QUELQUES REMARQUES SUR LES FRACTIONS CONTINUES

par

MAHMUD BAJRAKTAREVIĆ (Sarajevo)

SOMMAIRE — Le but principal de cette note est de donner sous condition supplémentaire l'égalité d'une fraction continue et de sa série correspondante

L'objet de ce travail est l'application aux fractions continues réelles des conclusions générales obtenues par l'auteur dans le travail [3]. Les résultats de cette application sont exprimés par trois théorèmes.

Le théorème I donne la possibilité d'ordonner certaines fractions continues de la forme

$$\frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots$$

suivant les valeurs décroissantes en exprimant cette valeur en fonction strictement décroissante d'une variable z $(0 \leqslant z \leqslant 2)$.

Le théorème II à chaque $z \in \mathrm{I}$[1] fait correspondre une suite de dénominateurs partiels $\{b_\nu\}$ de sorte que la fraction semirégulière continue correspondante représente une fonction de z continue presque partout dans I.

Enfin, plusieurs théorèmes sont connus ([1], p. 342–346) à l'aide desquels on peut, en supposant la convergence uniforme de la fraction continue

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \ldots \quad (a_n \neq 0),$$

démontrer l'égalité de cette fraction et de sa "série correspondante" dans une certaine région de la variable (complexe) x. Dans ce travail on donne un théorème inverse (le théorème III) qui démontre cette égalité en supposant la convergence de la série seminormale ([1], p. 304) des puissances entières de la variable réelle x.

---

[1] Pour la signification de certaines notations voir [3].

I

Soit $f_n(x) = a_n(b_n - x)^{-1} > 0$ $(-A_n \leqslant x \leqslant +A_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ une suite donnée de fonctions où $a_n > 0, b_n > 0, A_n > 0$ sont trois suites de nombres satisfaisant aux relations

$$\frac{a_n}{b_n - A_n} \leqslant A_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

THÉORÈME I. *Sous ces conditions la fraction continue*

$$\xi_0(z) = \frac{\varepsilon_0 a_0 |}{| b_0} - \frac{\varepsilon_1 a_1 |}{| b_1} - \frac{\varepsilon_2 a_2 |}{| b_2} - \ldots \quad (z \in I)$$

est uniformément convergente pour chaque valeur de $z \neq p/2^q$ [2] *du segment* $I = [0,2]$ *et représente sur ce segment une fonction de* z *strictement décroissante de la valeur*

$$\xi_0(0) = \frac{a_0|}{|b_0} - \frac{a_1|}{|b_1} - \frac{a_2|}{|b_2} - \ldots$$

jusqu'à la valeur $\xi_0(2), = -\xi_0(0)$, *ayant les discontinuités aux points* $z = p/2^q$ $(0 < p < 2^{q+1},\ q \geqslant 0)$ *et seulement à ces points.*

Démonstration. Les fractions $a_n/(b_n - x)$ satisfont aux conditions ([3], (1)) et particulièrement aux conditions ([3], 1. G. 3°). Par conséquent, d'après les résultats obtenus dans ([3], 1.), la fraction continue $\xi_0(z)$ représente une fonction de z sur le segment I strictement décroissante ayant les propriétés ([3], 1. G. 3°). D'autre part, les conditions citées ci-dessus sont équivalentes aux conditions suivantes:

$$b_0 > A_0, \ b_n \geqslant A_n + \frac{a_n}{A_{n-1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Mettant

$$A_n = 1 : c_{n+1}, \ b_n = b'_{n+1}, \ a_n = a'_{n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ces conditions deviennent:

$$c_1 b_1' > 1, \ c_n b_n' \geqslant 1 + c_{n-1} c_n a_n' \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Or, d'après un théorème connu ([1]), p. 257 - 258), $\xi_0(z)$ est convergente pour chaque valeur de $z \in I$ (z'' et z' étant considérés comme deux numbres différents pour lesquels, d'après ([3], 1. k.), $\xi_0(z'') > \xi_0(z')$). Maintenant, la convergence uniforme ponctuelle pour $z \in I$ $(z \neq p/2^q)$, respectivement

[2] Pour $z = p/2^q$ la fonction continue correspondante est uniformément convergente à droite ou à gauche suivant que ce nombre, dans le système binaire, a la periode égale à 0 ou à 1.

la convergence uniforme ponctuelle à droite (gauche) pour $z = z'$ $(z = z'')$ dans le cas où $z = p/2^q$, tenant compte de ce que la suite des fonctions

$$x_n^{(0)}(z, 0) = \frac{\varepsilon_0 a_0|}{|b_0} - \frac{\varepsilon_1 a_1|}{|b_1} - \ldots - \frac{\varepsilon_n a_n|}{|b_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

d'après ([3], (26)) pour $t = 0$ et ([3], (29)), est une suite des fonctions décroissantes, découle immédiatement d'un théorème déjà connu ([2], p. 281). D'après ce qui vient d'être dit et d'après ([3], 1 C et 1 D), on conclut que $\xi_0(z)$ est strictement décroissante et discontinue seulement aux points $z = p/2^q$.

II

À tout nombre irrationnel donné $r = c_0, c_1 c_2 \ldots$ et à tout nombre $z = d_0, d_1 d_2 \ldots$ [3] correspond une suite (et une seule) ([1]; p. 175, Satz 2) [4] des nombres b_n' $(n = -1, 0, 1, 2, \ldots)$ tels que

$$r = b'_{-1} + \frac{\varepsilon_0|}{|b_0'} - \frac{\varepsilon_1|}{|b_1'} - \frac{\varepsilon_2|}{|b_2'} - \ldots, \tag{1}$$

avec

$$b'_{-1} = 1 - \frac{1}{2}[(-1)^{d_0} + (-1)^{c_0}], \quad b_n' \geqslant 1, \quad b_n' \geqslant 1 + \varepsilon_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$\{\varepsilon_n\}$ étant la suite des nombres $\varepsilon_n = \pm 1$ $(n \geqslant 0)$ qui correspondent au nombre z ([3]; (3)).

Introduisons maintenant la suite $\{b_n\}$ définie par $b_n = b_n' + 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. À tout $z \in I$, *r étant donné et fixe*, correspond une suite et une seule[4] b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Soit $\{a_n\}$ la suite des nombres $a_n = \pm 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ correnspondant au nombre $\zeta \in I$ ([3]; (3)). Alors la fraction

---

[3] c_n et d_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sont les chiffres des nombres r et z représentés dans le système binaire.

[4] L'exception fait le cas où $z = p/2^q$ $(0 < p < 2^{q+1},\ q \geqslant 0)$. Dans ce cas à chaque forme z'' et z' du nombre z correspond une suite $\{b_n'\}$, c'est-à-dire

$$r = b'_{-1} + \frac{\varepsilon_0|}{|b_0'} - \ldots - \frac{\varepsilon_{q-1}|}{|b'_{q-1}} - \frac{\varepsilon_q|}{|b_q'} + \frac{1\ |}{|b'_{q+1}} - \frac{1\ |}{|b'_{q+2}} - \ldots \quad \text{pour } z''$$

et

$$r = b'_{-1} + \frac{\varepsilon_0|}{|b_0'} - \ldots - \frac{\varepsilon_{q-1}|}{|\bar{b}'_{q-1}} + \frac{\varepsilon_q|}{|\bar{b}_q'} + \frac{1\ |}{|\bar{b}'_{q+1}} - \frac{1\ |}{|\bar{b}'_{q+2}} - \ldots \quad \text{pour } z'$$

avec

$$|\bar{b}'_{q-1} - b'_{q-1}| = 1.$$

continue, semirégulière et convergente

$$\xi(z, \zeta) = \frac{a_0|}{|b_0} - \frac{a_1|}{|b_1} - \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} - \dots$$

est une fonction de z et ζ. Une de ses propriétés, ζ étant variable et z constant, est donnée par le théorème 1 en y posant a_n à la place de ε_n, 1 au lieu de a_n et en supposant $b_n \geqslant 2$. Ici nous allons étudier la continuité de $\xi(z, \zeta)$ considérée comme fonction uniquement de z, ζ *étant constant.* Les deux formes z'' et z' d'un nombre $z \in I$ égal à $p/2^q$, seront considérées comme deux *nombres différents.* Ainsi, à tout nombre $z \in I$ correspond une valeur et une seule de $\xi(z, \zeta)$. Sous ces conditions on a le

THÉORÈME II. *La fonction* $\xi(z, \zeta)$ *est continue pour chaque* $z \neq p/2^q$ $(0 < p < 2^{q+1},\ q \geqslant 0)$ *de* I. *Pour* $z = z''$ *elle est continue à gauche et pour* $z = z'$ *elle est continue à droite.* $\xi(z, \zeta)$ *admet les (seuls) points de discontinuité aux points* $z \neq p/2^q$.

Démonstration. Il est nécessaire de distinguer deux cas.

A. Supposons que l'on ait $\zeta \neq p/2^q$ $(0 < p < 2^{q+1},\ q \geqslant 0)$.

a) $z \neq p/^q$. — Soit $\bar{d}_0, \bar{d}_1, \bar{d}_2 \dots = \bar{z} \neq z$ un point du segment I et k un nombre entier quelconque $\geqslant 0$. En supposant $|\bar{z} - z|$ suffisamment petit, il existe toujours un entier $n \geqslant k$ tel que $\bar{d}_\nu = d_\nu$ $(\nu = 0, 1, \dots, n-1)$, $d_n + \bar{d}_n = 1$, et par conséquent $\bar{\varepsilon}_\nu = \varepsilon_\nu$ $(\nu = 0, 1, \dots, n-1)$, $\bar{\varepsilon}_n + \varepsilon_n = 0$. Alors, tenant compte de la définition des suites $\{b_\nu\}$ et $\{\bar{b}_\nu\}$ correspondant aux nombres z et $\bar{z}$ et de la définition des fractions continues semirégulières ([1]; p. 154), on a

$$\xi(z, \zeta) = \frac{a_0|}{|b_0} - \frac{a_1|}{|b_1} - \dots - \frac{a_{n-2}|}{|b_{n-2} - t_n},$$

$$\xi(\bar{z}, \zeta) = \frac{a_0|}{|b_0} - \frac{a_1|}{|b_1} - \dots - \frac{a_{n-2}|}{|b_{n-2} - \bar{t}_n},$$

où

$$t_n = \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} - \frac{a_n|}{|b_n} - \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} - \dots, \qquad \bar{t}_n = \frac{a_{n-1}|}{|\bar{b}_{n-1}} - \frac{a_n|}{|\bar{b}_n} - \frac{a_{n+1}|}{|\bar{b}_{n+1}} - \dots$$

et $|b_{n-1} - \bar{b}_{n-1}| = 1$. On démontre facilement que l'on a

$$|t_n| < 1, \quad |\bar{t}_n| < 1, \quad t_n \cdot \bar{t}_n > 0. \tag{2}$$

Le théorème de la moyenne donne

$$\xi(\bar{z}, \zeta) - \xi(z, \zeta) =$$

(3) $$= a_0 a_1 \ldots a_{n-2} (\bar{t}_n - t_n) \cdot \left[\prod_{\nu=0}^{n-2} \frac{1|}{|b_\nu} - \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} - \ldots - \frac{a_{n-2}|}{|b_{n-2} - \tau_n} \right]^2,$$

$$\tau_n = t_n + \theta(\bar{t}_n - t_n), \quad 0 < \theta < 1.$$

Il est évident que l'on a simultanément $\bar{z} \to z$, $n \to \infty$. Compte tenu de l'hypothèse $\xi \neq p/2^q$, l'égalité $a_{\nu+1} = -1$ est remplie pour une infinité de valeur de ν. Tout facteur, se trouvant entre les crochets du second membre de (3) et correspondant à une de ces valeurs de $\nu \leqslant n - 3$, est plus petit que $1/b_\nu \leqslant 1/2$, les autres facteurs, d'après la valeur aboslue, étant $\leqslant 1$. D'autre part, pour chaque entier $N > 0$ on peut toujours trouver un mombre $n_0(N)$ suffisamment grand tel que, pour chaque $n \geqslant n_0$ (N), l'égalité $a_{\nu+1} = -1$ est remplie au moins pour N valeurs de $\nu < n - 2$. Pour chacune de ces valeurs de n, le produit entre les crochets de (3) est plus petit que 2^{-N}. D'après cela et (2) on a $|\xi(\bar{z}, \zeta) - \xi(z, \zeta)| < 4^{-N}$, et le théorème II est démontré dans ce cas.

b. $z = z'' = p/2^q = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{q-1} 0\bar{1}$. Soit $\bar{z} = \bar{d}_0, \bar{d}_1 \bar{d}_2 \ldots < z''$ un nombre donné tel que $z'' - \bar{z}$ soit suffisamment petit. Alors on peut toujours trouver un entier $n > q$ tel que l'on a $\bar{d}_\nu = d_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n - 1)$, $\bar{d}_n = 0$, $d_n = 1$. Tenant compte que $\varepsilon_\nu = 1$ $(\nu \geqslant q + 2)$ et que r est irrationnel, d'après (1) et la définition des fractions continues semiréguliers, on a $b'_\nu - \varepsilon_{\nu+1} \geqslant 1$, respectivement $b'_\nu \geqslant 2$ et par conséquent $b_\nu \geqslant 3$ $(\nu \geqslant q + 1)$. D'après cela et (3), en choisissant $z'' - \bar{z}$ suffisamment petit de sorte que l'on a $n \geqslant q + 2$, on obtient

(4) $$|\xi(\bar{z}, \zeta) - \xi(z'', \zeta)| < 4^{2+q-n} \quad (n \geqslant q + 2),$$

d'où il suit immédiatement que $\xi(z, \zeta)$ est continue à gauche au point $z = z''$.

c. D'une manière tout à fait analogue on démontre que $\xi(z, \zeta)$ est continue à droite au point $z = z' = p/2^q = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{q-1} 1\bar{0}$.

B. Supposons maintenant que l'on ait $\zeta = p_1/2^{q_1}$, c'est-à-dire $\zeta = \zeta''$ où $\zeta = \zeta'$. Alors on a $a_\nu = 1$ $(\nu \geqslant q_1 + 2)$.

a. $z = z'' = p_2/2^{q_2}$. Alors $b_\nu \geqslant 3$ $(\nu \geqslant q_2 + 1)$. Posons $q = \max(q_1, q_2)$ et choisissons $\bar{z} < z''$ de sorte que $n > q + 2$. Alors, d'après (3), on a encore (4) et la continuité de $\xi(z, \zeta)$ au point $z = z''$ à gauche est démontrée.

b. D'une manière analogue on démontre que $\xi(z, \zeta)$ est continue à droite au point $z = z'$.

c. $z \neq p/2^q$. Dans ce cas il est nécessaire de distinguer deux cas suivant que r, z étant donné, a la forme

$$r = b'_{-1} + \frac{\varepsilon_0|}{|b'_0} - \dots - \frac{\varepsilon_m|}{|b'_m} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \dots \tag{5}$$

ou non.

Supposons d'abord que r ait la forme (5). Le nombre z correspondant ayant la forme $z = d_0, d_1 \dots d_m (1 - d_m) d_m (1 - d_m) \dots$, les chiffres 0 et 1 se succèdent alternativement à partir de l'indice m ou $m+1$ et la suite $\{b_\nu\}$ correspondante est définie par $b_\nu = b'_\nu + 1$ $(\nu = 0, 1, \dots, m)$, $b_\nu = 2$ $(\nu = m+1, m+2, \dots)$. En choisissant maintenant l'indice i suffisamment grand, on aura

$$\xi(z, \zeta) = \frac{a_0|}{|b_0} - \dots - \frac{a_i|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \dots .$$

Soit $\bar{z} \neq z$ un nombre tel que $\bar{d}_\nu = d_\nu$ $(\nu = 0, 1, \dots, n-1)$, $d_n + \bar{d}_n = 1$ et tel que $n - i$ soit suffisamment grand. On aura

$$\xi(\bar{z}, \zeta) = \frac{a_0|}{|b_0} - \dots - \frac{a_{n-2}|}{|b_{n-2}} - \frac{1\ |}{|\bar{b}_{n-1}} - \frac{1|}{|\bar{b}_n} - \frac{1\ |}{|\bar{b}_{n+1}} + \dots,$$

où $\bar{b}_{n-1} = 3$, $\bar{b}_\nu \geqslant 2$ $(\nu = n, n+1, n+2, \dots)$. Dans ce cas on a

$$t_n = \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \dots = 1, \quad \frac{1}{3} < \bar{t}_n = \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|\bar{b}_n} - \frac{1\ |}{|\bar{b}_{n+1}} - \dots \leqslant \frac{1}{2}$$

et

$$\xi(z, \zeta) = \frac{a_0|}{|b_0} - \frac{a_1|}{|b_1} - \dots - \frac{a_i|}{|2} - \frac{\overset{i+1}{\overbrace{1}}|}{|2} - \frac{\overset{i+2}{\overbrace{1}}|}{|2} - \dots - \frac{\overset{n-2}{\overbrace{1}}\ |}{|2 - t_n} =$$

$$= \frac{a_0|}{|b_0} - \frac{a_1|}{|b_1} - \dots - \frac{a_i|}{|2-1},$$

$$\xi(\bar{z}, \zeta) = \frac{a_0|}{|b_0} - \frac{a_1|}{|b_1} - \dots - \frac{a_i|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \dots - \frac{1\ |}{|2 - \bar{t}_n}.$$

Posant

$$f(x) = \frac{a_0|}{|b_0} - \frac{a_1|}{|b_1} - \dots - \frac{a_i|}{|2 - x},$$

$$U_n(x) = \frac{\overset{1}{\breve{1}}|}{|2} - \frac{\overset{2}{\breve{1}}|}{|2} - \dots - \frac{\overset{n}{\breve{1}}|}{|2 - x} = \frac{n - (n-1)x}{(n+1) - nx}$$

on a

$$\xi(z,\zeta)=f(1),\quad \xi(\bar{z},\zeta)=f\left\{\frac{(n-i-2)-(n-i-3)\bar{t}_n}{(n-i-1)-(n-i-2)\bar{t}_n}\right\}.$$

La dernière égalité, grâce à la continuité de $f(x)$, pour $n\to\infty$, donne

$$\xi(\bar{z},\zeta)\to f(1)=\xi(z,\zeta)\quad(\bar{z}\to z).$$

Supposons maintenant que r, z étant donné, ne se présente pas sous la forme (5). Alors il existe une infinité de valeurs de l'indice ν pour lesquelles $b'_\nu\geqslant 2$ et par conséquent $b_\nu\geqslant 3$. Dans ce cas (3) peut être écrit sous la forme

$$\xi(\bar{z},\zeta)-\xi(z,\zeta)=a_0\ldots a_{q_1+1}(\bar{t}_n-t_n)\cdot\left[\prod_{\nu=0}^{q_1}\frac{1|}{|b_\nu}-\frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}}-\ldots-\frac{a_{n-2}|}{|b_{n-2}-\tau_n}\right]^2\cdot$$

$$(6)\qquad \cdot\left[\prod_{\nu=q_1+1}^{n-2}\frac{1|}{|b_\nu}-\frac{1|}{|b_{\nu+1}}-\ldots-\frac{1|}{|b_{n-2}-\tau_n}\right]^2\quad(n\geqslant q_1+3).$$

Pour tout entier $N>0$ on peut toujours trouver un entier $n_0(N)$ suffisamment grand tel que pour chaque $n\geqslant n_0(N)$ il existe au moins N valeurs de ν $(q_1+1\leqslant\nu\leqslant n-2)$ pour lesquelles $b_\nu\geqslant 3$. Pour chacune de ces valeurs de ν on a

$$\frac{1|}{|b_\nu}-\frac{1|}{|b_{\nu+1}}-\ldots-\frac{1|}{|b_{n-2}-\tau_n}\leqslant\frac{1}{2},$$

les autres facteurs du second membre de (6) ne déppassant pas l'unité en valeur absolue. De (6) en tire

$$|\xi(\bar{z},\zeta)-\xi(z,\zeta)|\leqslant 4^{-N}$$

d'où il suit immédiatement la continuité de $\xi(z,\zeta)$,

L'inégalité $\xi(z'',\zeta)\neq\xi(z',\zeta)$ $(z=p/2^q)$ résulte immédatement de ([1]; p, 157, Satz 2) et de la définition de la suite $\{b_\nu\}$[4]).

Ainsi le théorème II est démontré entièrement.

III

Soit

$$P_0(z,x) \equiv 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(z)} x^n$$

la „série correspondante" des puissances entières ([1], p. 302) de la fraction continue

$$R_0(z,x) \equiv 1 + \frac{-\varepsilon_0 a_0 x|}{|\ 1} + \frac{-\varepsilon_1 a_1 x|}{|\ 1} + \frac{-\varepsilon_2 a_2 x|}{|\ 1} + \ldots,$$

c'est-à-dire soit $P_0(z,x) \sim R_0(z,x)$ („ $\sim$ " indiquant la correspondance de la série et de la fraction continue), où $a_n > 0$ $(n = 0, 1,2,\ldots)$ est une suite de nombres positifs, $\{\varepsilon_n\}$ la suite des nombres $\varepsilon_n = \pm 1$ correspondant au nombre $z \in I$ et $\{c_n^{(z)}\}$ la suite des coefficients de la "série correspondante" complètement définis par les suites $\{a_n\}$ et $\{\varepsilon_n\}$ ([1], p. 302—304).

THÉORÈME III. *Si la série $P_0(z,x)$ satisfait aux conditions:*

1^0 *Pour chaque valeur de $z \in I$ (les deux formes du nombre $z = p/2^q$ dans le système binaire étant considérées comme deux nombres différents) $P_0(z,x)$ est convergente pour $0 < x < R$.*

2^0 *Pour chaque x $(0 < x < R)$, $P_0(z,x)$ est une fonction de z définie sur le segment I, croissante et continue à droite (gauche) pour chaque $z \in I$.*

Alors on a

$$R_0(z,x) \equiv P_0(z,x) \quad (z \in I, \quad |x| < R).$$

Démonstration. De la correspondance $P_0(z,x) \sim R_0(z,x)$ d'après un théorème connu ([1], p. 309, Satz 7), il suit l'existence d'une suite déterminée de séries des puissances entières de x

$$\{P_m^{(z)}(x)\} \quad (m = 1,2,\ldots)$$

satisfaisant au système d'identités formelles

$$(1) \qquad P_m^{(z)}(x) = 1 + \frac{-\varepsilon_m a_m x}{P_{m+1}^{(z)}(x)} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ldots;\ \ P_0^{(z)}(x) \equiv P_0(z,x))$$

avec

$$P_m^{(z)}(x) \sim 1 + \frac{-\varepsilon_m a_m x|}{|\ 1} + \frac{-\varepsilon_{m+1} a_{m+1} x|}{|\ 1} + \ldots \frac{-\varepsilon_{m+n} a_{m+n} x|}{|\ 1} + \ldots$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

Si l'on introduit les notations $P_m(z, x)$ et $R_m(z, x)$ définies par

$$P_m(z, x) \sim 1 + \frac{-\varepsilon_0 a_m x\,|}{|\ 1} + \frac{-\varepsilon_1 a_{m+1} x\,|}{|\ 1} + \frac{-\varepsilon_2 a_{m+2} x\,|}{|\ 1} + \ldots \equiv R_m(z, x)$$

$$(m = 0, 1\ 2, \ldots),$$

on a $P_m^{(z)}(x) \equiv P_m(z^{(m)}, x)$ où $z^{(m)}$ pour chaque $m = 0, 1, 2, \ldots$ est défini par la suite $\varepsilon_n^{(m)} = \varepsilon_{m+n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Mais il est facile de démontrer que

$$z^{(m)} = 1 - (-1)^{d_{m-1}} + 2^m (z - z_{m-1})(-1)^{d_{m-1}}$$

$$\left\{ z^{(0)} = z; \quad z_{m-1} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{d_n}{2^n}; \ m = 1, 2, \ldots \right\}$$

ce qui veut dire que $z^{(m)} \in I$.

Maintenant les indetités formelles (1) peuvent être écrites sous la forme

$$P_m(z^{(m)}, x) = 1 + \frac{-\varepsilon_m a_m x}{P_{m+1}(z^{(m+1)}, x)} \ (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

$z^{(m+1)}$ et $z^{(m)}$ étant liés par la relation

$$z^{(m+1)} = 2\, z^{(m)} \quad \text{pour} \quad d_{m-1} = d_m = 1$$

(et alors on a $0 \leqslant z^{(m)} \leqslant 0, \bar{1}$), respectivement par la relation

$$z^{(m+1)} = 2\,(2 - z^{(m)}) \quad \text{pour} \quad d_{m-1} + d_m = 1$$

(et alors $1, \bar{0} \leqslant z^{(m)} \leqslant 2$), (2) deviennent

$$P_m(z^{(m)}, x) = 1 - \frac{a_m x}{P_{m+1}[2 z^{(m)}, x]} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant z^{(m)} \leqslant 0, 1 \tag{2a}$$

respectivement

$$P_m(z^{(m)}, x) = 1 + \frac{a_m x}{P_{m+1}[2(2 - z^{(m)}), x]} \quad \text{pour} \quad 1, \bar{0} \leqslant z^{(m)} \leqslant 2. \tag{2b}$$

Comme $z^{(m)}$ prend chaque valeur de I lorsque z parcourt ce segment, on peut, pour plus de simplicité, écrire z au lieu de $z^{(m)}$ dans (2a) et (2b) qui deviennent

$$\left.\begin{aligned}&(3a)\qquad P_m(z,x)=1-\frac{a_m x}{P_{m+1}(2z,x)}\quad(0\leqslant z\leqslant 0,\bar{1}),\\&(3b)\qquad P_m(z,x)=1+\frac{a_m x}{P_{m+1}[2(2-z),x]}\quad(1,\bar{0}\leqslant z\leqslant 2),\end{aligned}\right\}\quad(m=0,1,\ldots)$$

Si l'on met dans (3b) $z=2-z'$, puis si l'on écrit z au lieu de z', on obtient

$$P_m(2-z,x)=1+\frac{a_m x}{P_{m+1}(2z,x)}\quad(0\leqslant z\leqslant 0,\bar{1}).$$

En y ajoutant (3a) on obtient l'identité

$$(4)\qquad P_m(z,x)+P_m(2-z,x)=2\quad(0\leqslant z\leqslant 2;\quad m=0,1,2,\ldots).$$

Il est facile de démontrer que le système d'identités (3) est équivalent au système (3a) et (4).

De l'hypothèse 2° et de (4) pour $m=0$ il suit que $P_0(z,x)$ croît d'une valeur déterminée $P_0(0,x)<1$ [5] (l'hypothèse 1°), en restant toujours $\leqslant 1$, jusqu'à la valeur $P_0(0,\bar{1};x)$, lorsque z croît de 0 à 1. Mais il est facile de démontrer que l'égalité $P_0(0,\bar{1};x)=1$ ne peut jamais exister. En effet, $P_1(2z,x)$, d'après (3a) pour $m=0$, croît d'une valeur déterminée et finie

$$P_1(0,x)=\frac{a_0 x}{1-P_0(0,x)}.$$

Si $P_0(z,x)\to 1\ (z\uparrow 1)$, alors, d'après (3$a$), $P_1(2z,x)\to+\infty\ (z\uparrow 1)$ ce qui aurait, d'après (4), pour conséquence $P_1(2-z,x)\to-\infty\ (z\uparrow 2)$ respectivement $P_1(z,x)\to-\infty\ (z\downarrow 0)$ ce qui est en centradiction avec le fait déjà établi sur la fonction $P_1(2z,x)$.

Par la méthode de l'induction totale on démontre maintenant que la fonction $P_m(z,x)$ croît dans I de la valeur $P_m(0,x)<1$ jusqu'à la valeur $P_m(2,x)>1$, qu'elle est discontinue pour $z=1$ et qu'elle est continue à droite (gauche) pour chaque $z\in I$ (l'hypothèse 2°).

---

[5] $P_0(0,x)$ ne peut être égal à 1, parce que dans ce cas-là on aurait $P_0(z,x)\equiv 1$, c'est-à-dire $c_n^{(z)}\equiv 0$ $(n=0,1,2,\ldots)$ ce que est impossible d'après [1], p. 304, Satz 5.

Introduisons maintenant les nouvelles fonctions $g_m(z,x)$ par

$$g_m(z,x) = \frac{1 - P_m(z,x)}{\sqrt{x}}, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Les fonctions $g_m(z,x)$ $(x = \text{const.},\ 0 < x < R)$ sont dans I décroissantes et continues à droite (gauche) et discontinues pour $z = 1$. Les équations (3a) et (4) deviennent

$$g_m(z,x) = \frac{a_m}{\sqrt{x} - g_{m+1}(2z,x)} \quad (0 \leqslant z \leqslant 0,\bar{1}), \tag{6}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots).$$

$$g_m(z,x) + g_m(2 - z, x) = 0 \quad (0 \leqslant z \leqslant 2), \tag{7}$$

Mais il est évident que les $g_m(z,x)$ satisfont à toutes les conditions du théorème I de [3]. Par conséquent, d'après ce théorème et (6), on a[1)]

$$f_m(t) = \frac{a_m}{\sqrt{x^{-1}} - t} = \frac{a_m \sqrt{x}}{1 - t\sqrt{x}}.$$

et, toujours d'après ce théorème;

$$\bar{\xi}_0(z,0) = \frac{\varepsilon_0 a_0 \sqrt{x}\,|}{|\,1} - \frac{\varepsilon_1 a_1 x\,|}{|\,1} - \frac{\varepsilon_2 a_2 x\,|}{|\,1} - \cdots = g_0(z,x)$$

respectivement

$$\underline{\xi}_0(z,0) = \frac{\varepsilon_0 a_0 \sqrt{x}\,|}{|\,1} - \frac{\varepsilon_1 a_1 x\,|}{|\,1} - \frac{\varepsilon_2 a_2 x\,|}{|\,1} - \cdots = g_0(z,x)$$

suivant que $g_0(z,x)$ est continue à gauche ou à droite, c'est-à-dire suivant que, dans le cas où $z = p/2^q$, on a pris $z = z''$ ou $z = z'$. Tout celà s'écrit plus brièvement

$$\xi_0(z,0) = \frac{\varepsilon_0 a_0 \sqrt{x}\,|}{|\,1} - \frac{\varepsilon_1 a_1 x\,|}{|\,1} - \frac{\varepsilon_2 a_2 x\,|}{|\,1} - \cdots = g_0(z,x).$$

Du fait qu'on a d'une part $\xi_0(z,0) = [1 - R_0(z,x)]/\sqrt{x}$ et d'autre part $g_0(z,x) = [1 - P_0(z,x)]/\sqrt{x}$, on tire

$$R_0(z,x) = P_0(z,x) \quad (z \in I,\quad 0 < x < R).$$

Pour $x = 0$ cette égalité est vérifiée aussi. Mais il est facile de prouver sa validité encore pour $-R < x < 0$. En effet, en mettant $x = -y$ on obtient

$$R_0(z, x) = 1 + \frac{-\varepsilon_0 a_0 x\,|}{|\quad 1} + \frac{-\varepsilon_1 a_1 x\,|}{|\quad 1} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{-\bar{\varepsilon}_0 a_0 y\,|}{|\quad 1} + \frac{-\bar{\varepsilon}_1 a_1 y\,|}{|\quad 1} + \cdots =$$

$$= R_0(\bar{z}, y) = P_0(\bar{z}, y) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\bar{z})} y^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n^{(\bar{z})} x^n$$

où le nombre $\bar{z} \in I$ est défini par la suite des nombres $\bar{\varepsilon}_n = -\varepsilon_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ou par les égalités

$$d_n + (-1)^n \bar{d}_n = 2^{-1}[1 + (-1)^n] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$c_n^{(\bar{z})}$ indiquant les coefficients de la série $P_0(\bar{z}, y)$, dont nous avons ci-dessus prouvé la convergence. Or, les coefficients $c_n^{(z)}$ de la série $P_0(z, x)$ étant définis univoquement par la fraction continue $R_0(z, x)$ ([1], p. 302—304), le théorème III est démontré entièrement.

RÉFÉRENCES

[1] O. Perron — Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig u. Berlin, 1929.

[2] J. Karamata — Teorija i praksa Stieltjesova integrala, Beograd, 1949.

[3] M. Bajraktarević — Sur certaines suites itérées, Thèse de doctorat, soutenue le 13 juin 1953 à la Faculté des sciences de Paris.