

## CONTRIBUTION À LA SOLUTION DU PROBLÈME PLAN

par

NIKOLA HAJDIN (Beograd)

M. Djurić dans son travail „Solution du problème de la plaque rectangulaire à l'aide des fonctions orthogonales des oscillations transversales d'une poutre“ (*Publications de l'Institut mathématique de L'Académie serbe des sciences*, t. III, 1950) a appliqué les fonctions des oscillations transversales d'une poutre pour la solution du problème plan d'une plaque rectangulaire et a donné la solution pour le cas d'une charge antimétrique-symétrique.

Le but de ce travail est d'étendre l'application de ces fonctions à la solution du problème plan d'une plaque rectangulaire avec charge doublement symétrique, et de montrer quelques propriétés de cette solution ainsi que son applicabilité à un problème technique.

On montre en outre comment on arrive par cette solution, en utilisant l'équation différentielle du problème plan, à des équations conditionnelles, que M. Djurić a obtenues dans le travail cité ci-dessus, moyennant l'application du principe du minimum de l'énergie potentielle.

Un système de coordonnées est attaché à une plaque rectangulaire de dimensions  $2a$  et  $2b$ , comme le montre la fig. 1. Les côtés  $x = \pm a$  sont chargés par une charge doublement symétrique, qui satisfait la condition:

$$\int_{-b}^{+b} p(y) dy = 0,$$

ce qui est sans importance pour la généralité de la solution. Cherchons pour cette charge la solution du problème plan moyennant des fonctions orthogonales des oscillations transversales de la poutre.

La détermination de l'état des tensions se ramène à la détermination de la fonction de tension d'Airy et alors les tensions sont données par:

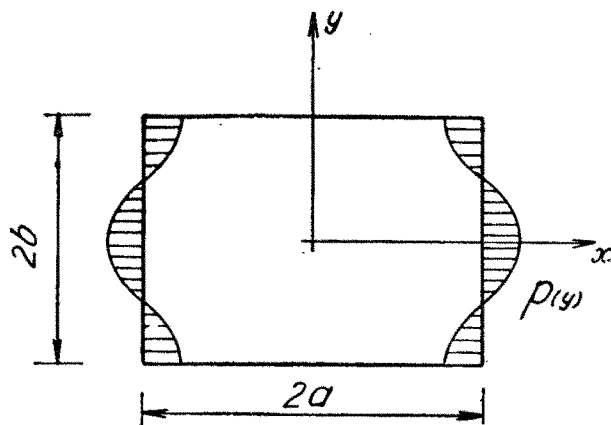


Fig. 1

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2},$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

$$\tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

La fonction elle-même doit satisfaire l'équation différentielle:

$$\Delta \Delta \Phi = 0.$$

Pour ce cas de la charge la fonction doit satisfaire les conditions aux limites suivantes:

$$\text{pour } x = \pm a : \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = p(y), \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$\text{pour } y = \pm b : \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Choisissons la fonction de tension de la forme:

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(y) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Phi_i(x, y) = \Phi_0(y) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} X_m(x) Y_n(y).$$

La fonction  $\Phi_0(y)$  satisfaisant la condition  $\frac{d^2 \Phi_0}{dy^2} = p$ , et les fonctions  $X_m(x), Y_n(y)$  étant telles que

$$X_m(\pm a) = 0, \quad X'_m(\pm a) = 0;$$

$$Y_n(\pm b) = 0, \quad Y'_n(\pm b) = 0,$$

les conditions aux limites seront satisfaites.

Les fonctions orthogonales des oscillations transversales de la poutre satisfont ces conditions et à cause de la double symétrie nous prenons  $X_m$  et  $Y_n$  telles que:

$$X_m(x) = \frac{\operatorname{ch} k_m x}{\operatorname{ch} k_m a} - \frac{\cos k_m x}{\cos k_m a},$$

$$Y_n(y) = \frac{\operatorname{ch} k_n y}{\operatorname{ch} k_n b} - \frac{\cos k_n y}{\cos k_n b}.$$

Les fonctions choisies satisfont les conditions exigées aux limites pour chaque  $m$  et  $n$  respectivement, tandis que les conditions  $X'_m(\pm a) = 0$  et  $Y'_n(\pm b) = 0$  sont satisfaites pour les valeurs  $k_m a$  et  $k_n b$  obtenues par la résolution des équations transcendentes

$$\operatorname{th} k_m a + \operatorname{tg} k_m a = 0$$

et

$$\operatorname{th} k_n b + \operatorname{tg} k_n b = 0.$$

Comme solutions approximatives de ces équations on peut prendre respectivement

$$k_m a = \left(m - \frac{1}{4}\right) \pi = \frac{\bar{m}\pi}{4}, \quad \bar{m} = 4m - 1, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

et

$$k_n b = \left(n - \frac{1}{4}\right) \pi = \frac{\bar{n}\pi}{4}, \quad \bar{n} = 4n - 1, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

La fonction de tension, formée de cette manière, ne satisfait pas l'équation différentielle pour le problème plan. Développant les fonctions

$$X_m'' = k_m^2 \left( \frac{\operatorname{ch} k_m x}{\operatorname{ch} k_m a} + \frac{\cos k_m x}{\cos k_m a} \right),$$

$$Y_n'' = k_n^2 \left( \frac{\operatorname{ch} k_n y}{\operatorname{ch} k_n b} + \frac{\cos k_n y}{\cos k_n b} \right),$$

qui apparaissent dans l'expression  $\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}$ , ainsi que la fonction  $\frac{d^4 \Phi_0}{dy^4}$ , en séries des fonctions orthogonales  $X_m$ ,  $Y_n$ , on peut écrire l'équation différentielle sous la forme:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_{mn} (k_m^4 + k_n^4) + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\mu\nu} \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{+a} X''_{\mu} X_m dx \int_{-b}^{+b} Y''_{\nu} Y_n dy \right] X_m Y_n =$$

$$= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{+a} X_m dx \int_{-b}^{+b} p(y) Y_n'' dy \right] X_m Y_n$$

L'équation suivante est donnée pour chaque ton:

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} (k_m^4 + k_n^4) + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\mu\nu} \frac{1}{4 ab} \int_{-a}^{+a} X''_{\mu} X_m dx \int_{-b}^{+b} Y''_{\nu} Y_n dy = \\ = \frac{1}{4 ab} \int_{-a}^{+a} X_m dx \int_{-b}^{+b} p(y) Y''_n dy \end{aligned}$$

Après avoir effectué les quadratures:

$$\begin{aligned} - \int_{-a}^{+a} X''_{\mu} X_m dx &= 8 \frac{k_m^2 k_{\mu}^2}{k_m^4 - k_{\mu}^4} (k_m \operatorname{tg} k_m a - k_{\mu} \operatorname{tg} k_{\mu} a), \quad \mu \neq m, \\ - \int_{-b}^{+b} Y''_{\nu} Y_n dy &= 8 \frac{k_n^2 k_{\nu}^2}{k_n^4 - k_{\nu}^4} (k_n \operatorname{tg} k_n b - k_{\nu} \operatorname{tg} k_{\nu} b), \quad \nu \neq n, \\ - \int_{-a}^{+a} X''_m X_m dx &= 2 k_m \operatorname{tg} k_m a (1 + k_m a \operatorname{tg} k_m a), \\ - \int_{-b}^{+b} Y''_n Y_n dy &= 2 k_n \operatorname{tg} k_n b (1 + k_n b \operatorname{tg} k_n b), \\ - \int_{-a}^{+a} X_m dx &= \frac{4}{k_m} \operatorname{tg} k_m a, \end{aligned}$$

on peut écrire les équations sous la forme

$$K_{mn}^{mn} \alpha_{mn} + \sum_{\nu} K_{m\nu}^{mn} \alpha_{m\nu} + \sum_{\mu} K_{\mu n}^{mn} \alpha_{\mu n} + \sum_{\mu} \sum_{\nu} K_{\mu\nu}^{mn} = - \frac{4}{\pi} \frac{b}{\beta^2} \frac{\bar{n}^2}{\bar{m}^2} \int_{-b}^{+b} p(y) \bar{Y}_n dy,$$

avec

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{k_n^2} Y'' \quad ; \quad \begin{array}{l} \mu = 1, 2, \dots, (m-1)(m+1), \dots \\ \nu = 1, 2, \dots, (n-1)(n+1), \dots \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array} .$$

En prenant pour  $k_m a$  et  $k_n b$  leurs valeurs approchées, pour les coefficients  $K$  on obtient les valeurs suivantes:

$$K_{mn}^{mn} = \left( \beta^2 \bar{m}^4 + \frac{\bar{n}^4}{\beta^2} \right) \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 + 2 \bar{m} \bar{n} \left( \frac{\bar{m} \pi}{4} - 1 \right) \left( \frac{\bar{n} \pi}{4} - 1 \right) ,$$

$$K_{mv}^{mn} = 8 \bar{m} \frac{\bar{n}^2 \bar{v}^2}{\bar{m}^4 - \bar{v}^4} \left( \frac{\bar{m} \pi}{4} - 1 \right) (\bar{v} - \bar{n}) ,$$

$$K_{\mu n}^{mn} = 8 \bar{n} \frac{\bar{m}^2 \bar{\mu}^2}{\bar{m}^4 - \bar{\mu}^4} \left( \frac{\bar{n} \pi}{4} - 1 \right) (\bar{\mu} - \bar{m}) ,$$

$$K_{\mu v}^{mn} = 32 \frac{\bar{m}^2 \bar{n}^2 \bar{\mu}^2 \bar{v}^2}{(\bar{m}^4 - \bar{\mu}^4)(\bar{n}^4 - \bar{v}^4)} (\bar{\mu} - \bar{m}) (\bar{v} - \bar{n}) ,$$

où  $\beta = \frac{b}{a}$ , dont ne dépendent que les coefficients diagonaux.

Dans les tableaux on a donné les coefficients  $K$  pour six et quatre tons adoptés pour  $x$  et quatre tons pour  $y$  respectivement, avec les valeurs des coefficients diagonaux pour les rapports des côtés:  $1/\beta = 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0$ .

Prenons comme exemple une plaque chargée, comme le montre la fig. 2a. Par la superposition de cette solution avec des tensions axiales

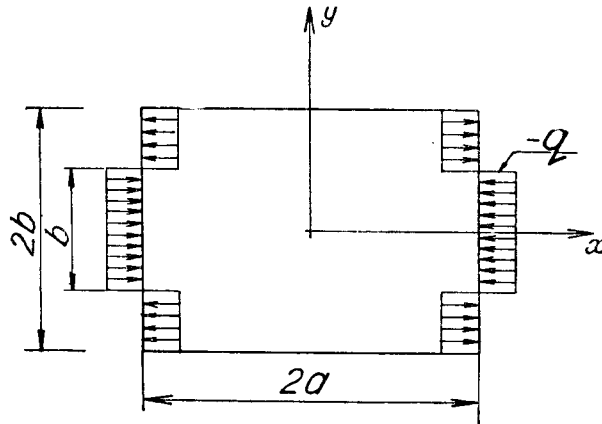


Fig. 2a

nettes on obtient la solution pour une plaque partiellement chargée comme le montre la fig. 2b.

Pour ce cas on a

$$p(y) = \begin{cases} q & \text{pour } -b < y < -\frac{b}{2}, \quad \frac{b}{2} < y < b, \\ -q & \text{pour } -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}, \end{cases}$$

et on a

$$B_n = -\frac{8b^2}{\pi n} q \left[ \frac{\operatorname{sh} k_n \frac{b}{2}}{\operatorname{ch} k_n b} + \frac{\sin k_n \frac{b}{2}}{\cos k_n b} \right]$$

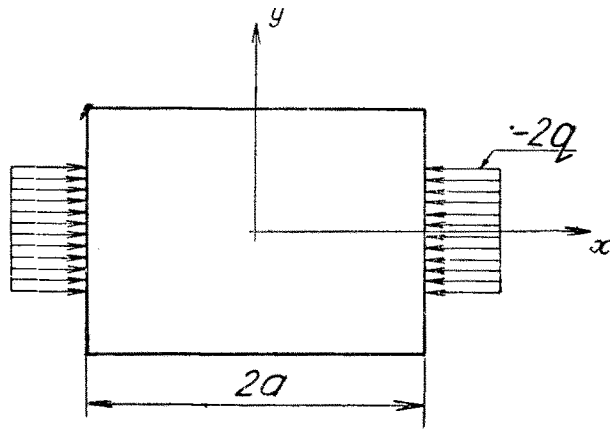


Fig. 2b

Pour  $n=1, 2, 3$  et  $4$  on a

$$B_1 = 0,8740 qb^2, \quad B_3 = -0,3039 qb^2,$$

$$B_2 = -0,2196 qb^2, \quad B_4 = 0,0907 qb^2.$$

Pour le cas d'une plaque carrée on a les solutions suivantes des équations:

$$\alpha_{mn}/qb^2 \times 10^{-3}$$

$m \backslash n$	1	2	3	4
1.	-49,72	4,672	3,194	-0,5489
2.	-0,2190	1,172	1,031	-0,1670
3.	-0,2922	0,2967	0,3713	-0,0725
4.	-0,0704	0,0892	0,1428	-0,0355

Les tensions normales  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont données par:

$$\sigma_x = p(y) + \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 X_m Y_n'' , \quad \sigma_y = \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 X_m'' Y_n .$$

$1/\beta$ $mn$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
11	133,0	139,8	156,5	180,5	210,4	245,5
21	1787,2	1338,8	1109,8	962,5	875,3	826,3
31	9765,1	7027,4	5389,5	4338,8	3633,3	3141,5
41	32593,9	23073,8	17346,5	13639,9	11116,8	9322,8
51	82591,0	58049,4	43265,0	33676,1	27127,5	22449,6
61	175863,5	123139,7	91363,1	70738,1	56637,2	46548,6
12	1787,2	2423,6	3184,6	4066,5	5070,8	6192,9
22	4944,7	5143,8	5641,1	6351,7	7238,8	8277,1
32	15803,9	13695,9	12802,2	12609,4	12878,3	13473,6
42	42892,1	34001,7	29018,6	26169,9	24621,2	23914,3
52	98526,7	74614,9	60574,7	51843,4	46269,4	42678,5
62	198814,8	146720,7	115688,3	95921,0	82794,7	73793,2
13	9765,1	13723,4	18410,7	23385,2	29963,9	36821,6
23	15803,9	19333,9	23748,5	28551,9	35013,4	41787,1
33	32185,8	33399,8	36432,4	40332,3	46175,5	52506,3
43	67438,2	61869,8	60812,9	62056,9	66082,6	71111,2
14	32593,9	46318,6	62548,5	81263,6	102521,5	126240,9
24	42892,1	56179,6	72145,7	90689,6	111830,4	135465,8
34	67438,2	78418,6	92993,7	110634,2	131156,7	154349,2
44	114759,3	118957,2	129442,9	144427,4	163132,4	185022,7

La fig. 3 montre l'allure des fonctions

$$a_1 = k_{n=1}^2 \sum_{m=1}^4 \alpha_{m1} X_m , \quad b_1 = k_{n=2}^2 \sum_{m=1}^4 \alpha_{m2} X_m ,$$

$$c_1 = k_{n=3}^2 \sum_{m=1}^4 \alpha_{m3} X_m , \quad d_1 = k_{n=4}^2 \sum_{m=1}^4 \alpha_{m4} X_m ,$$

et on voit que les fonctions  $c_1$  et  $d_1$  tendent, dans un intervalle de à peu

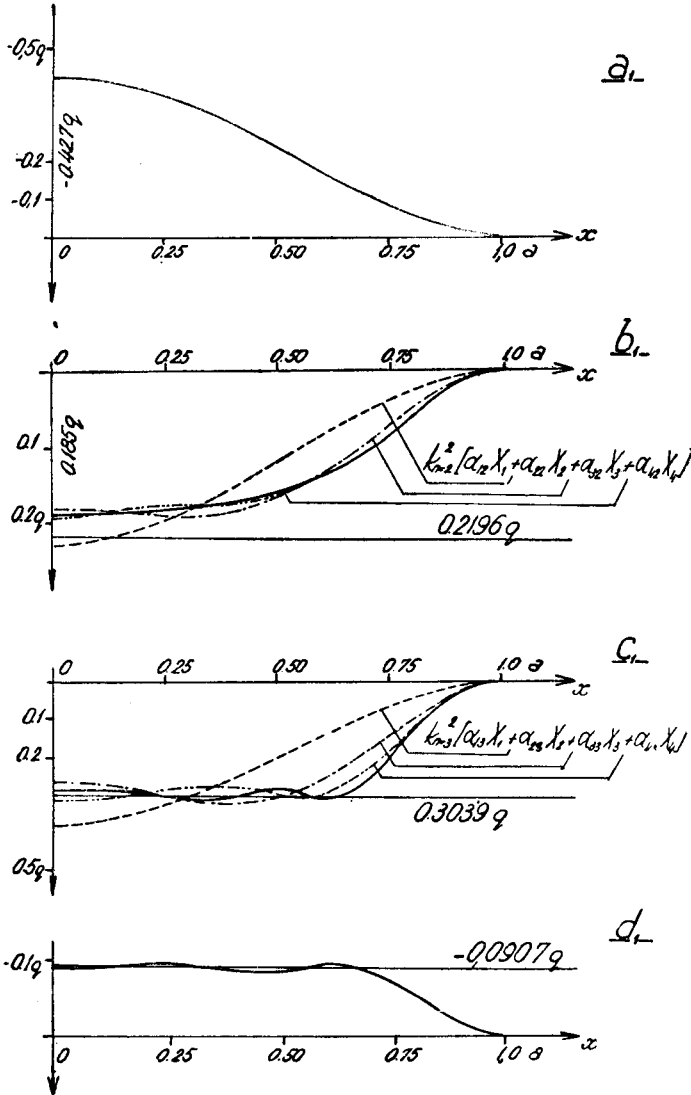


Fig. 3

La fig. 4 présente l'allure des fonctions

$$a_2 = \sum_{m=1}^4 \alpha_{m1} X_m'', \quad b_2 = \sum_{m=1}^4 \alpha_{m2} X_m'',$$

$$c_2 = \sum_{m=1}^4 \alpha_{m3} X_m'', \quad d_2 = \sum_{m=1}^4 \alpha_{m4} X_m'',$$

près  $x = \pm \frac{2}{3}a$ , vers

les valeurs  $0,3039q$  et  $-0,0907q$ . Ces valeurs avec des signes contraires représentent les coefficients du 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> terme du développement de la fonction  $p(y)$  en série suivant les fonctions orthogonales  $\bar{Y}_n$ , ce qui veut dire que l'action des tensions locales, excitées par des tons supérieurs de la charge, ne se propagent pas plus loin, et dans le domaine de

$$-\frac{2}{3}a < x < \frac{2}{3}a$$

les tensions normales  $\sigma_x$  sont données suffisamment précises par les expressions  $a_1$  et  $b_1$  respectivement, avec deux tons pour  $y$ .



qui définissent les tensions normales  $\sigma_y$ , où on remarque aussi que les tons supérieurs pour  $y$  s'amortissent vers le milieu de la plaque, de manière que la tension maximum  $\sigma_y$  est donnée de façon suffisamment précise avec les deux termes pour  $y$ .

Pour la pratique technique le problème intéressant de la répartition des tensions des rotules de support et des éléments similaires, résolu par Mörsch, Faerber, Freudenthal, Bay, Bortsch etc., peut être résolu comme il vient d'être montré dans cet exemple. Les solutions de Bay et de Bortsch sont basées sur le problème biharmonique. Bay a ramené le problème à la solution du problème biharmonique pour le domaine du cercle et Bortsch a résolu le problème par la méthode des différences. Le défaut de cette solution est le manque de généralité et l'impossibilité d'estimer la différence de l'état de tension de ce qu'on a dû obtenir.

La détermination des tensions dans les rotules de supports pour les divers rapports des côtés, ainsi que pour les divers rapports de propagation de la charge vers le côté  $b$ ,

est possible de cette manière; elle est suffisamment précise et relativement facile, ce qui assure à cette solution une supériorité sur les méthodes de calcul pour la charge montrée par la fig. 2b pour une plaque carrée, et d'après l'allure des fonctions montrées par les figures 3 et 4, on a

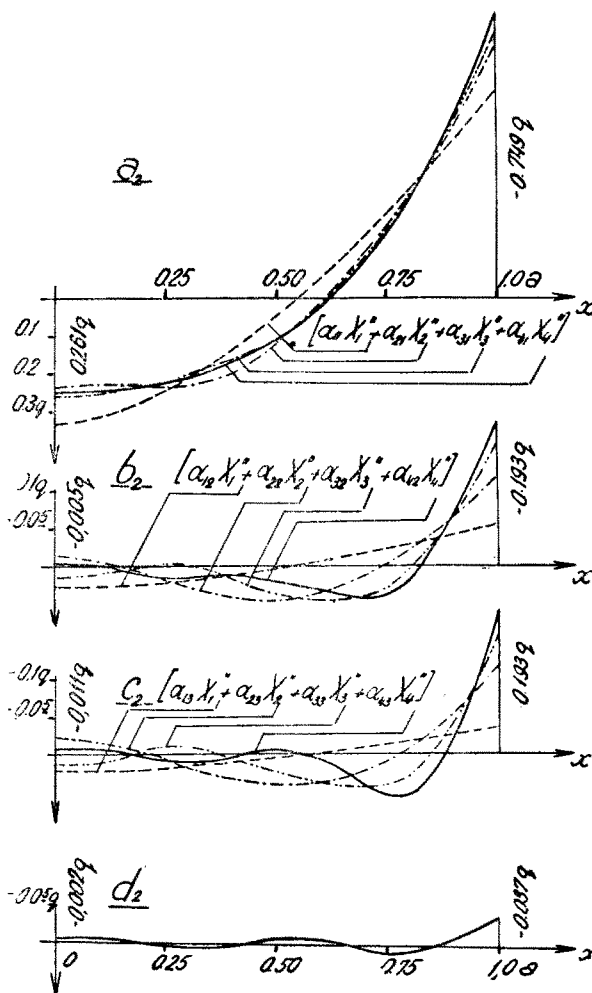


Fig. 4

donné sur la fig. 5 le diagramme de la tension  $\sigma_x$  de la section  $x=0$  et la tension  $\sigma_y$  de la section  $y=0$ .

Le cours de la tension  $\sigma_y$  est surtout important pour l'application

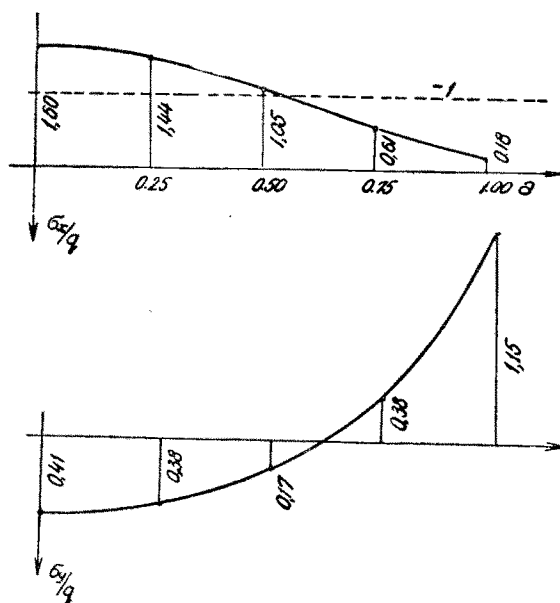


Fig. 5

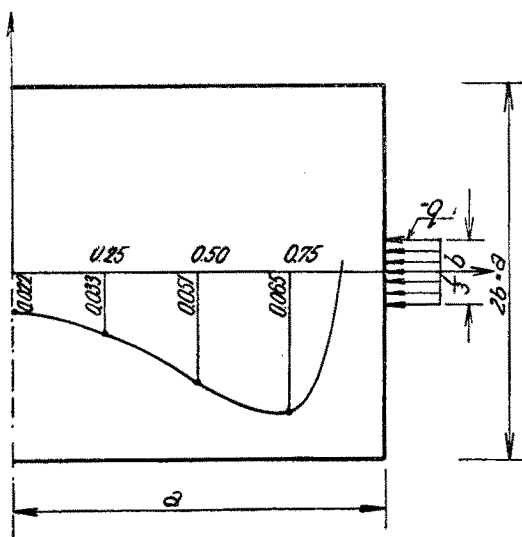


Fig. 6

technique. Pour une plaque rectangulaire, de rapport des côtés 1:2, chargée comme le montre la fig. 6, on a donné le diagramme de ces tensions de la section  $y=0$  en adoptant le système d'équations de 6 tons pour  $x$  et de 2 tons pour  $y$ . Ces données sont bien compatibles avec des données numériques, données par Bortsch [*Beton und Eisen* 4 (1935)] moyennant la méthode de différences opérant par 32 équations.

Il est intéressant de remarquer qu'avec les données, qu'on obtient en prenant comme solution des équations la première itération par pas unitaire, on obtient le diagramme de la tension  $\sigma_y$ , dont les ordonnées ne diffèrent plus de 2% des ordonnées du diagramme montré.