СВОБОДНАЯ НУТАЦИЯ ЗЕМЛИ

СЕРГЕЙ Д. ЧЕРНЫЙ (Курск, СССР)

1. *УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЗЕМЛИ ПО ИНЕРЦИИ*

Предположим, что Земля есть абсолютно твердое тело с главными центральными моментами инерции A, B, C при $A < B < C$. Тогда уравнения вращения Земли около оси по инерции будут

$$
\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = 0,\\
(1)\qquad &B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = 0,\\
&C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = 0,
\end{aligned}
$$

где p, q, r проекции мгновенной угловой скорости на оси инерции, неизменно связанные с Землей. Интегрируя эти уравнения и обозначая через α_1, α_2, α_3, ε, β постоянные, получим

$$p = \alpha_1 \operatorname{cosam}(\varepsilon t + \beta), \quad q = \alpha_2 \operatorname{sinam}(\varepsilon t + \beta), \quad r = \alpha_3\, \Delta\mathrm{am}\,(\varepsilon t + \beta).$$

Подставив эти значения p, q, r в уравнения (1), получим

$$A\,\alpha_1\,\varepsilon = (C - B)\,\alpha_2\,\alpha_3, \qquad B\,\alpha_2\,\varepsilon = (C - A)\,\alpha_3\,\alpha_1, \qquad C k^2\,\varepsilon\,\alpha_3 = (B - A)\,\alpha_1\,\alpha_2,$$

откуда, обозначая через $\varkappa$ модуль эллиптических функций, находим

$$\alpha_1 = \varepsilon k \sqrt{\frac{BC}{(C - A)\,(B - A)}}, \qquad \alpha_2 = \varepsilon k \sqrt{\frac{AC}{(C - B)\,(B - A)}},$$

$$\alpha_3 = \varepsilon \sqrt{\frac{AB}{(C - A)\,(C - B)}}.$$

Таким образом в выражения p, q, r входят три постоянных k, ε, β; вместо k и α_2 мы можем ввести в выражения для p, q, r постоянную

α_1 по формулам

$$k = \frac{\alpha_1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{(C-A)(B-A)}{BC}}, \qquad \alpha_2 = \alpha_1\sqrt{\frac{A(C-A)}{B(C-B)}},$$

тогда получим

$$p = \alpha_1 \operatorname{cosam}(\varepsilon t + \beta), \qquad q = \alpha_1\sqrt{\frac{A(C-A)}{B(C-B)}} \operatorname{sinam}(\varepsilon t + \beta),$$

$$r = \varepsilon\sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}\, \Delta\mathrm{am}(\varepsilon t + \beta).$$

Вместо постоянной β можно ввести начальный момент t_0 по формуле $\varepsilon t_0 + \beta = 0$, откуда $\beta = -\varepsilon t_0$.

2. ПУТЬ МГНОВЕННОГО ПОЛЮСА НА ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Обозначим через x, y координаты проекции мгновенного полюса Земли на касательную плоскость к земной поверхности в её полюсе инерции, принятом за начало декартовой прямоугольной системы осей координат. Принимая полярный радиус Земли равным единице, получим

$$x = \frac{p}{r} = \frac{\alpha_1}{r} \operatorname{cosam}[\varepsilon(t - t_0)],$$

$$y = \frac{q}{r} = \frac{\alpha_2}{r} \operatorname{sinam}[\varepsilon(t - t_0)],$$

$$r = \varepsilon\sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}\, \Delta\mathrm{am}[\varepsilon(t - t_0)],$$

откуда находим уравнение пути полюса на касательной плоскости

$$x^2 \Big/ \left(\frac{\alpha_1}{r}\right)^2 + y^2 \Big/ \left(\frac{\alpha_2}{r}\right)^2 = 1,$$

а так как на основании наблюдений p и q очень малые величины сравнительно с r, то это уравнение можно принять за уравнение пути мгновенного полюса на земной поверхности. Следовательно, путь мгновенного полюса на земной поверхности есть периодически деформирующийся с течением времени эллипс, так как r есть периодическая функция времени. Центр этого эллипса находится в полюсе инерции Земли; меньшая полуось его равна

$$\frac{\alpha_1}{r} = \frac{\alpha_1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}\, \frac{1}{\Delta\mathrm{am}[\varepsilon(t - t_0)]},$$

а большая его полуось

$$\frac{\alpha_2}{r} = \frac{\alpha_1}{\varepsilon} \frac{C-A}{B} \frac{1}{\Delta \operatorname{am}[\varepsilon(t-t_0)]},$$

при условии $A < B < C$ и $A + B > C$. В частном случае при $A = B$, а потому $k = 0$, путь мгновенного полюса будет окружность радиуса $\alpha_1(C-A)/\varepsilon A = \text{const}$, при чем $r = 2\pi = \varepsilon A/(C-A) = \text{const}$. При очень малой разности $A - B$, что имеет место для Земли, полуоси этого эллипса периодически медлено изменяются. Отношение полуосей этого эллипса будет $\alpha_1/\alpha_2 = \sqrt{B(C-B)/A(C-A)} = \text{const}$, а эксцентриситет его $e = \sqrt{1-\alpha_1^2/\alpha_2^2} = \sqrt{(B-A)(A+B-C)/A(C-A)} = \text{const}$.

3. УГОЛ МЕЖДУ МГНОВЕННОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ И ОСЬЮ НАИБОЛЬШЕГО ЕЁ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

Обозначим через ψ угол между мгновенной осью вращения Земли и осью наибольшего её момента инерции; тогда $\operatorname{tg}\psi = \sqrt{p^2+q^2}/r$ или

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\alpha_1\sqrt{B(C-B)+(B-A)(A+B-C)\sin^2\operatorname{am}[\varepsilon(t-t_0)]}}{B\varepsilon\sqrt{A/(C-A)}\,\Delta\operatorname{am}[\varepsilon(t-t_0)]}.$$

Следовательно, ψ изменяется периодически с периодом $\tau = 2K/\varepsilon$, где K полный эллиптический интеграл первого рода. Угол ψ имеет наименьшее значение при $\operatorname{am}[\varepsilon(t-t_0)] = n\pi$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\operatorname{tg}\psi_{\min} = \alpha_1\varepsilon^{-1}\sqrt{(C-A)(C-B)/AB}$, и наибольшее значение при $\operatorname{am}[\varepsilon(t-t_0)] = (2n+1)\pi/2$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\operatorname{tg}\psi_{\max} = \alpha_1\varepsilon^{-1}(C-A)/B\sqrt{1-k^2}$. Так как по наблюдениям p и q очень малы, то условимся измерять время, принимая скорость вращения Земли в звездные сутки равной $r_0 = 2\pi/\text{сут.} = \varepsilon\sqrt{AB/(C-A)(C-B)}$. Тогда постоянная ε будет равна $\varepsilon = 2\pi\sqrt{(C-A)(C-B)/AB}\,1/\text{сут.}$ При этом условии $\operatorname{tg}\psi_{\min} = \alpha_1/2\pi$, $\operatorname{tg}\psi_{\max} = \alpha_1(2\pi)^{-1}\sqrt{A(C-A)/B(C-B)}\big/\sqrt{1-k^2}$. Если из наблюдений найдены наибольшее и наименьшее значения угла ψ и отношения моментов инерции, то по предыдущим формулам можем вычислить $\alpha_1/2\pi$, модуль k, полный эллиптический интеграл K и период свободной нутации Земли $T = 4K/\varepsilon$ суток, или после подстановки значения $\varepsilon - T = 2K\pi^{-1}\sqrt{AB/(C-A)(C-B)}$. Если бы моменты инерции Земли были постоянны, то период свободной нутации Земли был бы постоянен. Если же с течением времени моменты инерции Земли изменяются, то будут с течением времени изменяться k, K, T.

4. ПЕРИОД ЧЕНДЛЕРА

Постоянную интегрирования α_1 и модуль k можно определить на основании данных, полученных из наблюдений. Из наблюдений получены [1] следующие значения угла ψ:

Наблюдатель	ψ вер. ош.	эпоха	обсерватория
В. Я. Струве	$0''.040 \pm 0''.010$	1841 - 1842	Пулково
Петерс	$0\,.101 \pm 0\,.014$	1843	„
Гюльден	$0\,.125 \pm 0\,.017$	1868	„
Нюрен	$0\,.058 \pm 0\,.015$	1868	„
A. M. W. Downing	$0\,.075 \pm 0\,.015$	1872	Гринвич

На основании этих данных находим

$$\psi_{\min} = \frac{1}{2}(0''.040 + 0''.058) = 0''.049, \quad \psi_{\max} = \frac{1}{3}(0''.101 + 0''.125 + 0''.075) = 0''.100,$$

$$\alpha_1 = 0''.308, \quad \alpha_2 = 0''.311, \quad \varepsilon = 2.0518 \times 10^{-2}\frac{1}{\text{сут}}, \quad \frac{\alpha_1}{2\pi} = 2.3756 \times 10^{-7}, \; k^2 = 0.7547,$$

$$k = 0.86872, \quad K = 2.165.$$

При вычислении мы принимали $C:B:A = 1:0.99678:0.99671$ [2]. Период свободной нутации Земли $T = 4K/\varepsilon = 422.07$ суток. Этот период почти совпадает с периодом Чендлера. Он изменяется с изменением моментов инерции Земли. Hattori в своей работе [3] дает сводку продолжительности периодов Чендлера с 1820 до 1938 года. На основании этои сводки этот период изменяется от 412.0 до 444.4 суток.

5. МГНОВЕННАЯ СКОРОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

Выражение мгновенной скорости ω мы можем написать следующим образом:

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \frac{B\varepsilon^2}{C-A}\left(\frac{A}{C-B} + \frac{C}{B-A}k^2\right) - \varepsilon^2 k^2 \sin^2 \operatorname{am}[\varepsilon(t - t_0)].$$

Из этого выражения заключаем, что Земля вращается неравномерно, так как её мгновенная скорость периодически изменяется с периодом $4K/\varepsilon$, если принять во внимание не только величину, но и направление этой скорости. Следовательно, периодически изменяется и продолжительность звездных суток. При $\operatorname{am}[\varepsilon(t - t_0)] = n\pi$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, ω будет наибольшая

$$\omega^2_{\max} = \frac{B\varepsilon^2}{C-A}\left(\frac{A}{C-B} + \frac{C}{B-A}k^2\right),$$

а при $\operatorname{am}[\varepsilon(t-t_0)] = (2n+1)\pi/2$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, ω будет наименьшая

$$\omega_{\min}^2 = \frac{B\varepsilon^2}{C-A}\left(\frac{A}{C-B} + \frac{C}{B-A}k^2\right) - \varepsilon^2 k^2,$$

или

$$\omega_{\min}^2 = \frac{A\varepsilon^2}{C-A}\left(\frac{B}{C-B} + \frac{B+C-A}{B-A}k^2\right).$$

Из предыдущих формул находим $\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = \varepsilon^2 k^2$, откуда

$$k^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2), \quad \text{где} \quad \varepsilon = 2\pi\sqrt{(C-A)(C-B)/AB}\,\frac{1}{\text{сут}}.$$

6. *ПЕРИОД СВОБОДНОЙ НУТАЦИИ ЗЕМЛИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ N. STOYKO ПОПРАВОК ЧАСОВ*

По наблюдениям поправок очень точных часов N. Stoyko нашел [4], что в начале весны Земля замедляет свое вращение на $0^s.0727$, а в начале осени ускоряет его на $0^s.0577$ в течении средней продолжительности суток за год. Следовательно, $\omega_{\min} = 23^h\,59^m\,59^s.9273 = 359^0\,59'\,58''.9095$, $\omega_{\max} = 24^h\,0^m\,0^s.0577 = 360^0\,0'\,0''.8655$. На основании этих данных получаем: $k^2 = 0.28307$, $k = 0.53205$, $K = 1.704$, $T = 332.20$ суток.

7. *ПЕРИОД СВОБОДНОЙ НУТАЦИИ ЗЕМЛИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ А. Я. ОРЛОВА*

На основании обработки наблюдений изменений географических широт с 1900 до 1940 года А. Я. Орлов получил следующие годичные средние значения координат x_a, y_a полюса вращения земли [5]:

$$x_a = 0''.088\cos 2\pi(t + 0.31), \quad y_a = -0''.075\sin 2\pi(t+0.31),$$

где t считается в годах от начала года. Для координат полюса инерции ξ_a, η_a Земли с 1900 до 1940 года он получил: $\xi_a = 0$, $\eta_a = 0''.03\sin 2\pi(t+0.31)$. Координаты x_a, y_a; ξ_a, η_a отнесены к прямоугольной координатной системе, начало которой находится в среднем полюсе Земли, ось X направлена в плоскости Гринвичского меридиана, а ось Y перпендикулярно к оси X. Н. Л. Бызова [6] на основании теоретических соображений получила те же выражения ξ_a, η_a. Координаты полюса вращения Земли X, Y относительно осей, параллельных предыдущим осям, но имеющих начало в полюсе инерции Земли, будут $X = x_a - \xi_a = 0''.088\cos 2\pi(t+0{,}31)$, $Y = y_a - \eta_a = -0''.105\sin 2\pi(t+0.31)$

Исключая из этих уравнений время t, получим эллипс

$$X^2/(0''.088)^2 + Y^2/(0''.105)^2 = 1,$$

по которому движется полюс вращения около полюса инерции в относительном движении. Следовательно, $\psi_{max} = 0''.105$, а $\psi_{min} = 0''.088$. Поэтому из формулы

$$\operatorname{tg}\psi_{max} = \operatorname{tg}\psi_{min}\sqrt{(C-A)A/(C-B)B}\,\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$$

находим

$$\sqrt{1-k^2} = \frac{\operatorname{tg}\psi_{min}}{\operatorname{tg}\psi_{max}}\sqrt{(C-A)A/(C-B)B} = \sqrt{0.7176},$$

откуда находим: $k^2 = 0.2824$, $k = 0.5314$, $K = 1.704$, $T = 4K/\varepsilon = 332.2$ суток, или $T = 11.1$ мес. $= 0.91$ тропического года. Полученный период совпадает с периодом, полученным на основании результатов N. Stoyko. Полученный период в 11.1 месяцев близок к геофизическому году, равному промежутку времени между двумя последовательными минимумами температуры воздуха. По исследованиям Бызовой продолжительность его изменяется от 11 до 13 месяцев, вследствие чего координата η полюса инерции претерпевает со временем значительные изменения до 0.″08. Следовательно для этой эпохи, к каторой относятся результаты наблюдений поправок часов N. Stoyko и результаты А. Я. Орлова, имеет место для *трехосной* Земли период свободной её нутации в 332.2 суток.

(Поступило 4 ноямбра 1953)

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Костинский — Об изменении астрономических широт. СПБ. 1893.
[2] Naosuke Sekiguchi — Theory of the rotation of the earth having three unequal principal moments of inertia. *Japanese Journal of Astronomy* **1** (1949), № 1.
[3] Tadahico Hattori — On the periodic components of latitude variation. *Ibid.*
[4] A. Stoyko — Du nouveau sur la rotation de la terre. *L'Astronomie*, Juin 1950.
N. Stoyko — La variation de la vitesse de rotation de la terre. *Bulletin Astronomique* **15** (1950), Fasc. III.
[5] А. Я. Орлов — О среднем годовом движении главных осей инерции Земли. *ДАНСССР* **51** (1946), № 7.
[6] Н. А. Бызова — Влияние сезонного переноса масе воздуха на движение земной оси. *ДАНСССР* **58** (1947), № 3.