SUR L'HOMOGÉNÉISATION DES ÉQUATIONS DE NATURE VÉLOCIDIQUE

par

A. BILIMOVITCH (Beograd)

(Présenté à la Séance du 11-V-1951 de la Section des Sciences Naturelles et Mathématiques)

Dans le tome II des „Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des Sciences" j'ai fait paraître une note intitulée „Aires et volumes vélocidiques et hodographiques dans un mouvement du fluide" [1]. C. Truesdell en a d'abord référé dans Mathematical Reviews [2], puis a fait paraître, dans le Journal de l'Académie des Sciences de Washington, un article intitulé „On the balance between deformation and rotation in the motion of a continuous medium" [3] sur un théorème spécial dans ma note qu'il a appelé the theorem of Bilimovitch.

En me reportant aux travaux cités, je voudrais donner l'interprétation d'une propriété importante des équations intervenant dans le théorème, à savoir de l'inhomogénéité des termes de ces équations. D'après Truesdell la dite propriété de ces équations, quoique du point de vue physique elle soit extraordinaire, aurait le bon côté de permettre la séparation et la comparaison de leurs termes. Dans la présente note je vais donner une méthode permettant, tout en conservant les avantages que lui attribue Truesdell, d'homogénéiser les équations.

La cause principale de l'inhomogénéité dans les équations de nature vélocidique réside dans l'opération d'addition, par exemple: du vecteur de position $\vec{r}$ d'un point et du vecteur de vitesse $\vec{v}$ de ce point. C'est-à-dire la somme

$$\vec{V} = \vec{r} + \vec{v}, \tag{1}$$

où le premier terme a la dimension de longueur, le second la dimension LT^{-1}, T étant le temps. Une telle somme paraît, à première vue, absurde et est en contradiction avec le principe fondamental de Physique élémentaire, à savoir que tous les termes d'une équation physique doivent avoir la même dimension. Cependant, aussi bien les opérations de calcul que les constructions géometriques appliquées aux termes des relations inhomogènes, peuvent conduire aux résultats exacts et utiles aussi bien du point de vue de leurs valeurs numériques que du point de vue des rapports entre les figures géometriques inhomogènes. L'extension des opérations, telles qu'additions et soustractions, aux termes de nature différente serait tout-à-fait analogue à la formation, en Mathématiques classiques, des sommes de grandeurs de nature différente, par ex. de grandeurs réelles et imaginaires. En Arithmétique élémentaire, l'addition de grandeurs de différentes espèces n'est pas permise, car elle n'aurait pas de sens, par contre, en Mathématiques supérieures, l'addition des grandeurs réelles et imaginaires s'est avérée comme un moyen puissant dans la résolution des problèmes posés par la réalité. On sait, en effet, qu'après l'introduction de symbole pour l'unité imaginaire ($i = \sqrt{-1}$) et des règles appropriées d'opération, les manières dont on traitait les nombres complexes sont devenues aussi légitimes que celles valables pour les nombres réels. Grâce à un formalisme bien fixé on a, pour ainsi dire, fait disparaître la différence entre les grandeurs des domaines réels et imaginaires.

Introduisons dans les opérations avec les nombres concrets une notion, sui generis, la notion de grandeur concrète *par rapport à* l'unité d'une autre grandeur concrète.

Reportons nous à notre cas et introduisons la notion de longueur par rapport à l'unité de temps. Dans tout cas spécial, la partie de la notion „par rapport à" doit être fixé au moyen d'opérations avec la longueur et l'unité de temps. Pour le cas qui nous intéresse ici, nous introduirons cette grandeur concrète sous forme de vecteur de position $\vec{r}$ divisé par l'unité de temps, et désignons la, par exemple, par 1_t. On aura ainsi la grandeur

$$\frac{\vec{r}}{1_t}$$

qui représente un vecteur de position par rapport à l'unité de temps sous forme d'un quotient du vecteur de position et de l'unité de temps; ce quotient a la dimension LT^{-1}. A l'aide de cette notion, ou peut écrire l'équation (1) sous forme homogène:

$$\vec{V} = \frac{\vec{r}}{1_t} + \vec{v}\,.$$

Tous les termes dans cette équation ont la même dimension. Ainsi donc, grâce à l'introduction de l'unité de temps pour grandeur concrète, qui ne change pas les valeurs numériques des termes, on a rétabli l'homogénéité de l'équation. Si on substituait à l'unité de temps 1_t une autre unité, 1_{t^*}, liée à la première par la relation

$$1_t = \frac{1}{n}\, 1_{t^*}\,,$$

n étant un nombre abstrait quelconque, notre équation sera transformée en une autre équation homogène

$$\vec{V}^* = \frac{n\,\vec{r}}{1_{t^*}} + \vec{v}^*,$$

où

$$\vec{V}^* = n\,\vec{V}\,, \quad \vec{v}^* = n\vec{v}.$$

Exemple.

Écrivons l'équation sous forme vélocidique

(2) $$5\,\frac{cm}{sec} = 3\,cm + 2\,\frac{cm}{sec}\,.$$

En passant à une novelle unité de temps, par ex. à la minute, on écrirait

$$300\,\frac{cm}{min} = 3\,cm + 120\,\frac{cm}{min}\,.$$

Le premier terme au premier membre, étant indépendant du temps, garde sa valeur numérique et l'équation cesse d'être exacte.

Rétablissons maintenant l'homogénéité de l'équation (2) à l'aide da la notion de longueur par rapport à l'unité de temps $1_t = sec$ sous forme de quotient.

Nous écrirons

$$5 \frac{cm}{sec} = \frac{3\,cm}{1_t} + 2 \frac{cm}{sec}, \tag{3}$$

où les notions

$$\frac{3\,cm}{1_t} = \frac{3\,cm}{sec} \quad \text{et} \quad 3 \frac{cm}{sec}$$

doivent être considérées comme différentes dans leurs structures logiques.

En passant maintenant à la minute, que nous désignerons par 1_{t^*}, puisque $1_t = \frac{1}{60} 1_{t^*}$ de l'équation homogène (3) on déduit l'équation

$$300 \frac{cm}{min} = \frac{60 \cdot 3\,cm}{1_{t^*}} + 120 \frac{cm}{min},$$

qui redevient exacte.

On comprend que les raisonnements précédents peuvent facilement être généralisés sous forme de notion d'une grandeur concrète par rapport (sous forme détérminée) à un ensemble d'unités concrètes.

Rendons maintenant homogène notre équation (18)

$$\Delta Z_V = \Delta Z_C + \Delta Z_H + U_1 + U_2$$

de la note citée ou, mieux, l'équation (33)

$$V_V = V_S + V_H + \oint \vec{dS} \cdot \vec{v} + \frac{1}{4} \int_V (4\,\mathrm{II}_d + w^2)\, dV \tag{4}$$

dans le travail de C. Truesdell, correspondant terme par terme (après intégration effectuée dans mon travail) à mon équation.

V_V — volume vélocidique a la dimension $L^3 T^{-3}$, où au vecteur $\vec{V}$ dans l'équation (1) on attribue la dimension de vitesse;

V_S — volume du liquide a la dimension L^3;

V_H — volume hodographique a la dimension $L^3 T^{-3}$;

$\oint \vec{dS} \cdot \vec{v}$ a la dimension $L^3 T^{-1}$, car le temps n'entre que dans le vecteur; $\vec{v}$,

$\int_V (4\,\mathrm{II}_d + w^2)\, dV$ a la dimension $L^3 T^{-2}$, car

$$dim\, \mathrm{II}_d = dim\, \frac{1}{2} e_{ijk}\, e_{ilm}\, d_{jl}\, d_{km} =$$

$$= dim\; (v_{i,j})^2 = dim \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = T^{-2} \quad ;$$

$$dim\; w^2 = dim\; (v_{j,k})^2 = dim \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = T^{-2} \quad .$$

Grâce à cette méthode d'homogénéisation, l'équation (4) sous forme homogène doit être écrite:

$$V_V = \frac{V_s}{1_t^3} + V_H + \oint \frac{\vec{dS}}{1_t^2} \cdot \vec{v} + \frac{1}{4} \int_V \left[(4\,\mathrm{II}_d + w^2) \right] \frac{dV}{1_t^3} .$$

L'expression

$$4\,\mathrm{II}_d + w^2 \tag{5}$$

devient ici un nombre abstrait, car par exemple

$$dim \left[\frac{\partial v}{\left(\partial \dfrac{x}{1_t} \right)} \right]^2 = dim\; v^2 \cdot dim \left(\frac{x}{1_t} \right)^{-2} =$$

$$= L^2 T^{-2} \cdot L^{-2} T^2 = 1 .$$

En introduisant l'unité dans (5), on n'a divisé par cette unité que celles des longueurs par rapport auxquelles on a pris les dérivées partielles.

Il va de soi qu'après avoir rétabli l'homogénéité, on peut parler du sens physique des équations rendues homogènes. Quant à l'image que l'on obtient ainsi, elle peut être plus simple ou plus compliquée suivant la nature du phénomène étudié.

Le rétablissement de l'homogénéité aussi dans les termes de l'équation qui n'ont cette homogénéité comme les autres termes n'enlève rien à leur nature spécifique. Du point de vue formel, ceci ne montre que la présence, sous une forme ou sous une autre, de l'unité concrète, dans le cas général des unités concrètes. Par conséquent il est toujours possible, pour quelques raisons, de les séparer, si on le juge opportun. Ces termes gardent la propriété que C. Truesdell qualifie d'avantageuse dans le cas de l'inhomogénéité. De sorte que, dans ce sens aussi, l'analogie existant entre cette méthode et celle d'opération avec des nombres formés à l'aide de plusieurs unités spécifiques est conservée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Bilimovitch — Aires et volumes vélocidiques et hodographiques dans un mouvement du fluide. *Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe des sciences.* T. II. 1948, p. 37—52.

[2] C. Truesdell (Washington, D. C.) — *Mathematical Reviews.* Vol. 10, №. 8, p. 517.

[3] C. Truesdell (Naval Research Laboratory) — On the balance between deformation and rotation in the motion of a continuous medium. *Journal of the Washington Academy of Sciences,* Vol. 40, № 10, October 1959, p. 313—317