DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS REPRÉSENTABLES PAR LES SÉRIES DE LEGENDRE

par

S. ALJANČIĆ (Beograd)

SOMMAIRE: On donne les conditions suffisantes pour avoir le développement asymptotique ($x \to \infty$) de la fonction $S(\theta,x) = \Sigma_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(x) P_\nu(\cos\theta)$ en y remplaçant simplement le développement asymptotique de $b_\nu(x)$ pour $\nu = 0,1,\ldots$

1. *INTRODUCTION ET RÉSULTATS.* Soit

$$F(x,\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(x) e^{\nu\theta i} \tag{1}$$

une série trigonométrique dont les coefficients $c_\nu(x)$ admettent pour tout $\nu = 0,1,\ldots$ un développement asymptotique

$$c_\nu(x) = \frac{\gamma_0(\nu)}{q_0(x)} + \frac{\gamma_1(\nu)}{q_1(x)} + \ldots + \frac{\gamma_m(\nu)}{q_m(x)} + o\left(\frac{1}{q_m(x)}\right), \quad x \to \infty,$$

procédant suivant les inverses d'une suite de fonctions $q_\nu(x)$, $\nu = 0,1,\ldots$ tendant vers l'infini avec x de plus en plus vite, c'est-à-dire

$$0 \leqslant q_\nu(x) \to \infty, \quad \frac{q_\nu(\nu)}{q_{\nu+1}(x)} \to 0, \quad x \to \infty .$$

J. Karamata [1] a démontré que, si les suites des coefficients $c_\nu(x)$, $\nu = 0,1,..$ et $\gamma_\mu(\nu)$, $\mu = 0,1,\ldots,m$ remplissent certaines conditions, la fonction $F(x,\theta)$. aussi admet, suivant les inverses de la même suite $q_\nu(x)$, un dévoloppement asymptotique, à savoir

$$F(x,\theta) = \frac{\Gamma_0(\theta)}{q_0(x)} + \frac{\Gamma_1(\theta)}{q_1(x)} + \ldots + \frac{\Gamma_m(\theta)}{q_m(x)} + o\left(\frac{1}{q_m(x)}\right), \quad x \to \infty,$$

avec

$$\Gamma_\mu(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\mu(\nu) e^{\nu\theta i}, \quad \mu = 1, 0, \ldots, m \tag{2}$$

Rien n'y sera changé si les séries (1) et (2) divergent; on n'aura qu'à prendre au lieu de leurs sommes habituelles celles d'Abel qui, grâce aux hypothèses faites sur $c_\nu(x)$, existent toujours.

D'autre part, l'auteur de la présente note a considéré [2] des développements asymptotiques ($x \to \infty$) des intégrales de Fourier-Stieltjes sommables-A

$$\Phi(x, \tau) = \lim_{\sigma=+0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{it\tau} \psi(t)\, d\varphi(t,x),$$

et a donné des conditions suffisantes justifiant l'application formelle, terme à terme, des procédés limites correspondant au développement asymptotique de $\varphi(t, x)$.

Dans le présent travail on se propose d'étendre les mêmes idées aux séries

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu P_\nu(\cos\theta)$$

procédant suivant les polynomes de Legendre qui ne sont pas nécéssairement des séries de Fourier. Si les séries de Legendre en question divergent, elles sont au sens d'Abel-Poisson toujours sommables, c'est-à-dire il existe

$$\lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu P_\nu(\cos\theta) r^\nu.$$

En désignant la k^{me} différence d'une suite $c_\nu, \nu = 0,1,\ldots,$ comme d'habitude, par $\Delta^k c_\nu$, c'est-à-dire en posant

$$\sum_{\mu=0}^{k} (-1)^\mu \binom{k}{\mu} c_{\nu+\mu} = \Delta^k c_\nu,$$

on a

THÉORÈME. *Soit $a_\nu, \nu = 0,1,\ldots,$ une suite totalement monotone et que $b_\nu(x)$ admette, pour tout $\nu = 0,1,\ldots,$ un développement asymptotique de la forme*

$$b_\nu(x) = \frac{p_0(\nu)}{q_0(x)} + \frac{p_1(\nu)}{q_1(x)} + \ldots + \frac{p_m(\nu)}{q_m(x)} + o\left(\frac{1}{q_m(x)}\right), \quad x \to \infty. \tag{3}$$

procédant sur les inverses d'une suite de fonctions $q_\nu(x)$, $\nu = 0,1,\ldots$ tendant vers l'infini avec x de plus en plus vite, où $p_\mu(\nu)$, $\mu = 0,1,\ldots,m$ sont de polynomes en ν d'ordre au plus s.

Si alors, pour un $k \geqslant s$ entier,

$$(4) \qquad q_m(x) \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \nu^{-1/2} | \Delta^{k+1} b_{\nu-k-1}(x) | \to 0, \quad x \to \infty,$$

il existe, pour $0 < \theta < \pi$,

$$G(x, \theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(x) P_\nu(\cos \theta) r^\nu$$

et $G(x, \theta)$ admet un développement asymptotique de la forme

$$(5) \qquad G(x, \theta) = \frac{\Pi_0(\theta)}{q_0(x)} + \frac{\Pi_1(\theta)}{q_1(x)} + \ldots + \frac{\Pi_m(\theta)}{q_m(x)} + o\left(\frac{1}{q_m(x)}\right), \quad x \to \infty,$$

avec

$$(\mathfrak{C}) \qquad \Pi_\mu(\theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p_\mu(\nu) P_\nu(\cos \theta) r^\nu, \quad \mu = 0, 1, \ldots, m.$$

Le développement (5) *est valable uniformément dans* $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$.

La condition (4) peut être remplacée par une autre plus appropriée bien que plus forte: (4) *sera rempli si, pour un $k > s$ entier et $\nu \geqslant \nu_0$, $x \geqslant x_0$ la différence k-ième $\Delta^k b_\nu(x)$ est positive et décroit d'une façon monotone lorsque $\nu \to \infty$, c'est-à dire*

$$(4^*) \qquad \Delta^k b_\nu(x) \geqslant \Delta^k b_{\nu+1}(x) \geqslant 0, \quad \nu \geqslant \nu_0, \quad x \geqslant x_0.$$

On a, en effet

$$q_m(x) \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \nu^{-1/2} | \Delta^{k+1} b_{\nu-k-1}(x) | \leqslant$$

$$\leqslant q_m(x) \sum_{\nu=k+1}^{\nu_0+k} \nu^{-1/2} | \Delta^k b_{\nu-k-1}(x) - \Delta^k b_{\nu-k}(x) | +$$

$$+ q_m(x) \sum_{\nu=\nu_0+k+1}^{\infty} \Delta^k b_{\nu-k-1}(x) \left| \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{\nu-1}} \right| +$$

$$+ q_m(x) \sum_{\nu=\nu_0+k+1}^{\infty} \left| \frac{\Delta^k b_{\nu-k-1}(x)}{\sqrt{\nu-1}} - \frac{\Delta^k b_{\nu-k}(x)}{\sqrt{\nu}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant q_m(x) \sum_{\nu=k+1}^{\nu_0+k} \nu^{-1/2} | \Delta^k b_{\nu-k-1}(x) - \Delta^k b_{\nu-k}(x) | +$$

$$+ q_m(x) \Delta^k b_{\nu_0}(x) \cdot \sum_{\nu=\nu_0+k+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\nu-1}} - \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right\} +$$

$$+ q_m(x) (\nu_0 + k)^{-1/2} \cdot \Delta^k b_{\nu_0}(x),$$

et puisque, d'après (3) et l'hypothèse faite sur l'ordre des polynomes $p_\mu(\nu)$, $\mu = 0,1,\ldots, m$,

$$\Delta^k b_\nu(x) = o\left(\frac{1}{q_m(x)}\right), \quad x \to \infty,$$

il s'ensuit l'affirmation.

Pour la démonstration de notre théorème nous aurons besoin des lemmes suivants:

LEMME 1. *Soient, pour* $0 \leqslant r < 1$,

$$F(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu r^\nu, \quad \Phi(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu r^\nu$$

et désignons par $S_\nu^{(k)} \Big/ \binom{\nu + k}{k}$ *la* ν*-ième somme de Cesàro du* k*-ième ordre de la série* $\Sigma\, b_\nu r^\nu$.

On a alors, pour $0 \leqslant r < 1$, *l'identité*

(7)
$$F(r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{k+1} a_{\nu-k-1}\left\{S_{\nu-k-1}^{(k)} - \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m}{m!}\binom{\nu - m - 1}{k - m} r^m \Phi^{(m)}(r)\right\}$$
$$(a_{-1} = a_{-2} = \ldots = a_{-k-1} = 0)$$

Pour $b_\nu = e^{\nu\theta i}$ *elle devient*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = (z-1)^{-k-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{k+1} a_{\nu-k-1} z^\nu, \quad z = r\, e^{\theta i}.$$

D'après le lemme 1 avec

$$a_\nu = c_\nu, \quad b_\nu = P_\nu(\cos\theta)$$

et l'inégalité

(8)
$$|1 - tz| \geqslant {}^1\!/_2 |1 - z|, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad |z| \leqslant 1,$$

on obtient

LEMME 2. *Soit*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{-1/2} |\Delta^{k+1} c_{\nu-k-1}| < \infty.\text{*)}$$

Alors il existe pour $0 < \theta < \pi$,

$$\lim_{r=1} f(\theta; r) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu P(\cos\theta)\, r^\nu$$

---

* Dans la somme Σ' il faut prendre $\nu^{-1/2} = 1$ pour $\nu = 0$.

et

$$|f(\theta; r)| \leqslant M (\sin\theta)^{-1/2} |1 - re^{i\theta}|^{-k-1} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \cdot \nu^{-1/2} |\Delta^{k+1} c_{\nu-k-1}|.$$

$$(0 < \theta < \pi, \quad 0 \leqslant r < 1)$$

M est indépendant de θ *et* r.

2. *DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.* On le fera en deux étapes.

(i) Posons

$$f(x, \theta; r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(x) P_\nu(\cos\theta) r^\nu.$$

Mais comme, en vertu de (4),

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{-1/2} |\Delta^{k+1} b_{\nu-k-1}(x)|, \quad x \geqslant x_0,$$

converge, il existe, d'après le lemme 2, $\lim_{r=1} f(x, \theta; r)$, $0 < \theta < \pi$. La fonction $f(x, \theta; r)$, qui est continue pour $0 \leqslant r < 1$ est donc continue de gauche au point $r = 1$. Par suite elle est uniformément continue dans l'intervalle fermé $(0, 1)$.

D'autre part, étant donné que toute suite a_ν totalement monotone admet une représentation de la forme $a_\nu = \int_0^1 t^\nu \, d\alpha(t)$, $\alpha(t)$ étant non décroissant, on aura, à cause de la continuité uniforme de $f(x, \theta; r)$ dans $(0, 1)$,

$$G(x, \theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \int_0^1 t^\nu \, d\alpha(t) \right\} b_\nu(x) P_\nu(\cos\theta) r^\nu =$$

$$= \lim_{r=1} \int_0^1 f(x, \theta; rt) \, d\alpha(t) =$$

$$= \int_0^1 f(x, \theta; t) \, d\alpha(t) =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(x) P_\nu(\cos(\theta) t^\nu \right\} d\alpha(t).$$

La première partie du théorème, c'est-à-dire l'existence de $G(x, \theta)$ est ainsi démontrée.

(ii) Pour démontrer la seconde partie posons

$$B_\nu(x) = q_m(x)\left\{b_\nu(x) - \frac{p_0(\nu)}{q_0(x)} - \cdots - \frac{p_m(\nu)}{p_m(x)}\right\}$$

et notons que, à cause de

$$\Delta^{k+1} B_\nu(x) = q_m(x)\,\Delta^{k+1} b_\nu(x).$$

en même temps que (4) aussi

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{-1/2} \,|\,\Delta^{k+1} B_{\nu-k-1}(x)\,|$$

converge. Donc on doit avoir, comme précédemment dans (i)

$$\lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu B_\nu(x) P_\nu(\cos\theta)\, r^\nu =$$

$$= \int_0^1 \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x) P_\nu(\cos\theta)\, t^\nu\right\} d\alpha(t).$$

A l'aide du lemme 2 et d'après (8) on trouve alors

$$\left|\lim_{r=0} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu B(x) P_\nu(\cos\theta)\, r^\nu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x)\, P_\nu(\cos\theta)\, t^\nu\right| |\,d\alpha(t)\,| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\sin\theta}} \int_0^1 \frac{|\,d\alpha(t)\,|}{|\,1 - t e^{i\theta}\,|^{k+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{-1/2} |\,\Delta^{k+1} B_{\nu-k-1}(x)\,| \leqslant$$

$$< \frac{M_1}{\sqrt{\sin\varepsilon}\,(\sin\varepsilon/2)^{k+1}} \left\{\sum_{\nu=0}^{k}{}' \nu^{-1/2} \,|\,\Delta^{k+1} B_{\nu-k-1}(x)\,| + \right.$$

$$\left. + q_m(x) \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \nu^{-1/2} \,|\,\Delta^{k+1} b_{\nu-k-1}(x)\,|\right\}$$

et cela uniformément dans $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$. Laissant maintenant x tendre vers ∞, on aura, puisque $B_\nu(x) \to 0$ et en vertu de (4),

$$\lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu B_\nu(x) P_\nu(\cos\theta) r^\nu = o(1), \quad x \to \infty,$$

et cela uniformément pour $0 < \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$. Il en résulte donc, si on exprime encore $B_\nu(x)$ par $b_\nu(x)$, la seconde affirmation du théorème, c'est-à-dire (5) avec (6).

3.1. *DÉMONSTRATION DU LEMME* 1. (i) Nous commencerons par démontrer les deux formules suivantes

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{n-m-1}{k-m} \binom{\nu}{m} = \binom{n-\nu-1}{k} \tag{9}$$

et

$$-\sum_{n=0}^{\varkappa} \binom{n-\nu-1}{k} \Delta^{k+1} a_{m-k-1} = a_\nu, \quad \nu \leqslant \varkappa \leqslant \nu + k, \tag{10}$$

dont nous aurons besoin par la suite.

La première est facile à vérifier; il suffit en effet de multiplier les deux membres par z^ν, $|z| < 1$, et de prendre aux deux membres les sommes de $\nu = 0$ à $\nu = \infty$. On trouve ainsi

$$\sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n-m-1}{k-m} z^m \frac{d^m}{dz^m}\left\{\frac{1}{1-z}\right\} = \frac{(-1)^k}{k!} z^n \frac{d^k}{dz^k}\left\{\frac{z^{k-n+1}}{1-z}\right\},$$

ou, après différentiation,

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{n-m-1}{k-m} \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}} = (-1)^k \sum_{m=0}^{k} \binom{k-n}{k-m} \frac{z^m}{(1-z)^{m+1}}.$$

La démonstration est ainsi donnée puisque

$$(-1)^m \binom{n-m-1}{k-m} = (-1)^k \binom{k-n}{k-m}.$$

La formule (10) résulte de l'identité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu = (z-1)^{-k-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{k+1} a_{\nu-k} z^\nu, \quad |z| < 1.$$

Il suffit d'y porter la série de puissances de $(z-1)^{-k-1}$ et de former le produit des deux séries aus econd membre. En égalant les coefficients de z^ν on a (10) avec $\varkappa = \nu$. Pour les autres valeurs possibles de $\varkappa$, l'affirmation est de évidente.

(ii) Passons à la démonstration du lemme 1. Désignons par $\sigma_{\nu-k-1}^{(k)}$ l'expression entre parenthèses au second membre de l'identité (7). Si, dans $\sigma_{n-k-1}^{(k)}$, on exprime la somme de Cesàro $S_{n-k-1}^{(k)}$ par les termes de la série et pour $\Phi(r)$ on prend la série correspondante, on obtient

$$\sigma_{n-k-1}^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n-k-1} \binom{n-\nu-1}{k} b_\nu r^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{n-m-1}{k-m} \binom{\nu}{m} \right\} b_\nu r^\nu,$$

et d'après (9)

$$\sigma_{n-k-1}^{(k)} = - \sum_{\nu=n-k}^{\infty} \binom{n-\nu-1}{k} b_\nu r^\nu. \tag{11}$$

Par conséquent, le second membre de l'identité (7) est égal à

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^{k+1} a_{n-k-1} \sum_{\nu=n-k}^{\infty} \binom{n-\nu-1}{k} b_\nu r^\nu,$$

ou, en intervertissant l'orde de sommation, égal à

$$- \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\nu+k} \binom{n-\nu-1}{k} \Delta^{k+1} a_{n-k-1} \right\} b_\nu r^\nu.$$

De (10) il résulte donc l'identité (7).

3.2. *DÉMONSTRATION DU LEMME* 2. (i) Nous allons démontrer d'abord l'inégalité (8). En désignant respectivement par $\Re z$ et $\Im z$ la partie réelle et la partie imaginaire de z, on a

$$\begin{aligned}
\frac{|1-tz|}{|1-z|} &= \left| 1 + \frac{z}{1-z}(1-t) \right| = \\
&= \left| 1 + \frac{\Re z - |z|^2}{|1-z|^2}(1-t) + i \frac{\Im z}{|1-z|^2}(1-t) \right| \geqslant \\
&\geqslant \left| 1 + \frac{\Re z - |z|^2}{|1-z|^2}(1-t) \right| = \\
&\geqslant \left| 1 - \frac{1}{2} \frac{1 - 2\Re z + |z|^2}{|1-z|^2}(1-t) + \frac{1}{2} \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}(1-t) \right| = \\
&\geqslant \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}(1-t) \right| \geqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Le signe d'égalité reste valable pour $t=0$ et $z=-1$.

(ii) Passons à la démonstration du lemme 2. Posons dans (7)

$a_\nu = c_\nu, \quad b_\nu = P_\nu(\cos\theta), \quad$ donc $\Phi(r) = (1 - 2r\cos\theta + r^2)^{-1/2}$;

l'identité devient alors

$$f(\theta; r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^{k+1} c_{\nu-k-1}\, \sigma_{\nu-k-1}^{(k)}(\theta; r),$$

(12)

$$(c_{-1} = c_{-2} = \cdots = c_{-k-1} = 0, \quad 0 \leqslant r < 1)$$

où, d'après (11),

$$\sigma_{\nu-k-1}^{(k)}(\theta; r) = -\, r^{\nu-k} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k-m-1}{k} P_{\nu-k+m}(\cos\theta)\, r^m.$$

Si on y porte (Szegö [3], p. 89)

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\, \Im \left\{ e^{i(n+1)\theta} \int_0^1 t^n (1-t)^{-1/2} (1-te^{2i\theta})^{-1/2}\, d\theta \right\},$$

$$(0 < \theta < \pi)$$

on trouve

$$\sigma_{\nu-k-1}^{(k)}(\theta; r) = -\frac{2}{\pi} r^{\nu-k} \Im \left\{ e^{i(\nu-k)\theta} \int_0^1 t^{\nu-k} (1-t)^{-1/2} (1-te^{2i\theta})^{-1/2} \varphi(tre^{i\theta})\, dt \right\}.$$

avec

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k-m-1}{k} z^m = (-1)^k \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}.$$

On a donc

$$|\sigma_{\nu-k-1}^{(k)}(\theta; r)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^1 t^\nu (1-t)^{-1/2} |1-te^{2i\theta}|^{-1/2} \frac{dt}{|1-tre^{i\theta}|^{k+1}},$$

et, d'après (8),

$$|\sigma_{\nu-k-1}^{(k)}(\theta; r)| \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{|1-e^{2i\theta}|^{1/2}} \frac{2^{k+1}}{|1-re^{i\theta}|^{k+1}} \int_0^1 t^\nu (1-t)^{-1/2}\, dt =$$

$$\leqslant \frac{2^{k+2}}{\pi\, |1-re^{i\theta}|^{k+1} \sqrt{\sin\theta}} \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(\nu+{}^3/_2)} \leqslant$$

$$\leqslant M\, \nu^{-1/2} |1-re^{i\theta}|^{-k-1} (\sin\theta)^{-1/2}.$$

En vertu de (12) on a donc, pour $0 < \theta < \pi$ et $0 \leqslant r < 1$,

$$|f(\theta; r)| \leqslant M\, |1-re^{i\theta}|^{-k-1} (\sin\theta)^{-1/2} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu^{-1/2} |\Delta^{k+1} c_{\nu-k-1}|.$$

(Reçu le 26 mai 1954)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Karamata J. — Sur certains développements asymptotiques avec application aux polynomes de Legendre. *Publ. de l'Inst. math. de l'Acad. serbe des sci.* **4** (1952), p. 69—86.

[2] Aljančić S. — Développements asymptotiques des fonctionelles linéaires sommables-A (En serbe, résumé allemand). *Zbornik radova Matematičkog inst. SAN* **3** (1953), p. 157–212.

[3] Szegö G. — Orthogonal Polynomials, New York 1939.