

# BEITRAG ZUR THEORIE DES FALTWERKES

von

MILAN DJURIĆ (Beograd)

Die Konstruktionen welche aus mehreren Platten bestehen, die Faltwerke, haben erstmalig G. Ehlers [1] und H. Craemer [2] analysiert. G. Grüning [3], E. Gruber [4], R. Ohlig [5] haben diese Analyse weitergeführt. Die in diesen Arbeiten gemachten Annahmen zur Berechnung des Faltwerkes sind dann berechtigt, wenn die Platten mit ihren längeren Seiten aneinanderstossen, das Längenverhältnis der Seiten grösser als 2 ist und das Faltwerk eine solche Gestalt und Auflager hat, dass unter den Schnittkräften die Normalkräfte im Querschnitt parallel zur kleineren Seite der Platte die grössten sind.

Bei geschlossenem regelmässigen prismatischen Faltwerk, das in der technischen Praxis oft verwendet wird, z. B. der Behälter mit polygonalem Grundriss, sind diese Schnittkräfte bedeutungslos und können oft vernachlässigt werden. Mittels obenerwähnten Analysen ist es aber unmöglich die Spannungen und Deformationen bei diesen Konstruktionen zu ermitteln.

Bei der Berechnung achsensymmetrisch belasteter geschlossener, regelmässig prismatischer Faltwerke (Abb. 1) wird manchmal angenommen dass die Punkte der Knoten zwischen zwei Platten unverschiebbar sind, das heisst:

$$(w)_{x=\pm a/2} = 0, \quad (1)$$

wobei mit  $w$  die Verschiebung der Punkte senkrecht zur Mittelfläche der Platten, bzw. in der Richtung der  $z$ -Achse eines angenommenen Koordinatensystems  $Oxyz$ , und mit  $a$  die Breite der Platte bezeichnet sind. Wegen Symmetrie ist

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=\pm a/2} = 0. \quad (2)$$

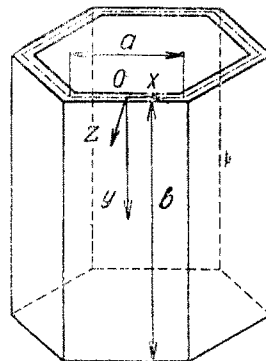


Abb. 1

Die Deformation der Platten und daraus die Spannungen ergeben sich durch Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad , \quad D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} \quad , \quad (3)$$

unter den Randbedingungen (1) und (2) längs  $x = \pm a/2$  und den Randbedingungen längs  $y=0$  und  $y=b$ , die von der Art der Auflagerung der Platten abhängen. Hier bedeutet  $q$  die Belastung der Platte,  $D$  die Plattensteifigkeit,  $\delta$  die Plattendicke,  $E$  den Elastizitätsmodul,  $\mu$  die Querdehnungszahl.

Der Zweck dieses Beitrages ist die Verschiebungen der Knoten in Rechnung zu nehmen, dann den Einfluss dieser Verschiebungen auf Deformation und Spannungen in den Platten zu zeigen und die Lösung für eine konkrete Aufgabe, welche dem Autor dieses Beitrages in der Praxis gestellt worden ist zu geben.

In Abbildung 2 ist ein Knoten dargestellt, der durch zwei senkrecht zu den Mittelflächen der benachbarten Platten geführten Schnitte begrenzt ist. Den Einfluss der Platten auf dem Knoten ersetzen wir durch die Querkräfte  $(q_x)_{x=a/2}$  und die Normalkräfte  $(n_x)_{x=a/2}$ . Wegen Symmetrie sind sowohl die Querkräfte als auch die Normalkräfte für beide Platten dieselben. Die Gleichgewichtsbedingung des Knotens ergibt:

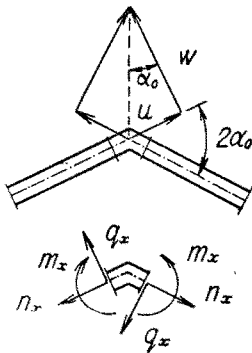


Abb. 2

$$(n_x)_{x=a/2} = \frac{(q_x)_{x=a/2}}{\operatorname{tg} \alpha_0} \quad . \quad (4)$$

Hierbei ist  $2\alpha_0$  der Winkel zwischen zwei benachbarten Platten.

Ein beliebiger Punkt der Geraden  $x = a/2$  erfährt unter dem Einfluss der Kräfte  $(n_x)_{x=a/2}$  die Verschiebung  $(u)_{x=a/2}$  in der Richtung der  $x$ -Achse. Diese Verschiebung muss mit der Verschiebung  $(w)_{x=a/2}$  im Zusammenhang stehen:

$$(w)_{x=a/2} = \frac{(u)_{x=a/2}}{\operatorname{tg} \alpha_0} \quad . \quad (5)$$

$(u)_{x=a/2}$  sollte man als Verschiebung einer Scheibe bestimmen, welche in ihrer Ebene mit den Kräften  $(n_x)_{x=a/2}$  belastet ist. Annähernd kann man nehmen

$$(u)_{x=a/2} = \frac{a (n_x)_{x=a/2}}{2 E \delta} \quad . \quad (6)$$

Stellen wir in Beziehung (6)

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) , \quad (7)$$

so ist mit Hilfe (4) und (5) leicht zu erhalten

$$\left[ w - \frac{a\delta^2}{24(1-\mu^2)tg^2\alpha_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]_{x=a/2} = \left[ w - c \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \right]_{x=a/2} = 0 . \quad (8)$$

Die Bedingung (8) anstatt (2) mit der Bedingung (1) stellen die Randbedingungen längs der Ränder  $x = \pm a/2$  dar.

Wenn wir die Veränderlichen  $x$  und  $y$  durch dimensionslose Veränderliche  $\xi$  und  $\eta$  durch  $x = a\xi$  und  $y = a\eta$  ersetzen so lässt sich die Bedingung (8) in folgender Form schreiben:

$$\left[ w - \frac{1}{24(1-\mu^2)tg^2\alpha_0} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right]_{\xi=1/2} = 0 . \quad (8a)$$

Hieraus wird klar, dass die Verschiebungen des Knotens um so bedeutender werden, je grösser die Zahl der Seiten des Faltwerkes und das Verhältniss der Plattendicke ( $\delta$ ) und Plattenbreite ( $a$ ) ist, bzw. je kleiner  $tg\alpha_0$  und je grösser  $\delta/a$  ist.

Die Annäherungsformel (6) gibt für die Verschiebung  $(u)_{x=a/2}$  um so bessere Werte, je kleiner die Plattenbreite  $a$  ist. Im Grenzfall, wenn  $a \rightarrow dx$  bzw. wenn das Faltwerk in die Kreiszylinderschale übergeht, ist aus der Beziehung (8) mit Hilfe der Gleichung (3) möglich die bekannte Differentialgleichung der achsensymmetrisch belasteten Kreiszylinderschale abzuleiten. Nämlich, der Gleichung (3) kann man die Form geben:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w = \frac{q}{D} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w . \quad (9)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $dx/a$  und integriert beide Seiten der Gleichung zwischen den Grenzen  $-a/2$  bis  $+a/2$  (da  $w$  und seine geraden Ableitungen gerade Funktionen der Veränderlichen  $x$  sind) so ist:

$$\frac{2}{a} \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \right)_{x=a/2} = \frac{q}{D} - \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w \right) dx . \quad (10)$$

Setzen wir (10) in (8) ein und lassen  $a \rightarrow dx$ , dann  $\frac{a}{2tg\alpha_0} \rightarrow R$ ;

$w(x, y) \rightarrow w(y)$  und  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w \rightarrow \frac{d^4 w}{dy^4}$ , so bekommen wir, nach einigen Umformungen, die gesuchte Gleichung

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 \varrho^2} w = \frac{q}{D}. \quad (11)$$

Als Beispiel eines geschlossenen regelmässigen prismatischen Falterwerkes betrachten wir im Weiteren einen Behälter mit polygonalem Grundriss dessen Platten unten ( $y=b$ ) fest eingespannt sind und oben ( $y=0$ ) frei aufliegen, belastet mit hydrostatischem Druck  $q = q_0 \frac{y}{b}$ . Die Randbedingungen sind dann längs des Randes

$$y=0: \quad w=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (12)$$

$$y=b: \quad w=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (13)$$

Dabei wurde  $\mu=0$  angenommen.

Bezeichnet man mit  $w_1(y)$  die Funktion welche die Gleichung (mit Strichen sind die Ableitungen der Funktionen einer Veränderlichen bezeichnet)

$$D w_1''''(y) = q = q_0 \frac{y}{b} \quad (14)$$

und die Randbedingungen

$$w_1(0) = w_1(b) = 0, \quad w_1''(0) = w_1''(b) = 0 \quad (15)$$

befriedigt, das heisst

$$w_1(y) = \frac{q_0 b^4}{360 D} \left( \frac{y}{b} \right) \left[ 7 - 10 \left( \frac{y}{b} \right) + 3 \left( \frac{y}{b} \right)^4 \right], \quad (16)$$

oder in der Form einer trigonometrischen Reihe

$$w_1(y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2 q_0}{D \beta_m^5 b} \sin \beta_m y, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}. \quad (17)$$

Die Differentialgleichung (3) und die Randbedingungen (2), (8), (12) und (13) kann man mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} w &= w_1 - b^2 w_1'' \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \alpha_n x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2 q_0 b}{D \beta_m^3} X_m \sin \beta_m y = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2 q_0 b}{D \beta_m^3} \left[ \frac{1}{\beta_m^2 b^2} + X_m + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \alpha_n x \right] \sin \beta_m y, \quad \alpha_n = \frac{2 n\pi}{a} \end{aligned} \quad (18)$$

erfüllen. Hier bedeuten  $C_n$  ein unendliches System noch unbestimmter Konstanten und  $X_m$  ein unendliches System noch unbestimmter Funktionen von  $x$ .

Geht man mit dem Ansatz (18) in die Differentialgleichung (3) ein und berücksichtigt dabei die Gleichung (14) so ergibt sich

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2q_0b}{D\beta_m^3} \left[ X_m'''' - 2\beta_m^2 X_m'' + \beta_m^4 X_m + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\alpha_n^4 + 2\beta_m^2 \alpha_n^2) \cos \alpha_n x \right] \sin \beta_m y = 0 . \quad (19)$$

Diese Gleichung wird für jedes  $y$  erfüllt, wenn für jedes  $m$  die Beziehung besteht

$$X_m'''' - 2\beta_m^2 X_m'' + \beta_m^4 X_m = - \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\alpha_n^4 + 2\beta_m^2 \alpha_n^2) \cos \alpha_n x . \quad (20)$$

Der gerade Anteil der allgemeinen Lösung dieser nichthomogenen Differentialgleichung vierter Ordnung ist

$$X_m = A_m \frac{ch \beta_m x}{ch \frac{\beta_m a}{2}} + B_m \beta_m x \frac{sh \beta_m x}{sh \frac{\beta_m a}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\alpha_n^4 + 2\beta_m^2 \alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} \cos \alpha_n x . \quad (21)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in (18) ein, so entsteht

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2q_0b}{D\beta_m^3} \left[ \frac{1}{\beta_m^2 b} + A_m \frac{ch \beta_m x}{ch \frac{\beta_m a}{2}} + B_m \beta_m x \frac{sh \beta_m x}{sh \frac{\beta_m a}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\beta_m^4}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} \cos \alpha_n x \right] \sin \beta_m y . \quad (22)$$

Die Randbedingungen (12) und die erste in (13) sind mit dem Ansatz (18) bzw. (22) schon befriedigt. Die Randbedingungen (2), (8) und die zweite der Bedingungen (13) kann man durch passende Wahl dreier unendlichen Systeme noch unbestimmter Beiwerte  $A_m$ ,  $B_m$  und  $C_n$  befriedigen.

Die Bedingung (2) lautet

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a/2} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2 q_0 b}{D \beta_m^2} \left[ A_m \operatorname{th} \frac{\beta_m a}{2} + B_m \left( 1 + \frac{\beta_m a}{2} \operatorname{cth} \frac{\beta_m a}{2} \right) \right] \sin \beta_m y = 0 \quad (23)$$

und daraus erhalten wir

$$A_m = -B_m \left( \operatorname{cth} \frac{\beta_m a}{2} + \frac{\beta_m a}{2} \operatorname{cth}^2 \frac{\beta_m a}{2} \right). \quad (24)$$

Setzen wir den Ausdruck (22) in die Bedingung (8) ein, so bekommt man, nach einigen Umformungen, unter Berücksichtigung der Verbindung (24)

$$\begin{aligned} & \left( w - c \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \right)_{x=a/2} = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{q_0 a^3 b}{4 D \pi^3} \left[ - \frac{8 \pi^3}{(\beta_m b)^5} \left( \frac{b}{a} \right)^3 + d_m B_m + \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} C_n \right] \sin \beta_m y, \end{aligned} \quad (25)$$

wobei die Abkürzungen

$$d_m = \frac{4 \pi^3}{(\beta_m a)^3} \frac{\beta_m a + \operatorname{sh} \beta_m a}{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta_m a}{2}} + 16 \pi^3 \frac{c}{a^3}, \quad e_{mn} = (-1)^{n+1} \frac{8 \pi^3 \beta_m}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 a^3} \quad (26)$$

eingeführt sind.

Die Gleichung (25) wird für jedes  $y$  erfüllt, wenn die Beziehung besteht:

$$d_m B_m + \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn} C_n = \frac{8 \pi^3}{(\beta_m b)^5} \left( \frac{b}{a} \right)^3, \quad m=1, 2, 3... \quad (27)$$

Das ist ein unendliches System linearer Gleichungen welches zwei unendliche Systeme von unbekanntem  $B_m$  ( $m=1, 2, 3...$ ) und  $C_n$  ( $n=0, 1, 2, 3...$ ) enthält. Ein zweites solches System linearer Gleichungen bekommen wir mittels der zweiten Bedingung (13), die noch nicht erfüllt ist. Um diese Bedingung zu erfüllen, stellen wir die Funktionen  $\operatorname{ch} \beta_m x$  und  $\beta_m x \operatorname{sh} \beta_m x$  durch trigonometrische Reihen dar:

$$\operatorname{ch} \beta_m x = \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \cos \alpha_n x, \quad \beta_m x \operatorname{sh} \beta_m x = \sum_{n=0}^{\infty} F_{mn} \cos \alpha_n x; \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned}
 E_{mn} &= \frac{4}{a} \int_0^{a/2} ch \beta_m x \cos \alpha_n x dx = (-1)^n \frac{4\beta_m}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2) a} sh \frac{\beta_m a}{2} , \\
 E_{m0} &= \frac{2}{\beta_m a} sh \frac{\beta_m a}{2} ; \\
 F_{mn} &= \frac{4}{a} \int_0^{a/2} \beta_m x sh_m x \cos \alpha_n x dx = \\
 &= (-1)^n \frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} ch \frac{\beta_m a}{2} + (-1)^n \frac{4\beta_m (\alpha_n^2 - \beta_m^2)}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 a} sh \frac{\beta_m a}{2} , \\
 F_{m0} &= ch \frac{\beta_m a}{2} - \frac{2}{\beta_m a} sh \frac{\beta_m a}{2} .
 \end{aligned} \right\} (29)$$

Die Lösung (22) der Plattengleichung (3) können wir dann in folgender Form darstellen:

$$w = w_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} \sin \beta_m y \cos \alpha_n y , \quad (30)$$

wobei

$$D_{mn} = (-1)^{m+1} \frac{2q_0 b}{D \beta_m^3} \left\{ \frac{A_m E_{mn}}{ch \frac{\beta_m a}{2}} + \frac{B_m F_{mn}}{sh \frac{\beta_m a}{2}} + C_n \frac{\beta_m^4}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} \right\} . \quad (31)$$

Setzen wir die Ausdrücke (29) für  $E_{mn}$ ,  $F_{mn}$  und den Ausdruck (24) für  $A_m$  in (31) ein, so bekommt man

$$D_{mn} = (-1)^{m+1} \frac{2q_0 b}{Da} \frac{1}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} \left[ C_n \beta_m a + (-1)^{n+1} 8 B_m \right] , \quad (32)$$

$$D_{m0} = (-1)^{m+1} \frac{2q_0 b}{Da} \frac{1}{\beta_m^4} \left[ C_0 \beta_m a - 4 B_m \right] .$$

Aus der zweiten Bedingung (13):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b} = w_1'(b) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \beta_m D_{mn} \cos \alpha_n x = 0 \quad (33)$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \beta_m D_{mn} &= 0, & n = 1, 2, 3, \dots, \\ w_1'(b) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \beta_m D_{m0} &= 0, \end{aligned} \quad (34)$$

oder, mit Hilfe von (32),

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} e_{nm} B_m + f_n C_n &= 0, & n = 1, 2, 3, \dots, \\ \sum_{m=1}^{\infty} e_{0m} B_m + f_0 C_0 &= -\frac{\pi^3}{45} \left(\frac{b}{a}\right)^2, \end{aligned} \quad (35)$$

wobei die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi^3}{a^2} \frac{\beta_m^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2}, & f_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\pi^3}{(\beta_m a)^2}, \\ e_{nm} = e_{mn} &= (-1)^{n+1} \frac{8\pi^3 \beta_m}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2 a^3} \end{aligned} \quad (36)$$

eingeführt sind.

Die Reihen durch die  $f_n$  und  $f_0$  gegeben sind, kann man addieren und die Ausdrücke für diese Beiwerte in endlicher Form geben:

$$f_n = \frac{\pi^3}{8\alpha_n a} \frac{b}{a} \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_n b - 2\alpha_n b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_n b}, \quad f_0 = \frac{\pi^3}{3} \left(\frac{b}{a}\right)^2. \quad (37)$$

Durch Lösung der Gleichungen (27) und (37) findet man die Werte für  $B_m$  und  $C_n$  und dann mit Hilfe von (32) die Werte von  $D_{mn}$ . Auf Grund der Gleichung (30) werden dann die Durchbiegungen  $w$  bestimmt.

Von der Grösse  $c$  in den Bedingungsgleichungen (27) und (37) hängen nur die Beiwerte  $d_m$  ab. Stellen wir  $c=0$  dann bekommt man die Bedingungsgleichungen für die Platte welche längs drei Seiten eingespannt ist und längs der vierten Seite frei aufliegt.



Für  $a=b=10\delta$  im Falle des regelmässigen sechseckigen Faltwerkes für welches  $\alpha=30^\circ$  ist, bekommen wir:

$B_1 = +0,05085$	$B_6 = -0,00074$
$B_2 = +0,00075$	$B_7 = -0,00047$
$B_3 = -0,00314$	$B_8 = -0,00032$
$B_4 = -0,00207$	$B_9 = -0,00022$
$B_5 = -0,00122$	$B_{10} = -0,00016$

$$C_0 = -0,02736$$

$C_1 = -0,01275$	$C_4 = +0,00019$
$C_2 = +0,00193$	$C_5 = -0,00008$
$C_3 = -0,00052$	$C_6 = +0,00004$

Auf Grund dieser Werte sind die Durchbiegungen  $w$  und die Biegemomente  $M_y$  in den Punkten der Geraden  $x=0$  und  $x=a/2$  bestimmt und in der Abb. 3 dargestellt.

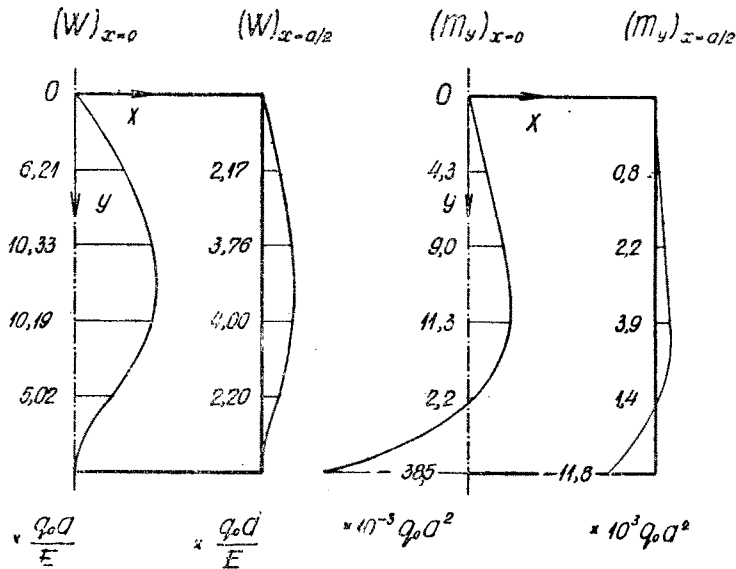


Abb. 3

## L I T E R A T U R

- [1] G. Ehl ers — Die Spannungsermittlung in Flächentragwerken. *Beton und Eisen* 1930 (29).
- [2] H. Crae mer — Allgemeine Theorie der Faltwerke. *Beton und Eisen* 1930 (29).
- [3] G. Grü ning — Die Nebenspannungen der prismatischen Faltwerke. *Ing. Arch.* 1932 (3).
- [4] E. Gruber — Berechnung prismatischer Scheibenwerke. *Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau*, Abh. I, 1932.
- [5] R. Ohlig — Beitrag zur Theorie der prismatischen Faltwerke. *Ing. Arch.* 1935 (6).