au second membre existe. Je vais démontrer que cette limite est

$$\int_0^\infty F(x)\,dx \int_0^\infty \frac{A(u)}{(u+x)^\rho}\,du.$$

Aussi considérons la différence

$$D_2 = \int_0^\infty F(x)\,dx \int_0^\infty \frac{A(u)}{(u+x)^\rho}\,du - \int_0^\infty F(x)\,dx \int_0^{R_2} \frac{A(u)}{(u+x)^\rho}\,du =$$

(1.2.19)

$$= \int_0^\infty F(x)\,dx \int_{R_2}^\infty \frac{A(u)}{(u+x)^\rho}\,du.$$

L'intégration par parties donne

(1.2.20) $$\int_{R_2}^\infty \frac{A(u)}{(u+x)^\rho}\,du = \frac{A(R_2)}{(\rho-1)(R_2+x)^{\rho-1}} + \frac{1}{\rho-1}\int_{R_2}^\infty \frac{dA(u)}{(u+x)^{\rho-1}}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$g(t) = \int_0^t \frac{dA(u)}{(u+1)^{\rho-1}}.$$

On a

(1.2.21) $$g(R_2) = S(1) + o(1), \quad R_2 \to \infty,$$

et par suite

$$\int_{R_2}^{\infty} \frac{dA(u)}{(u+x)^{\rho-1}} = \int_{R_2}^{\infty} \left(\frac{u+1}{u+x}\right)^{\rho-1} \frac{dA(u)}{(u+1)^{\rho-1}} = \int_{R_2}^{\infty} \left(\frac{u+1}{u+x}\right)^{\rho-1} dg(u) =$$

$$= S(1) - g(R_2)\left(\frac{R_2+1}{R_2+x}\right)^{\rho-1} + (1-x)(\rho - 1\int_{R_2}^{\infty} \left(\frac{u+1}{u+x}\right)^{\rho-2} \frac{g(u)}{(u+x)^2} du.$$

De là et à cause de (1.2.19) et (1.2.20) on a

$$D_2 = \frac{A(R_2)}{\rho-1} \int_0^{\infty} \frac{F(x)}{(R_2+x)^{\rho-1}} dx + \frac{1}{\rho-1} \int_0^{\infty} F(x)\left\{S(1) - g(R_2)\left(\frac{R_2+1}{R_2+x}\right)^{\rho-1}\right\} dx +$$

$$+ \int_0^{\infty} F(x)(1-x)\, dx \int_{R_2}^{\infty} \left(\frac{u+1}{u+x}\right)^{\rho-2} \frac{g(u)}{(u+x)^2} du.$$

Donc, si en outre on tient compte de (1.2.21)

$$\begin{aligned} |D_2| \leqslant \frac{|A(R_2)|}{(\rho-1) R_2^{\rho-1}} \int_0^{\infty} |F(x)|\, dx + \frac{|S(1)|}{R_2+1} \int_0^{\infty} |x-1|\,|F(x)|\, dx + \\ + \frac{o(1)}{\rho-1} \int_0^{\infty} x^{\rho-1} |F(x)|\, dx + \\ + \frac{1}{R_2^{\varepsilon}} \int_0^{\infty} |1-x|\,|F(x)|\, dx \int_{R_2}^{\infty} \left((1 + \frac{|x-1|}{R_2+x}\right)^{\rho-2} \frac{|g(u)|}{(u+x)^{2-\varepsilon}} du. \end{aligned} \tag{1.2.22}$$

Dans notre cas ($0 < \alpha < {}^1/_2$) $F(x)$ satisfait l'évaluation (1.2.4) lorsque N est suffisamment grand, de sorte que $D_2 \to 0$ si $R_2 \to \infty$, car

$$A(u) = o(u^{\rho-1}).$$

Soit maintenant $\alpha = {}^1/_2$. De $S(x) = O(e^{-x^{1/2}})$, $x \to \infty$ il vient que $S(x) = O(e^{-x^{\alpha}})$, $0 < \alpha < {}^1/_2$, $x \to \infty$, de sorte que, d'après ce que l'on vient de démontrer, on a l'équation

$$\int_0^{\infty} F_{\alpha}(x)\, dx \int_0^{\infty} \frac{A(u)}{(u+x)^{\rho}} du = \int_0^{\infty} A(u)\, du \int_0^{\infty} \frac{F_{\alpha}(x)}{(u+x)^{\rho}} dx, \ (0 < \alpha < {}^1/_2) \tag{1.2.23}$$

où $F_{\alpha}(x) = F(\alpha, \delta, \rho, s; x)$, $0 < \alpha < {}^1/_2$.

Posons

$$\varphi_\alpha(u) = A(u) \int_0^\infty \frac{F_\alpha(x)}{(u+x)^\rho}\, du\,;$$

on aura, en vertu du lemme 1.2.1,

$$\varphi_\alpha(u) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} A(u)\, u^\delta\, e^{-su^\alpha}$$

et

$$\lim_{\alpha \to 1/2-0} \varphi_\alpha(u) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} A(u)\, u^\delta\, e^{-s\sqrt{u}} = \varphi(u),$$

Comme $A(u) = o(u^{\rho-1})$, $u \to \infty$, on a

$$\int_0^\infty \varphi_\alpha(u)\, du = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty A(u)\, u^\delta\, e^{-su^\alpha}\, du$$

et

$$\int_0^\infty \varphi(u)\, du = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty A(u)\, u^\delta\, e^{-s\sqrt{u}}\, du\,.$$

D'autre part, on a

$$|\varphi_\alpha(u)| = \frac{1}{\Gamma(\rho)} |A(u)|\, u^\delta\, e^{-su^\alpha} \leqslant \psi(u).$$

Or, ici on a

$$\psi(u) = \frac{2}{\Gamma(\rho)} |A(u)|\, u^\delta\, e^{-su^{1/4}}$$

pour $0 < u < \infty$ et $1/4 \leqslant \alpha < 1/2$, de sorte que aussi

$$\int_0^\infty \psi(u)\, du$$

existe.

L'application du théorème d'Arzelà-Lebesgue donne

$$\lim_{\alpha \to 1/2-0} \int_0^\infty A(u)\, du \int_0^\infty \frac{F_\alpha(x)}{(u+x)^\rho}\, dx = \int_0^\infty A(u)\, du \int_0^\infty \frac{F_{1/2}(x)}{(u+x)^\rho}\, dx\,. \tag{1.2.25}$$

De la même manière on voit que

$$\lim_{\alpha \to 1/2-0} \int_0^\infty F_\alpha(x)\, dx \int_0^\infty \frac{A(u)}{(u+x)^\rho}\, du = \int_0^\infty F_{1/2}(x)\, dx \int_0^\infty \frac{A(u)}{(u+x)^\rho}\, du\,. \tag{1.2.26}$$

Donc, de (1.2.23), (1.2.25) et (1.2.26) il s'ensuit que dans (1.2.16) l'ordre de l'intégration peut être interverti aussi dans le cas $\alpha = {}^1/_2$. Le lemme est donc ainsi démontré.

LEMME 1.2.4. *Si* $F(\alpha, \delta, \rho, s; x)$ *est la fonction envisagée dans le lemme* 1.2.1 *et* $S(x)$ *la transformation de Stieltjes du théorème* 1.1.1, *alors la fonction*

$$\chi(s) = \frac{\Gamma(\rho)}{\rho - 1} \int_0^\infty F(\alpha, \delta, \rho, s; x)\, S(x)\, dx \tag{1.2.27}$$

est régulière au point $s = 0$.

Démonstration. Étant donné (1.2.15) et (1.1.1) on a pour $x > 0$

$$|F(\alpha, \delta, \rho, s; x)\, S(x)| \leqslant C\, x^{\delta+\rho-1}\, e^{-x^\alpha(1-|s|)}$$

de sorte que, dans chaque cercle de rayon plus petit que 1, décrit autour de l'origine, l'intégrale (1.2.27) est absolument convergente; $\chi(s)$ y représente alors une fonction régulière de s.

Démonstration du théoreme 1.1.1. En vertu du lemme 1.2.4 la fonction

$$\chi(s) = \frac{\Gamma(\rho)}{\rho - 1} \int_0^\infty F(\alpha, \delta, \rho, s; x)\, S(x) dx$$

est régulière à l'origine. Soit pour le moment s réel et positif. En appliquant successivement les lemmes 1.2.3 et 1.2.1 on aura

$$\chi(s) = \Gamma(\rho) \int_0^\infty A(u)\, du \int_0^\infty \frac{F(\alpha, \delta, \rho, s; x)}{(u + x)^\rho} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-su}\, u^\gamma A(u^{1/\alpha})\, du,$$

où, étant donné que $\delta > -1$, on a $\gamma = \alpha^{-1}(\delta + 1) - 1 > -1$.

Ainsi donc, la fonction $\chi(s)$ qui est régulière dans le demi-plan droit l'est aussi au point $s = 0$.

2.1. L'application des théorèmes 1.1.1 et 1.1.2 nos permet maintenant de démontrer quelques théorèmes inverses pour la transformation de Stieltjes, (0.1.1), resp. la série de Stieltjes (0.1.3). Ce sont principalement

THÉORÈME 2.1.1. *De*

$$S(x) = O(e^{-x^\alpha}), \quad x \to +\infty, \quad (0 < \alpha \leqslant {}^1/_2) \tag{2.1.1}$$

et de la condition de convergence

$$u^\beta [A(v) - A(u)] > -m \quad \textit{pour tout} \quad u \leqslant v \leqslant u + u^{1-\alpha}, \quad (\beta > -\alpha) \tag{2.1.2}$$

il s'ensuit

(2.1.3) $$u^{\beta} S(u) = O(1), \quad u \to \infty.$$

THÉORÈME 2.1.2. *De*

(2.1.4) $$\sigma(x) = O(e^{-x^{\alpha}}), \quad x \to +\infty, \quad (0 < \alpha \leqslant {}^1/_2)$$

et de la condition de convergence

(2.1.5) $$u^{\beta} \sum_{u < \lambda_n \leqslant v} a_n > -m \quad \textit{pour tout} \quad u \leqslant v \leqslant u + u^{1-\alpha}$$

(β *réel, d'ailleurs arbitraire*) *il s'ensuit*

(2.1.6) $$u^{\beta} \sum_{\lambda_n \leqslant u} a_n = O(1), \quad u \to +\infty.$$

Bien entendu, dans la condition de convergence (2.1.5) on doit prendre $\beta > -\rho$, sans quoi le théorème est, comme trivial, satisfait.

2.2. Les démonstrations de ces théorèmes nous les ferons précéder par quelques lemmes.

LEMME 2.2.1. *De la condition de convergence* (2.1.2) *il s'ensuit que* $A(u)$ *satisfait aussi à la condition*

(2.2.1) $$A(v) - A(u) > -m\, u^{\alpha-\beta} \quad \textit{pour tout} \quad u \leqslant v \leqslant \lambda u, \quad (\lambda > 1).$$

Démonstration. Connue (v. p. ex. Vučković [6]).

LEMME 2.2.2. *De* (2.1.1) *et de la condition de convergence* (2.2.1) *il s'ensuit*

(2.2.2) $$A(u) = O(u^{\alpha-\beta}), \quad u \to +\infty.$$

Démonstration. Comp. O. Szàsz [5].

LEMME 2.2.3. *La fonction* $A(u)$ *du théorème* 2.1.1 *satisfait aussi à la condition de convergence*

(2.2.3) $$v^{\beta/\alpha} A(v^{1/\alpha}) - u^{\beta/\alpha} A(u^{1/\alpha}) > -m \quad \textit{pour tout} \quad u \leqslant v \leqslant u + 1.$$

Démonstration. (2.1.2), (2.2.2) et

$$v^{\beta/\alpha} A(v^{1/\alpha}) - u^{\beta/\alpha} A(u^{1/\alpha}) = u^{\beta/\alpha} [A(v^{1/\alpha}) - A(u^{1/\alpha})] + (v^{\beta/\alpha} - u^{\beta/\alpha}) A(v^{1/\alpha})$$

fournissent l'affirmation.

Démonstration du théorème 2.1.1. En vertu du théorème 1.1.1

$$\chi(s) = \int_0^\infty e^{-su} u^{\beta/\alpha} A(u^{1/\alpha})\, du$$

est une fonction régulière au point $s = 0$, puisque $\beta/\alpha > -1$. De là et de (2.2.3) résulte

$$u^{\beta/\alpha} A(u^{1/\alpha}) = O(1), \quad u \to \infty,$$

comme l'ont montré A. Ingham [3] et J. Karamata [4] à propos des travaux de Wiener-Ikehara et Heilbron-Landau.

Démonstration du théorème 2.1.2. D'après le théorème 1.1.2, la fonction

$$\chi_1(s) = \int_0^\infty e^{-su} u^{\beta/\alpha} a(u^{1/\alpha})\, du$$

est régulière au point $s = 0$ (pour tout β/α réel) et

$$a(u) = \sum_{\lambda_n \leqslant u} a_n$$

satisfait à la condition de convergence (2.2.3). De même que dans la démonstration du théorème 2.1.1 on en déduit l'affirmation du théorème 2.2.2.

(Reçu le 30 decembre 1953)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Doetsch G. — Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin, 1937.

[2] Ford W. — Asymptotic Developements. Michigan press 1936.

[3] Ingham A. — On Wiener's method in Tauberian theorems. *Proc. London Math. Soc.* **38** (1935), 458—480.

[4] Karamata J. — Über einen Satz von H. Heilbron und E. Landau. *Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade* **5** (1936), 28—38.

[5] Szász O. — Über einige Sätze von Hardy und Littlewood. *Nachrichten v. der Gesellsch. der Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse* (1930), 311—333.

[6] Vučković V. — Die Stieltjes-Transformation die mit der Geschwindigkeit der Exponentialfunktion unendlich klein wird (en serbe), *Recueil des travaux de l'Acad. Serbe des Sciences, Inst. Math.* **3** (1953), 255—288.

[7] Wright E. M. — a. The asymptotic expansion of the generalised hypergeometric function. *Journal of the London Math. Soc.* **10** (1935), 286—293. —
b. *Ibid.* **46** (1940), 389—408.