SUR LA MESURE DE DÉFLEXION D'UNE FONCTION NON ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UNE FONCTION ANALYTIQUE

par

A. BILIMOVITCH (Beograd)

SOMMAIRE. — Équations différentielles intrinsèques de Cauchy. — Mesure vectorielle de déflexion d'une fonction non-analytique par rapport à une ofnction analytique. — Base pour les recherches et classification des fonctions non analytiques. — Accroissement différentiel linéaire.

Dans la théorie des fonctions analytiques les équations différentielles qui expriment les conditions d'analyticité de Cauchy jouent un rôle fondamental. Déjà d'Alembert [1] s'est servi de ces équations dans ses recherches d'Hydrodynamique. Elles ont également joué un rôle très important tant dans les travaux d'Euler et de Lagrange que de ceux de nombreux autres auteurs. A. Cauchy, le fondateur de la théorie analytique des fonctions, dans toute une série de ses travaux, a montré la grande importance de ces équations. B. Riemann a rattaché ces équations à sa théorie géométrique des fonctions analytiques et de la représentation conforme. Vers la même époque K. Weierstrass a développé la théorie des fonctions analytiques, devenue depuis l'une des branches des plus importantes des Mathématiques classiques, que les Mathématiques contemporaines n'ont cessé d'enrichir de conceptions nouvelles, étendant ainsi nos connaissances sur les connexions fonctionnelles entre les grandeurs. Mais dans toutes ces recherches les conditions d'analyticité de Cauchy fûrent exprimées à l'aide des coordonnées.

Dans le présent travail nous donnons d'abord les conditions de Cauchy, sous une forme intrinsèque, sans coordonnées, ce qui nous permet de faire ressortir les propriétés essentielles des fonctions analytiques. Grâce à cette forme, il devient possible d'introduire, toujours sous une forme intrinsèque, la notion de déflexion d'une fonction non-analytique par rapport à une fonction analytique. Partant de cette notion, on peut développer la théorie des fonctions non-analytiques, et, avant tout, arriver à une classification de telles fonctions. Ainsi l'on voit immédiatement à quelle catégorie appartiennent les fonctions para-analytiques de Fréchet, qui ont résulté des considérations toutes différentes, à savoir des applications de lois algébriques.

Comme un premier pas dans le développement de la théorie des fonctions non-analytiques, nous considérons l'accroissement différentiel d'une telle fonction comme fonction de l'accroissement du vecteur de position du point considéré. Il apparaît ainsi l'affineur dépendant de la mesure de déflexion d'analyticité de la fonction non-analytique, qui joue un rôle fondamental dans la théorie de ces fonctions.

1. Considérons une fonction w de nature imaginaire dépendant de la position du point M dans le plan. Nous la supposons de nature telle que l'on puisse séparer ses parties réelle et imaginaire. On aura dans ce cas

$$w(M, i) = P(M) + iQ(M) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

où $i^2 = -1$.

D'après le théorème de Loomann [2], que j'emprunte à L. Bieberbach ([3], p. 40), la fonction w sera analytique si elle satisfait aux conditions suivantes:

1. Elle doit être uniforme et continue;

2. Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ ont des dérivées partielles du premier ordre;

3. Ces dérivées satisfont aux conditions de Cauchy

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Si ces trois conditions sont satisfaites en un point, la fonction est dite analytique en ce point. Si elles sont satisfaites en tous les points d'un domaine, la fonction sera dite analytique dans ce domaine.

Des conditions 1, 2 et 3 il s'ensuit

$$w(M, i) = f(z),$$

où $z = x + yi$. Inversement, on peut obtenir les équation (A) en ce proposant d'exprimer la fonction w à l'aide de z. En effet, si l'on pose $x = z - yi$, la fonction w ne doit pas dépendre de y, c'est-à-dire on doit avoir

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot (-i) + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(-i) + \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y} = 0,$$

d'où résultent immédiatement les équations (A).

Si la fonction w satisfait aux conditions 1. et 2. mais pas à la condition (A), elle sera dite non-analytique, tant au point considéré que dans un certain domaine.

La notion de non-analyticité étant très complexe, nous expliquerons son sens sur un exemple très simple. La fonction

$$w = kx + ly + i(mx + ny)$$

avec

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = k - n, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = l + m$$

sera non-analytique si l'on a $k \neq n$ et $l \neq m$; elle sera par contre analytique si $k = n$ et $l = -m$ dans tout le plan.

2. Pour exprimer sous une forme intrinsèque les conditions (A), nous commencerons par introduire deux gradients aux coordonnées

$$\operatorname{grad} P\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right), \quad \operatorname{grad} Q\left(\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}\right).$$

Alors, de (A) résultent pour la fonction analytique les propriétés de ces gradients suivantes:

$$|\operatorname{grad} P| = |\operatorname{grad} Q|,$$

$$\operatorname{grad} P \perp \operatorname{grad} Q.$$

Le sens du grad Q par rapport au grad P correspond à celui choisi pour l'axe Oy par rapport à l'axe Ox dans le plan Oxy.

Introduisons maintenant la notion du *gradient normal* analogue à celle de vitesse normale dans le cas du mouvement plan d'un corps solide. D'une manière générale, si, dans un plan orienté, on a un vecteur $\vec{V}(V_x, V_y)$ et par $\vec{k}$ on désigne le vecteur-unité du plan orienté, alors le vecteur $[\vec{k}, \vec{V}]$ représentera un vecteur dans ce même plan, perpendiculaire au vecteur $\vec{V}$ de même intensité que le vecteur $\vec{V}$ et de sens correspondant. Ses coordonnées sont $-V_y, V_x$.

Remarquons que, si le vecteur $\vec{V}$ est de nature polaire, le vecteur $[\vec{k}, \vec{V}]$ est de même de nature polaire, car $\vec{k} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$, $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ étant deux vecteurs-unités orthogonaux choisis, dans le plan Oxy. Si $\vec{V}$ est le gradient, le vecteur $[\vec{k}, \vec{V}]$ est le gradient normal.

Après ces remarques, on peut écrire l'équation vectorielle suivante

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{grad} Q = [\vec{k}, \operatorname{grad} P]$$

qui représente les équations (A) sous la forme vectorielle intrinsèque. En effet, cette équation vectorielle peut s'écrire sous la forme

$$\operatorname{grad} Q = [[\vec{e}_1, \vec{e}_2], \operatorname{grad} P] = -\vec{e}_1 (\operatorname{grad} P, \vec{e}_2) + \vec{e}_2 (\operatorname{grad} P, \vec{e}_1),$$

d'où on a immédiatement les équations

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

équivalentes aux équations (A).

L'équation (B) peut être ainsi formulée: le gradient de la partie imaginaire de la fonction analytique est égal au gradient normal de sa partie réelle.

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme

$$\text{(B')} \qquad \operatorname{grad} P = -[\vec{k}, \operatorname{grad} Q].$$

Nous pouvons dire qu'une fonctiou analytique est caracterisée par la figure formée de deux cotés (d'angle) isocèles orthogonaux correspondant respectivement aux gradients des parties réelle (fig. 1) et imaginaire de la fonction analytique complexe du point.

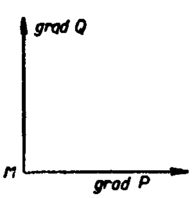

Fig. 1

3. Si la fonction w n'est pas analytique, le gradient du coefficient de la partie imaginaire diffère du gradient normal de la partie réelle, de sorte que la différence

$$\text{(2)} \qquad \vec{B} = \operatorname{grad} Q - [\vec{k}, \operatorname{grad} P]$$

peut être considérée comme mesure vectorielle de la déflexion d'analyticité de la fonction non-analytique donnée au point en question.

On peut aussi introduire le vecteur

$$\vec{b} = \vec{B} : |\operatorname{grad} P|$$

comme mesure vectorielle spécifique de déflexion d'analyticité de la fonction non-analytique donnée au point considéré.

La figure fondamentale d'une fonction non-analytique, dans le cas général, consiste en un angle aigu aux côtés inégaux formé des gradients de la partie réelle et de la partie imaginaire (fig. 2).

La construction de la mesure vectorielle de déflexion peut se faire de la manière suivante. On construit d'abord (fig. 2b), pour le vecteur grad P, le gradient normal, le vecteur $[\vec{k}, \operatorname{grad} P] = \overrightarrow{MS}$, puis on joint son extrémité, le point S, avec celle, T, du vecteur grad Q. Le vecteur $\overrightarrow{ST}$ représente la mesure de déflexion cherchée, c'est-à-dire le vecteur $\vec{B}$. D'après (2) le vecteur $\vec{B}$ a pour ses coordonnées

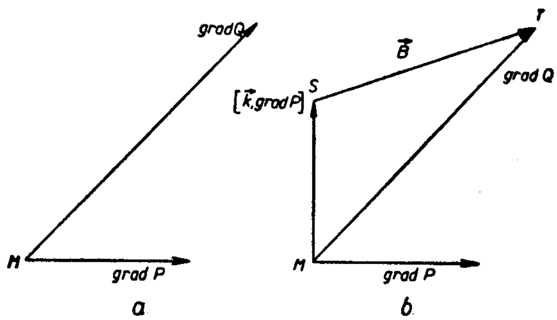

Fig. 2

$$B_x = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x},$$

d'où l'on a

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} + B_x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} + B_y. \tag{3}$$

Le carré d'intensité du vecteur $\vec{B}$, à savoir

$$B^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)^2,$$

est considéré comme la mesure scalaire de déflexion d'analyticité de la fonction non-analytique. En effet, la condition $B^2 = 0$ conduit aux équations différentielles de Cauchy.

On voit donc que, pour arriver à la construction du vecteur $\vec{B}$, nous sommes partis du vecteur grad P. Mais si on part du vecteur grad Q, on arrivera à un autre vecteur, que nous désignerons par $\vec{B'}$; celui-ci est analogue au vecteur $\vec{B}$ et est intimément lié avec ce dernier. Pour construire le vecteur $\vec{B'}$ on procédera de la manière suivante. On commencera par construire (fig. 3), pour le grad Q, le gradient normal de signe contraire de celui de $\vec{B'}$; on aura ainsi le vecteur $\overrightarrow{MN}$. Puis joignons l'extrémité L du vecteur grad P au point N. Le vecteur $\overrightarrow{LN} = \vec{B'}$ sera la mesure de déflexion relative au vecteur grad Q. On démontre sans difficulté que les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{B'}$ sont liés par la relation

$$\vec{B} = [\vec{k}, \vec{B'}],$$

c'est-à-dire que la mesure de déflexion relative au vecteur grad P est le vecteur perpendiculaire à la mesure de déflexion relative au vecteur grad Q. En effet, d'après la construction, le vecteur B' a pour valeur

$$\vec{B'} = -[\vec{k}, \text{grad } Q] - \text{grad } P$$

mais, d'après (2)

$$\vec{B} = \text{grad } Q - [\vec{k}, \text{grad } P],$$

il s'ensuit

$$[\vec{k}, \vec{B'}] = [-\vec{B'}, k] = [[\vec{k}, \text{grad } Q] + \text{grad } P, \vec{k}] =$$
$$= \text{grad } Q - [\vec{k}, \text{grad } P] = \vec{B}.$$

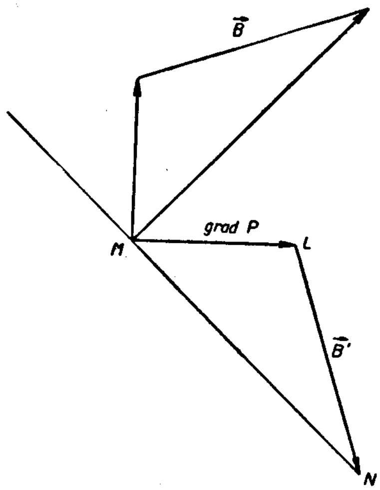

Fig. 3

4. Le vecteur $\vec{B}$ peut être décomposé en deux composantes intrinsèques:

1) $\vec{B}_1$ suivant grad P,

2) $\vec{B}_2$ suivant le gradient normal de cette fonction P.

On peut donc écrire

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Pour les valeurs algébriques de ces composantes on a:

$$B_1 = \frac{1}{|\text{grad } P|} (\text{grad } Q, \text{grad } P) = |\text{grad } Q| \cdot \cos \gamma,$$

où les paranthèses désignent le produit scalaire et γ l'angle entre les vecteurs grad P et grad Q,

$$B_2 = \frac{1}{|\text{grad } P|} (\text{grad } Q, [\vec{k}, \text{grad } P]) - |\text{grad } P| =$$
$$= |\text{grad } Q| \sin \gamma - |\text{grad } P|.$$

A l'aide des coordonnées ces composantes s'expriment par

$$B_1 = K^{-1}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y}\right),$$

$$B_2 = K^{-1}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{x\partial}\right) - K$$

où

$$K = +\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2}\ .$$

Remarquons que, si $B_1 = 0$, les vecteurs grad P et grad Q sont orthogonaux. Si $B_2 = 0$, l'extrémité du vecteur grad Q se trouve sur la droite parallèle au vecteur grad P à une distance égale à l'intensité de ce gradient.

5. Les vecteurs grad P et grad Q caractérisent la fonction non-analytique en tous les points. Mais il est préférable de prendre les vecteurs

$$\text{grad}\, P \ \text{ et } \ \vec{B}, \tag{4}$$

car le deuxième vecteur indique en même temps la nature de la fonction non-analytique. En outre, les deux derniers vecteurs déterminent aussi le second gradient, grad Q, car on a

$$\text{grad}\, Q = B + [k,\ \text{grad}\, P]\,.$$

On peut considérer que les vecteurs (4) caractérisent le champ de la fonction non-analytique. Il est manifeste qu'au lieu des vecteurs grad P et $\vec{B}$ on peut prendre les vecteurs grad Q et $\vec{B}'$, car les deux premiers déterminent les deux derniers et inversement.

D'après les valeurs des vecteurs (4) peut s'effectuer la classification des fonctions non-analytiques. Sans entrer dans cette classification même, nous ferons la remarque suivante.

On peut, avant tout, séparer la classe des fonctions non-analytiques pour lesquelles l'angle δ entre les vecteurs grad P et B a une valeur constante. Parmi ces fonctions deux types spéciaux se manifestent:

1. $\delta = 0$ avec $B_2 = 0$,
2. $\delta = 90^0$ avec $B_1 = 0$.

Si, en outre, grad P a une direction fixe, on a les deux familles de fonctions para-analytiques de Fréchet [4]:

„la famille D" avec

$$P = A(x), \qquad Q = yA'(x) + B(x)$$

où

$$\operatorname{grad} P\,(A'(x), 0), \quad \operatorname{grad} Q\,(yA''(x) + B'(x), A'(x))$$

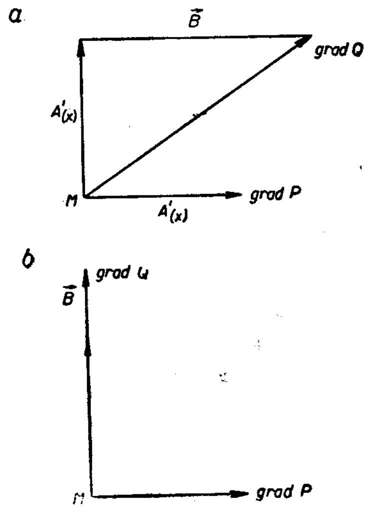

Fig. 4

et

$$B_x = yA''(x) + B'(x), \quad B_y = 0$$

et, par conséquent $B_2 = 0$, $\delta = 0$ (fig. 4, *a*);

„la famille P“ avec

$$P = P(x), \qquad Q = Q(y),$$

où

$$\operatorname{grad}\,(P'(x), 0), \qquad \operatorname{grad} Q\,(0, Q'(y))$$

et

$$B_x = 0, \quad B_y = Q'(y) - P'(x)$$

et, par suite

$$B_1 = 0, \quad \delta = 90^0 \text{ (fig. 4, } b).$$

Particulièrement intéressante est aussi la classe des fonctions non-analytiques lorsque, par exemple, la fonction P est harmonique, c'est-à-dire satisfait à la condition

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} P = \Delta P = 0,$$

Δ étant le Laplacien. On peut alors, comme l'on sait, déterminer la fonction Q^*, conjuguée de la fonction P.

L'expression

$$P + i\,Q^*$$

représente dans ce cas le potentiel vectoriel. A l'aide d'une telle fonction, on peut donner à la fonction non-analytique w la forme suivante

$$w = P + i\,Q = P + i\,Q^* + i\,(Q - Q^*) = P + i\,Q^* + ig,$$

où $g = Q - Q^*$. La fonction w devient alors la somme de la partie analytique $P + i\,Q^*$ et de la fonction ig. La mesure de déflexion d'une telle fonction non-analytique est

$$\vec{B} = \operatorname{grad} g.$$

6. Pour pouvoir étudier la variation de la fonction

$$w\,(x, y; i) = P\,(x, y) + i\,Q\,(x, y)$$

considérons l'accroissement différentiel de ce scalaire sous la forme

$$\frac{\partial w}{\partial x} dx \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial w}{\partial y} dy \cdot \vec{e}_2$$

en le traitant comme une fonction vectorielle linéaire de l'accroissement différentiel

$$dx \cdot \vec{e}_1 + i\,dy \cdot \vec{e}_2 \tag{5}$$

du vecteur de position du point M. On a alors

$$\frac{\partial w}{\partial x} dx \cdot \vec{e}_1 + \frac{\partial w}{\partial y} dy \cdot \vec{e}_2 = L\,(dx \cdot \vec{e}_1 + i\,dy \cdot \vec{e}_2). \tag{6}$$

Si l'on introduit l'affineur

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}$$

on pourra exprimer la fonction linéaire au second membre à l'aide du produit scalaire (5) de l'affineur $\mathfrak{A}$ et du vecteur (5). Après multiplication on a de (6)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx \cdot \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\,\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dy \cdot \vec{e}_2 =$$

$$= a_{11}\,dx \cdot \vec{e}_1 + a_{21}\,dx \cdot \vec{e}_2 + i\,a_{12}\,dy \cdot \vec{e}_1 + i\,a_{22}\,dy \cdot \vec{e}_2 .$$

En égalant les coordonnées des deux membres de cette équation vectorielle, on aura les deux équations scalaires

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx = a_{11}\,dx + i\,a_{12}\,dy,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\,\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dy = a_{21}\,dx + i\,a_{22}\,dy.$$

Pour que ces deux équations puissent être satisfaites pour toutes les valeurs de dx et dy, les coordonnées de l'affineur $\mathfrak{A}$ doivent avoir les valeurs suivantes

$$a_{11} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad a_{12} = 0,$$

$$a_{21} = 0, \qquad i\,a_{22} = \frac{\partial P}{\partial y} + i\,\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Dans ce cas, on peut exprimer l'affineur $\mathfrak{A}$ comme suit

$$\mathfrak{A} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}, & 0, \\ 0, & -i\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y} + B_x i, & 0, \\ 0, & \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y} + B_y \end{Bmatrix}$$

ou, finalement,

$$\mathfrak{A} = \mu \mathfrak{J} + \begin{Bmatrix} iB_x, & 0 \\ 0 & B_y \end{Bmatrix},$$

où

$$\mu = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}$$

et

$$\mathfrak{J} = \begin{Bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Bmatrix}.$$

Le premier affineur $\mu \mathfrak{J}$ caractérise complétement le scalaire μ. Dans le cas d'une fonction analytique, μ est la dérivée de cette fonction au point considéré. Le second affineur caractérise la déflexion précisément de la direction de l'accroissement différentiel de la fonction non-analytique par rapport à l'accroissement du vecteur de position du point M, respectivement par rapport au déplacement différentiel de ce point. Ce second affineur détermine, en chaque point, une transformation affine dont le rôle est fondamental dans les recherches sur les fonctions non-analytiques. Toute proposition de nature soit différentielle soit intégrale de la théorie des fonctions analytiques peut être étudiée du point de vue d'extension ou de modification dans le cas d'une fonction non-analytique, au sens précédent en rapport avec les champs des vecteurs grad P et $\vec{B}$ et le caractère de la transformation affine précédente en chaque point de ce champ.

(Reçu le 10 juin 1953)

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. D'Alembert — Essai d'une nouvelle théorie de la résistance de fluides. Paris 1752.
[2] H. Loomann — *Gött. Nachr.*, 1923.
[3] L. Bieberbach — Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I., Vierte Auflage, 1945.
[4] M. Fréchet — Sur deux familles de fonctions analogues à la famille de fonctions analytiques. *C. R.* **235** (1952), p. 1585.
[5] А. Билимовић — Геометриске основе рачуна са диадама. I. Диада и афинор. Београд. 1940.